

УДК 517.54+532.5+62-135

## КВАЗИРЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ГУСТЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ

*А.М. Елизаров<sup>1</sup>, А.В. Поташев<sup>2</sup>, Е.В. Поташева<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

<sup>2</sup>*Казанский кооперативный институт (филиал) Российского университета  
кооперации, г. Казань, 420081, Россия*

### Аннотация

В процессе создания турбомашин большое значение имеет правильное проектирование рабочих колес, выбор формы их лопаток. Одним из перспективных подходов к решению этой проблемы является подход, базирующийся на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. Он позволяет разрабатывать методы профилирования гидродинамических решеток с заранее заданными свойствами так же, как и для изолированных профилей. В работе дано развитие способов построения квазирешений обратной краевой задачи аэрогидродинамики для плоской гидродинамической решетки. Рассмотрено два способа построения квазирешений.

Первый «формальный» способ по своей сути аналогичен методу построения квазирешения для случая изолированного профиля. Показано, что такие квазирешения дают удовлетворительные результаты для решеток профилей достаточно большого относительного шага. При малых же величинах шага этот способ неприемлем, так как в этом случае «модифицированное» распределение скорости на некоторых участках значительно отличается от исходного. В силу этого у контура профиля появляются участки со значительными изменениями угла наклона касательной, а область течения становится неоднородной.

Чтобы удовлетворить условиям разрешимости в случае решеток малого шага, был предложен новый метод нахождения квазирешения, учитывающий специфику рассматриваемой задачи. Добиться желаемого эффекта удалось за счет изменения весовой функции в минимизируемом функционале. Сравнение результатов построения нового квазирешения с результатами, полученными по «формальному» способу, показало, что при больших значениях шага построенные профили практически совпадают. В случае же густых решеток явное предпочтение следует отдать второму способу, так как он дает меньшее искажение исходного распределения скорости и, как следствие, позволяет найти физически реальный контур профиля.

**Ключевые слова:** обратная краевая задача аэрогидродинамики, гидродинамические решетки, квазирешения

---

Одним из перспективных подходов к решению проблемы отыскания оптимальной формы лопаток турбомашин является подход, базирующийся на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА). Обзор методов решения ОКЗА для гидродинамических решеток при различных параметризациях исходных данных можно найти в [1–6].

В настоящей работе дано развитие результатов решения ОКЗА для плоской гидродинамической решетки профилей [7, 8], касающееся способов построения квазирешений задачи (см., например, [9–12]). При этом особое внимание уделено случаю

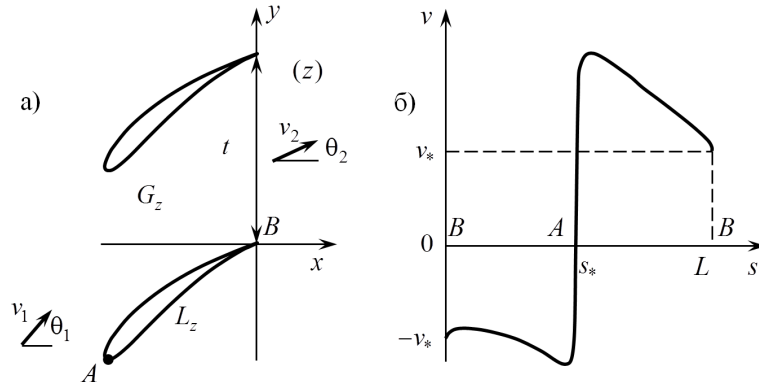


Рис. 1. К постановке задачи

густых решеток, которые наиболее часто встречаются в реальных гидродинамических решетках различного рода турбомашин (см., например, [13, 14]). Построенные решения проиллюстрированы численными расчетами.

**1. Построение решетки в потоке идеальной несжимаемой жидкости**

**1.1. Постановка задачи.** Напомним кратко постановку задачи и схему ее решения применительно к течению идеальной несжимаемой жидкости.

Искомая прямая однорядная решетка профилей шага  $t$  обтекается плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной скоростью  $v_1$  на бесконечности перед решеткой (рис. 1, *a*). Декартову систему координат  $(x, y)$  в физической плоскости  $z$  выберем так, чтобы начало координат совпадало с задней кромкой одного из конгруэнтных профилей решетки, который назовем основным, а ось  $Oy$  направим параллельно фронту решетки.

Необходимо определить форму профиля решетки с гладким (за исключением, быть может, задней кромки) контуром по заданному на нем распределению скорости  $v = v(s)$ ,  $s \in [0, L]$  ( $L$  – периметр контура профиля) и известным значениям шага  $t$  и параметров потока  $v_1, \theta_1$  перед решеткой (рис. 1, *б*). Ограничения, налагаемые на функцию  $v(s)$ , те же, что и в ОКЗА для изолированного профиля (см., например, [9]). Внешний угол в задней кромке  $B$  определяется величиной  $\pi\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [1, 2]$ .

**1.2. Аналитическое решение.** При сделанных в постановке задачи предположениях существует комплексный потенциал течения  $w = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$  – потенциал скорости,  $\psi$  – функция тока). При этом области течения  $G_z$  в физической плоскости  $z$  с разрезами по линиям тока, сходящим с задних кромок профилей, соответствует область  $G_w$ , изображенная на рис. 2, *a*. Искомым контурам соответствуют берега разрезов, показанные сплошными линиями, а сходящим линиям тока – штриховыми линиями.

Для решения задачи используется метод сопоставления плоскостей путем выбора в качестве канонической области  $G_\zeta$  бесконечнолистной римановой поверхности с симметричными точками ветвления  $\zeta = \pm R$ , проекцией которой является окружность единичного радиуса. Конформное отображение  $G_\zeta$  на область  $G_z$  нормируем так, чтобы точкам  $\zeta = \pm R$  соответствовали бесконечности перед решеткой и за ней, а контуру профиля – окружность  $L_\zeta$ . При таком отображении один период области  $G_z$  перейдет во внешность круга  $|\zeta| > 1$ , расположенную на одном листе римановой поверхности (рис. 2, *б*). Точкам  $A$  и  $B$  разветвления и схода потока

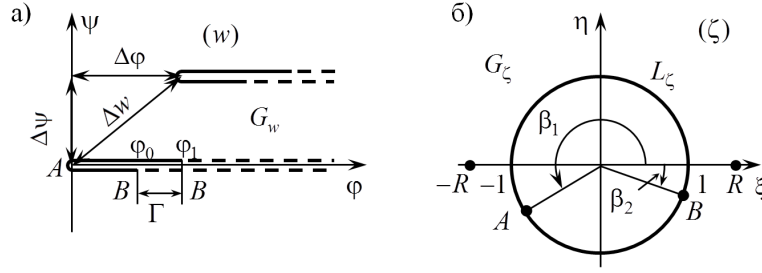


Рис. 2. Область  $G_w$  в плоскости комплексного потенциала и область  $G_\zeta$  во вспомогательной плоскости

соответствуют при этом точки  $\zeta_k = e^{i\beta_k}$ ,  $k = 1, 2$ .

Конформное отображение  $G_\zeta$  на  $G_w$  осуществляется функцией [15]

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left( \Gamma \ln \frac{\zeta - R}{R\zeta - 1} + \Delta w \ln \frac{\zeta + R}{\zeta - R} - \overline{\Delta w} \ln \frac{R\zeta + 1}{R\zeta - 1} \right) + C, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  – циркуляция скорости вдоль контура каждого из профилей,  $\Delta w = itv_1 e^{-i\theta_1}$ ,  $C = \text{const}$ . Искомый контур профиля  $L_z$  строится по формуле

$$z(\zeta) = u_0 e^{-i\beta} \int_{\zeta_2}^{\zeta} e^{-\tilde{\chi}(\tau)} \frac{(1 - \zeta_1/\tau)^{\varepsilon-1}}{(\zeta^2/R^2 - 1)(1 - (R\tau)^{-2})} d\tau$$

при  $\zeta = e^{i\gamma}$ , где

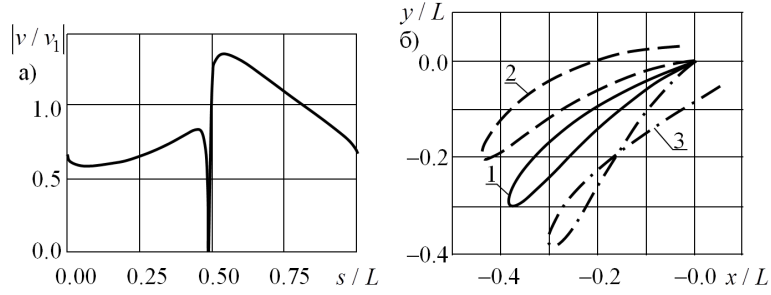
$$\tilde{\chi}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) \frac{e^{i\tau} + \zeta}{e^{i\tau} - \zeta} d\tau + i\theta_*, \quad (2)$$

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln |v(s(\gamma))| - (2 - \varepsilon) \ln |2 \sin((\gamma - \gamma_2)/2)| - \ln |2 \sin((\gamma - \gamma_1)/2)|. \quad (3)$$

**1.3. Результаты тестового расчета.** Была проведена программная реализация построенного аналитического решения (1)–(3). Для проверки работоспособности программы проведен тестовый расчет. В качестве исходного распределения скорости взято распределение  $v(s)$  (рис. 3, а) из работы [2]. Оно построено на основе точного аналитического решения задачи обтекания плоской решетки шага  $t' = t/L = 0.485$ , состоящей из профилей с бесконечно-тонкой задней кромкой (сплошная кривая 1 на рис. 3, б), потоком идеальной несжимаемой жидкости с параметрами  $v_1 = 1$ ,  $\theta_1 = 53.5^\circ$  на бесконечности перед решеткой. Указанная решетка является периодическим аналогом профилей Жуковского и, как отмечено в [2], используется для тестирования различного рода программ.

В результате расчета построен профиль, совпавший с исходным (максимальное отличие координат не превысило 0.1% величины  $L$ ). Найденные значения  $v_2/v_1 = 0.689$  и  $\theta_2 = 30.34^\circ$  также близки к точным:  $v_2/v_1 = 0.687$  и  $\theta_2 = 30.02^\circ$ .

Приведенные результаты подтвердили работоспособность метода и программы при «восстановлении» профиля по данным, соответствующим реально существующей решетке. Если же нужно построить решетку по достаточно произвольным данным, то, как и в случае изолированного профиля, возникает проблема разомкнутости соответствующего контура профиля решетки и неоднозначности области течения. Примером этому служат штриховой и штрих-пунктирный контуры на рис. 3, б, построенные при тех же распределении скорости  $v(s)$  и параметрах


 Рис. 3. Решение обратной задачи для различных значений шага решетки  $t'$ 

$v_1$  и  $\theta_1$ , что и в тестовом примере, но при других значениях  $t'$ . Таким образом, одно лишь уменьшение шага  $t'$  привело к разомкнутости контура (штриховой контур 2 при  $t' = 0.35$ ), а увеличение  $t'$  – к его самопересечению (штрих-пунктирный контур 3 при  $t' = 1$ ).

## 2. Условия разрешимости и способы их удовлетворения

**2.1. Условия разрешимости.** Исследование полученного решения показывает, что произвольно заданные исходные данные, как и в ОКЗА для изолированного профиля, не гарантируют получение физически реальных профилей решетки и заданной скорости набегающего потока. Это связано с наличием условий разрешимости и однолиственности.

Как показано в [8], условия замкнутости искомого контура профиля могут быть записаны в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(\tau) \sin \tau d\tau}{R^2 + 1 - 2R \cos \tau} = -\frac{\pi}{R} (\theta_2 + \theta_* - \theta_{02}), \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(\tau) d\tau}{R^2 + 1 - 2R \cos \tau} = \frac{\pi}{R^2 - 1} (S_2 - S_{02}), \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(\tau) d\tau}{R^2 + 1 + 2R \cos \tau} = \frac{\pi}{R^2 - 1} (S_1 - S_{01}), \quad (6)$$

где

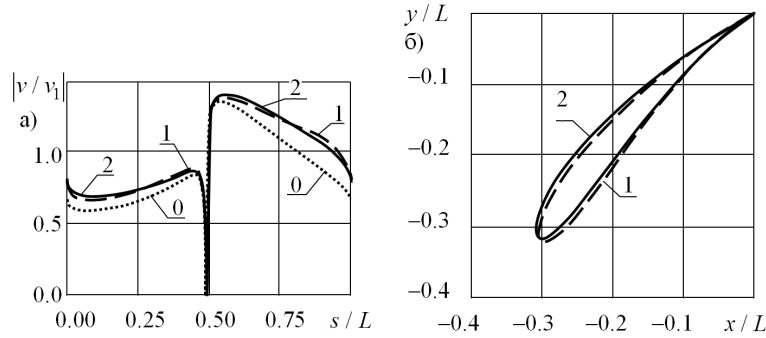
$$\theta_* = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(\tau) \sin \tau d\tau}{R^2 + 1 + 2R \cos \tau} - \theta_1 + \theta_{01}, \quad (7)$$

$$\theta_{01} = (\varepsilon - 2) \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta_2}{R + \cos \beta_2} - \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta_1}{R + \cos \beta_1},$$

$$\theta_{02} = (2 - \varepsilon) \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta_2}{R - \cos \beta_2} + \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta_1}{R - \cos \beta_1},$$

$$S_{01} = \frac{2 - \varepsilon}{2} \ln \frac{R^2 + 1 + 2R \cos \beta_2}{R^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{R^2 + 1 + 2R \cos \beta_1}{R^2}.$$

$$S_{02} = \frac{2 - \varepsilon}{2} \ln \frac{R^2 + 1 - 2R \cos \beta_2}{R^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{R^2 + 1 - 2R \cos \beta_1}{R^2},$$

Рис. 4. Пример построения квазиразрешений при  $t' = 1$ 

$S_1 = \ln v_1$ ,  $S_2 = \ln v_2$ , а величины  $v_2$  и  $\theta_2$  определены формулами

$$\theta_2 = \arctg \frac{v_1 \sin \theta_1 - \Gamma/t}{v_1 \cos \theta_1}, \quad v_2 = \frac{v_1 \cos \theta_1}{\cos \theta_2}.$$

**2.2. «Формальный» способ построения квазиразрешения.** Опишем различные подходы решения проблемы удовлетворения условиям разрешимости, базирующиеся на способе квазиразрешения некорректных задач.

Первый «формальный» способ построения квазиразрешений можно получить, если несколько преобразовать условия (4)–(6). Сложим и вычтем правые и левые части последних двух условий и перепишем первое из них с учетом выражения (7) для  $\theta_*$ . В результате получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(\tau)}{\varphi(\tau)} e^{i\tau} d\tau = B_1 + iB_2, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{S}(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau = B_3,$$

где

$$B_1 = \frac{\pi(S_2 - S_1 + S_{01} - S_{02})}{2R(R^2 - 1)}, \quad B_2 = \frac{\pi(\theta_1 - \theta_2 + \theta_{02} - \theta_{01})}{2R(R^2 + 1)},$$

$$B_3 = \frac{\pi(S_2 + S_1 - S_{01} - S_{02})}{R^4 - 1}, \quad \varphi(\gamma) = R^4 + 1 - 2R^2 \cos(2\gamma).$$

Эти условия по форме записи аналогичны условиям разрешимости в ОКЗА для изолированного профиля (см. (2.3), (2.4) в [3]), если в них заменить функцию  $\tilde{S}(\gamma)$  на  $\tilde{S}(\gamma)/\varphi(\gamma)$ . Такая форма записи позволяет применить известные методы построения функции  $\tilde{S}^*(\gamma) = \tilde{S}(\gamma) + T(\gamma)$ , удовлетворяющей условиям разрешимости, с заменой  $T(\gamma)$  на  $T_1(\gamma) = T(\gamma)/\varphi(\gamma)$ . При этом способы отыскания функции  $T_1(\gamma)$  останутся теми же, что и в [9, 10].

Примеры использования описанного способа удовлетворения условий разрешимости приведены на рис. 4, 5. Исходное распределение скорости (пунктирные кривые 0 на рис. 4, а и 5, а) и параметры потока перед решеткой  $v_1$  и  $\theta_1$  выбраны теми же, что и в тестовом примере из 1.3, а величина шага  $t'$  – отличной от точного значения  $t' = 0.485$  ( $t' = 1$  в первом примере и  $t' = 0.35$  – во втором). Соответствующие этим исходным данным разомкнутые контуры (штриховая и штрихпунктирная линии соответственно) приведены на рис. 3, б. Найденные замкнутые контуры и распределения скорости вдоль них показаны на рис. 4, 5 штриховыми кривыми 1. При этом модификация скорости проведена на всем контуре профиля.

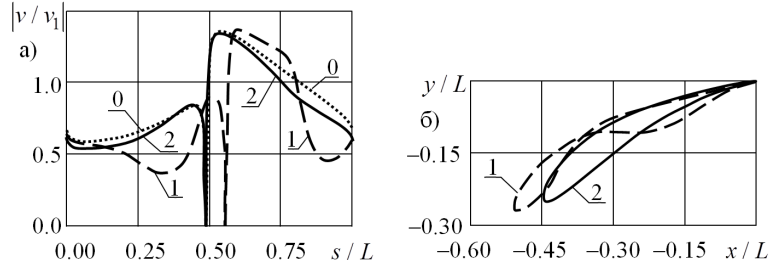


Рис. 5. Пример построения квазирешений при  $t' = 0,35$

Анализ приведенных результатов показал, что применение описанного способа дает удовлетворительные результаты при достаточно больших значениях  $t'$  (см. рис. 4). При малых же величинах  $t'$  (рис. 5) этот способ неприемлем, так как в этом случае «модифицированное» распределение скорости на некоторых участках значительно отличается от исходного. В силу этого у контура профиля появляются участки со значительными изменениями угла наклона касательной, а область течения становится неоднолистной.

Такой характер поведения модифицированного распределения скорости обусловлен наличием множителя  $1/\varphi(\gamma)$  в выражении  $T_1(\gamma)$ . При больших значениях  $t'$  функция  $\varphi(\gamma)$  мало отличается от константы. При малых же  $t'$ , когда  $R \rightarrow 1$ , имеем

$$\lim_{R \rightarrow 1} (\max_{\gamma} \varphi(\gamma, R)) = 2, \quad \lim_{R \rightarrow 1} (\min_{\gamma} \varphi(\gamma, R)) = 0,$$

то есть при  $R \rightarrow 1$  отношение максимального и минимального значений  $\varphi(\gamma)$  стремится к бесконечности.

**2.3. Построение новых квазирешений.** Чтобы удовлетворить условиям разрешимости в случае решеток малого шага, построим **новые квазирешения**, учитывающие специфику рассматриваемой задачи. В описанном выше способе задача построения квазирешения сводилась к нахождению функции  $T(\gamma)$ , минимизирующей функционал  $J_0(T/\varphi)$

$$J_0 = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T^2(\tau) f_0(\tau) d\tau, \tag{8}$$

при ограничениях

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T(\tau) f_k(\tau) d\tau - C_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{9}$$

$$T(\gamma_1) = T(\gamma_2). \tag{10}$$

Здесь  $[\gamma_1, \gamma_2]$  – участок коррекции  $\tilde{S}(\gamma)$ , а  $f_0(\gamma)$  – весовая функция, причем в рассмотренном выше «формальном» способе

$$f_0(\gamma) = \frac{1}{\varphi(\gamma)^2}, \quad f_1(\gamma) = \frac{\cos \gamma}{\varphi(\gamma)},$$

$$f_2(\gamma) = \frac{\sin \gamma}{\varphi(\gamma)}, \quad f_3(\gamma) = \frac{1}{\varphi(\gamma)},$$

$$C_k = B_k - \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\tau) f_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3.$$

Если рассмотреть случай  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 2\pi$ , что приведет к снятию ограничения (10), то, применив метод множителей Лагранжа, найдем  $T(\gamma)$  в виде

$$T(\gamma) = \frac{\mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma + \mu_3}{2\varphi(\gamma) f_0(\gamma)}. \quad (11)$$

При этом коэффициенты  $\mu_k$  являются решением системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^3 \mu_k a_{kj} = C_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

вытекающих из (9), где

$$a_{kj} = \int_0^{2\pi} \frac{f_k(\tau) f_j(\tau) d\tau}{2f_0(t)}, \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

В случае  $f_0(\gamma) = \varphi(\gamma)^{-2}$  имеем

$$a_{11} = a_{22} = \frac{\pi}{2}; \quad a_{33} = \pi;$$

$$a_{kj} = 0, \quad k \neq j, \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

и, следовательно,

$$T(\gamma) = \varphi(\gamma) (C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma + C_3/2) / \pi.$$

Как уже было отмечено выше, наличие множителя  $\varphi(\gamma)$  у функции  $T(\gamma)$  привело к нежелательным последствиям при построении квази решений. Для того чтобы избежать этого, потребуем равенства константе знаменателя в правой части выражения (11), то есть выберем весовую функцию в функционале (8) в виде  $f_0 = \varphi(\gamma)^{-1}$ . Это позволяет найти в явном виде коэффициенты  $a_{kj}$ , входящие в систему уравнений (12):

$$a_{11} = \frac{\pi}{2R^2(R^2 - 1)}, \quad a_{22} = \frac{\pi}{2R^2(R^2 + 1)}, \quad a_{33} = \frac{\pi}{R^4 - 1},$$

$$a_{kj} = 0, \quad k \neq j, \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$T(\gamma) = \frac{R^4 - 1}{\pi} \left( \frac{C_1 \cos \gamma}{R^2 + 1} + \frac{C_2 \sin \gamma}{R^2 - 1} + \frac{C_3}{2} \right). \quad (13)$$

Примеры построения квази решений по формуле (13) показаны на рис. 4 и 5 сплошными кривыми 2.

### Заключение

Сравнение результатов построения квази решения по формулам (13) с полученными ранее по «формальному» способу (штриховые кривые 1 на рис. 4 и 5) показали, что при больших значениях  $t'$  оба способа построения квази решения

дают близкие результаты. В случае же густых решеток (малые  $t'$ ) явное предпочтение следует отдать второму способу, так как он дает меньшее искажение исходного распределения скорости и, как следствие, позволяет найти физически реальный контур профиля.

Описанные квазирешения получены без учета требования однолиственности области течения. Это объясняется тем, что введение дополнительного нелинейного условия простоты контура профиля (условия однолиственности) значительно усложняет задачу минимизации функционала (8) и не позволяет выписать ее решение в аналитическом виде, удобном для численной реализации. Поэтому квазирешения, обеспечивающие условие однолиственности, а также вопросы, связанные с изучением свойства однолиственности решений ОКЗА для решетчатых областей, являются объектом дальнейших исследований.

### Литература

1. *Викторов Г.В.* Гидродинамическая теория решеток. – М.: Высш. шк., 1969. – 368 с.
2. *Гостелову Дж.* Аэродинамика решеток турбомашин. – М.: Мир, 1987. – 392 с.
3. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНТИ, 1989. – Т. 23. – С. 3–115.
4. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. – М.: Наука, 1994. – 436 с.
5. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
6. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамическая теория решеток // Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. – М.: Наука, 1970. – С. 103–152.
7. *Костычев Г.И.* О построении решеток по заданному распределению скорости // Труды Казан. авиац. ин-та. – 1958. – № 33–34. – С. 7–18.
8. *Ильинский Н.Б., Поташев А.В., Тяюрская Г.Р.* Построение прямой однорядной решетки профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – № 3. – С. 35–38.
9. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б.* Метод квазирешений в обратной краевой задаче гидроаэродинамики // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 10. – С. 50–59.
10. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Квазирешения обратной краевой задачи гидроаэродинамики // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 284, № 2. – С. 319–322.
11. *Иваньшин П.Н.* О квазирешениях обратной краевой задачи аэрогидромеханики // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 5. – С. 13–24.
12. *Иваньшин П.Н.* Методы построения квазирешений обратной краевой задачи аэрогидромеханики // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2014. – № 3. – С. 29–32.
13. *Вячкилев О.А., Ильинский Н.Б., Исмагилова Г.Р., Поташев А.В., Поташева Е.В.* Обратная краевая задача для решетки профилей, расположенной на осесимметричной поверхности тока в слое переменной толщины // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1996. – № 11. – С. 134–142.
14. *Субботович В.П.* Проектирование профилей рабочей решетки газовой турбины с помощью обратной задачи // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. – 2013. – Т. 1, № 8. – С. 25–29.



15. *Кочин Н.Е.* Гидродинамическая теория решеток. – М.-Л.: Изд-во техн.-теор. лит., 1949. – 103 с.

Поступила в редакцию  
12.05.16

---

**Елизаров Александр Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: *amelizarov@gmail.com*

**Поташев Андрей Валерьевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры естественных дисциплин, сервиса и туризма

Казанский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации  
ул. Николая Ершова, д. 58, г. Казань, 420081, Россия  
E-mail: *pot\_andrey@mail.ru*

**Поташева Елена Владимировна**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры естественных дисциплин, сервиса и туризма

Казанский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации  
ул. Николая Ершова, д. 58, г. Казань, 420081, Россия  
E-mail: *e.v.potashева@rucoop.ru*

---

ISSN 1815-6088 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 4, pp. 500–510

---

### Quasisolutions of Inverse Boundary-Value Problem of Aerodynamics for Dense Airfoil Grids

*A.M. Elizarov<sup>a\*</sup>, A.V. Potashev<sup>b\*\*</sup>, E.V. Potasheva<sup>b\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

<sup>b</sup>*Kazan Cooperative Institute, Branch of Russian University of Cooperation, Kazan, 420081 Russia*

E-mail: *\*amelizarov@gmail.com, \*\*pot\_andrey@mail.ru, \*\*\*e.v.potashева@rucoop.ru*

Received May 12, 2016

#### Abstract

In the process of turbomachinery development, it is of great importance to accurately design impellers and select their blade shape. One of the promising approaches to solving this problem is based on the theory of inverse boundary-value problems in aerodynamics. It helps to develop methods for profiling airfoil grids with predetermined properties in the same way as it is done for isolated airfoils. In this paper, methods have been worked out to find quasisolutions of the inverse boundary-value problem in aerodynamics for a plane airfoil grid. Two methods of quasisolution have been described.

The first “formal” method is similar, in its essence, to the method used for construction of quasisolution for an isolated airfoil. It has been shown that such quasisolutions provide

satisfactory results for grids having a sufficiently large relative airfoil pitch. If pitch values are low, this method is unacceptable, because “modified” velocity distribution in some areas is significantly different from the original one in this case. For this reason, areas with significant changes in the angle of the tangent line appear in the airfoil contour and the flow region becomes multivalent.

To satisfy the conditions of solvability in the case of grids having a small airfoil pitch, a new quasisolution construction method taking into account the specifics of the problem has been suggested. The desired effect has been achieved due to changes in the weighting function of the minimized functional. The comparison of the results of construction of the new quasisolution with the results obtained by the “formal” method has demonstrated that the constructed airfoils are very similar when the pitch is large. In the case of dense grids, it is clear that preference should be given to the second method, as it brings less distortion to the initial velocity distribution and, thus, allows to physically find an actual airfoil contour.

**Keywords:** inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics, airfoil grids, quasisolution

### Figure Captions

Fig. 1. To the problem statement.

Fig. 2. The domain  $G_w$  in the plane of the complex potential and the domain  $G_\zeta$  in the auxiliary plane.

Fig. 3. The solution of the inverse problem for different grid pitch values  $t'$ .

Fig. 4. An example of constructing quasisolutions for  $t' = 1$ .

Fig. 5. An example of constructing quasisolutions for  $t' = 0.35$ .

### References

1. Viktorov G.V. Hydrodynamic Theory of Grids. Moscow, Vyssh. Shk., 1969. 368 p. (In Russian)
2. Gostelov J. The Aerodynamics of Turbomachine Grids. Moscow, Mir, 1987. 392 p. (In Russian)
3. Elizarov A.M., Il'inskiy N.B., Potashev A.V. Advances in Science and Technology. Mechanics of Fluids and Gases. *Obratnye kraevye zadachi aerogidrodinamiki* [Inverse Boundary-Value Problems of Aerohydrodynamics]. Vol. 23. Moscow, VINITI, 1989, pp. 3–115. (In Russian)
4. Elizarov A.M., Il'inskiy N.B., Potashev A.V. Inverse Boundary-Value Problems of Aerohydrodynamics: Theory and Methods to Design and Improve Wing Profiles. Moscow, Nauka, 1994. 436 p. (In Russian)
5. Stepanov G.Yu. Hydrodynamics of Turbomachine Grids. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 512 p. (In Russian)
6. Stepanov G.Yu. Mechanics in the USSR over 50 Years. Vol. 2. *Gidrodinamicheskaya teoriya reshetok* [Hydrodynamical Theory Of Grids]. Moscow, Nauka, 1970, pp. 103–152. (In Russian)
7. Kostychev G.I. On construction of grids in the defined velocity profile. *Tr. Kazan. Aviats. Inst.*, 1958, nos. 33–34, pp. 7–18. (In Russian)
8. Il'inskiy N.B., Potashev A.V., Tayurskaya A.V. Construction of a direct homogenous grid of profiles by the method of quasisolutions of inverse boundary-value problems. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 1989, no. 3, pp. 35–38. (In Russian)
9. Elizarov A.M., Il'inskiy N.B. Method of quasisolutions in the inverse boundary-value problem of hydroaerodynamics. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1984, no. 10, pp. 50–59. (In Russian)
10. Elizarov A.M., Il'inskiy N.B. Quasisolutions of the inverse boundary-value problem of hydroaerodynamics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985, vol. 284, no. 2, pp. 319–322. (In Russian)
11. Ivan'shin P.N. Quasisolutions of one inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 5, pp. 9–19. doi: 10.3103/S1066369X13050022.
12. Ivan'shin P.N. Methods of constructing quasisolutions in inverse boundary-value aerohydrodynamics problems. *Russ. Aeronaut.*, 2014, vol. 57, no. 3, pp. 253–259. doi: 10.3103/S1068799814030064.
13. Vyachkilev O.A., Il'inskiy N.B., Ismagilova G.R., Potashev A.V., Potasheva E.V. The inverse boundary value problem for a turbine cascade situated on an axisymmetric stream surface in a layer of variable thickness. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1996, no. 36, no. 11, pp. 1599–1606.

14. Subbotovich V.P. Design of the profiles of operating gas turbine grid using inverse problem. *Vost.-Evr. Zh. Peredovyykh Tekhnol.*, 2013, vol. 1, no. 8, pp. 25–29. (In Russian)
15. Kochin N.E. Hydrodynamic Theory of Grids. Moscow, Leningrad, Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1949. 103 p. (In Russian)

---

*Для цитирования:* Елизаров А.М., Поташев А.В., Поташева Е.В. Квазирешения обратной краевой задачи аэрогидродинамики для густых гидродинамических решеток профилей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 500–510.

**For citation:** Elizarov A.M., Potashev A.V., Potasheva E.V. Quasisolutions of inverse boundary-value problem of aerodynamics for dense airfoil grids. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 500–510. (In Russian)