УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 3 Физико-математические науки *2006*

УДК 517.958:537.8

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМ УЧАСТКОМ ГРАНИЦЫ

Е.К. Липачёв

Аннотация

Исследованы краевые задачи, моделирующие рассеяние волн областью с неровной границей. Предполагается, что область совпадает с полуплоскостью, за исключением конечного участка границы, который называется неровным и описывается кусочно-гладкой функцией, причем точки нарушения гладкости имеют особенности типа рёбер. Доказаны теоремы существования и единственности решения краевых задач. Получены интегральные уравнения второго рода и доказана эквивалентность этих уравнений поставленным краевым задачам. Предложен алгоритм приближенного решения задач рассеяния, основанный на методе сплайн-подобластей решения интегральных уравнений. Проведено обоснование алгоритма приближенного решения краевых задач.

Введение

В работе исследуется задача нахождения электромагнитного поля, возникающего в результате рассеяния плоской поляризованной электромагнитной волны полуплоскостью с конечным включением на границе. Допускается наличие конечного числа точек нарушения гладкости. Предполагаем, что точки нарушения гладкости являются рёбрами. Отметим, что это один из случаев в классификации особых точек (см., например, [1, 2]). Задача дифракции сформулирована в виде краевой задачи для уравнения Гельмгольца с граничными условиями типа Дирихле или Неймана, условием на ребре в точках нарушения гладкости и условиями излучения на бесконечности.

На основе исследований для гладкого случая [3–5], доказано существование и единственность обобщенных по Винеру решений краевых задач. Показано, что полученные решения являются классическими. Решения представлены в виде обобщенных потенциалов и доказана теорема эквивалентности краевых задач интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. К гладкому случаю, в данном случае, относятся краевые задачи на областях, граница которых принадлежит классу C^2 или $C^{(1,\nu)}$, $\nu \in (0,1]$.

На основе метода сплайн-подобластей решения интегральных уравнений построен алгоритм приближённого решения краевой задачи. Обоснование вычислительной схемы проведено по методике работы [6].

1. Постановка краевых задач

Обозначим через Ω область плоскости $\mathbb{R}^2$, определяемую соотношением

$$\Omega = \{(x,z) : z > \Phi(x), -\infty < x < \infty\},$$

где $\Phi(x)$ – кусочно-гладкая функция. Множество точек нарушения гладкости обозначим через $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j=1}^m$. Предполагаем, что граница области является неровной (см., например, [3–5, 7]). Это означает, что только на конечном участке граница отличается от прямой. Таким образом, существует вещественное число $d > 0$ такое, что $\operatorname{supp} \Phi \subset [-d, d]$, и неровный участок границы можно записать как

$$\gamma^* = \{(x, \Phi(x)) : x \in [-d, d]\},$$

а границу области Ω представить в виде

$$\partial\Omega = \gamma^* \cup \{(x, 0) : x \notin [-d, d]\},$$

при этом $\mathcal{Q} \subset \gamma^*$.

Заметим, что структуры с рассматриваемой здесь геометрией включают в себя широкий класс дифракционных решёток (см., например, [7–10]).

Обозначим через $\mathbf{n}_P$ вектор единичной нормали в точке P границы, а через $\partial/\partial\mathbf{n}_P$ – правильную нормальную производную в точке P (см., например, [11]). Эта производная определена на всей границе, за исключением точек из $\mathcal{Q}$.

Сформулируем задачу рассеяния в следующем виде. Необходимо найти функцию $u(x, z)$ такую, что

$$\triangle u(x, z) + k^2 u(x, z) = 0, \qquad (x, z) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x, z) = f_1(x), \quad (x, z) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{Q} \tag{2}$$

(задача Дирихле) или

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial \mathbf{n}_P} = f_2(x), \quad P = (x, z) \in \partial\Omega \setminus \mathcal{Q} \tag{3}$$

(задача Неймана), где $\triangle$ – оператор Лапласа.

Предполагаем, что в точках нарушения гладкости $Q \in \mathcal{Q}$ функция $u(x, z)$ удовлетворяет условию на ребре (см., например, [12–14]):

$$\lim_{\rho\to 0} \operatorname{Im} \int\limits_{C_\rho \cap \Omega} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}}\, d\ell = 0, \tag{4}$$

где C_ρ – окружность радиуса ρ с центром в точке Q.

Кроме того, требуем выполнения условий излучения

$$u^* = e^{ikr} O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \frac{\partial u^*}{\partial r} - iku^* = e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty, \tag{5}$$

где $u^*(x, z) = u(x, z) - \widetilde{u}(x, z)$. Через $\widetilde{u}(x, z)$ обозначено решение краевой задачи для полуплоскости [15].

Задача дифракции плоской TE-поляризованной электромагнитной волны

$$e^{ik(\alpha x - \beta z)} \cdot e^{-i\omega t}, \quad \alpha = \cos\theta, \quad \beta = \sin\theta,$$

имеющей частоту ω и падающей под углом θ, соответствует краевой задаче (1)–(5) с краевым условием (2), в котором

$$f_1(x) = -u_0\,(x, \Phi(x)), \quad x \in [-d, d].$$

Случаю TM-поляризованной волны отвечает краевая задача (1)–(5) с условием (3), в котором

$$f_2(x) = -\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}_P}(x, \Phi(x)), \quad x \in [-d, d].$$

Здесь $u_0(x,z) = e^{ik(\alpha x - \beta z)}$, $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$, где ε_0 – электрическая, а μ_0 – магнитная проницаемости среды. Решение вспомогательной краевой задачи на полуплоскости имеет вид

$$\widetilde{u}(x,z) = \begin{cases} -e^{ik(\alpha x + \beta z)} & \text{в случае } TE\text{-поляризации,} \\ e^{ik(\alpha x + \beta z)} & \text{в случае } TM\text{-поляризации.} \end{cases}$$

Определение 1. Классическим решением краевой задачи (1)–(5) назовем функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega \setminus \Omega_\delta}\right)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению Гельмгольца, одному из граничных условий (2) или (3), условию излучения (5) и условию на ребре (4) в точках нарушения гладкости. Здесь через Ω_δ обозначено объединение произвольно малых δ-окрестностей точек $Q_j \in \mathcal{Q}$, $j = 1, \ldots, m$.

Вместо термина «классическое решение» в кусочно-гладком случае используется также термин «квазиклассическое решение» (см., например, [16, с. 39]).

2. Единственность решения

Доказательство единственности решения краевой задачи (1)–(5) основано на аппроксимации области с кусочно-гладкой границей последовательностью областей с границами из класса C^2. Этот подход является аналогом известного метода выметания (см., например, [18, с. 107]).

Определение 2. (см., например, [1, с. 47]). Пусть S_j – последовательность областей с гладкими границами, которая аппроксимирует область Ω, причем $S_j \subset S_{j+1} \subset \Omega$. Обозначим через $F_m \in C(\overline{\Omega})$ продолжение функции f_m, то есть $F_m|_{\partial\Omega} = f_m$, $m = 1, 2$. Пусть краевая задача (1)–(5) разрешима в областях S_j, то есть существует решение u_j уравнения (1), удовлетворяющее условию излучения (5), граничному условию $u_j|_{\partial S_j} = F_1|_{\partial S_j}$ в случае задачи Дирихле и $\left.\dfrac{\partial u_j}{\partial \mathbf{n}_P}\right|_{\partial S_j} = F_2|_{\partial S_j}$ в случае задачи Неймана. Обобщенным по Винеру решением краевой задачи (1)–(5) назовем функцию

$$u(P) = \lim_{j\to\infty} u_j(P), \quad P \in \Omega,$$

если такой предел существует и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности областей и от способа построения функций F_1 и F_2.

Рассмотрим последовательность аппроксимирующих областей

$$\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega.$$

Предполагаем, что $\gamma_j = \partial\Omega_j \in C^2$, и, кроме того, $\partial\Omega \setminus \gamma^* \subset \bigcap \partial\Omega_j$, то есть за пределами неровного участка аппроксимирующие области имеют общую границу. Обозначим через $\Phi_j(x)$ функции, определяющие границы областей Ω_j, то есть $\partial\Omega_j = \{(x, \Phi_j(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим также ограниченные области $\Omega_{j,R}$, определённые для $j \in \mathbb{N}$ и вещественных $R > d$:

$$\Omega_{j,R} = \{(x,z) : x^2 + z^2 < R^2, z > \Phi_j(x)\}.$$

Лемма 1. *Если функция* $u \in L_2(\Omega)$ *является решением краевой задачи* (1)–(5) *и* $\operatorname{Im} k \geq 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$, *то*

$$\int\limits_{\partial\Sigma_R} u(P)\frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial \mathbf{n}_P}\, ds_P \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Здесь через $\partial\Sigma_R$ *обозначен лежащий в* Ω *участок окружности радиуса* R *с центром в начале координат.*

Доказательство. Для фиксированных вещественного числа $R > d$ и натурального j рассмотрим область $\Omega_{j,R}$. Поскольку $C^\infty(\Omega_{j,R})$ плотно в $L_2(\Omega_{j,R})$, можем рассматривать функцию u из $L_2(\Omega_{j,R})$ как класс эквивалентности, и пусть $\{u_\ell\}$ – представитель класса u. Применим к функциям $u_\ell(x,z)$ и $\bar{u}_\ell(x,z)$ вторую формулу Грина в области $\Omega_{j,R}$:

$$\iint\limits_{\Omega_{j,R}} (u_\ell \triangle \bar{u}_\ell - \bar{u}_\ell \triangle u_\ell)\, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega_{j,R}} \left(u_\ell \frac{\partial \bar{u}_\ell}{\partial \mathbf{n}_P} - \bar{u}_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial \mathbf{n}_P} \right) ds_P.$$

Переходя к пределу при $\ell \to \infty$, получим формулу Грина для функций u и $\bar{u}$:

$$\iint\limits_{\Omega_{j,R}} (u \triangle \bar{u} - \bar{u} \triangle u)\, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega_{j,R}} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}_P} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_P} \right) ds_P. \tag{6}$$

Интегралы в данном случае понимаются в смысле Лебега.

Поскольку $\triangle \bar{u} = -\bar{k}^2 \bar{u}$ и $\triangle u = -k^2 u$, интеграл в левой части (6) равен

$$i(4\operatorname{Re} k \cdot \operatorname{Im} k) \iint\limits_{\Omega_{j,R}} u\bar{u}\, d\sigma.$$

Интеграл в правой части (6) запишем как сумму интегралов по участку границы $\partial\Omega_j \cap \Sigma_R$ и по $\partial\Sigma_R$, где

$$\Sigma_R = \left\{ (x,z) : x^2 + z^2 < R^2 \right\} \cap \overline{\Omega}.$$

Из граничных условий следует, что интеграл по участку границы $\partial\Omega_j \cap \Sigma_R$ в пределе по $j \to \infty$ стремится к нулю. Из условий излучения получаем, что интеграл по $\partial\Sigma_R$ равен

$$-2i\operatorname{Re} k \int\limits_{\partial\Sigma_R} |u|^2\, ds_P + o\left(\frac{1}{R}\right) R.$$

Таким образом, в соотношении (6) в пределе при $R \to \infty$ получаем

$$i(4\operatorname{Re} k \cdot \operatorname{Im} k) \iint\limits_{\Omega_R} |u|^2\, d\sigma + i(2\operatorname{Re} k) \int\limits_{\partial\Sigma_R} |u|^2\, ds \to 0.$$

По условиям леммы $\operatorname{Re} k \neq 0$, $\operatorname{Im} k > 0$, поэтому оба члена в последнем соотношении положительны, и следовательно, в пределе при $R \to \infty$ каждый из них стремится к 0.

Из условий излучения для функций u и $\bar{u}$ получаем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -i\bar{k}\bar{u} + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) e^{-i\bar{k}r}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = iku + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) e^{ikr}.$$

Поэтому при достаточно больших R интеграл

$$J = \int\limits_{\partial\Sigma_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mathbf{n}_P}\, ds_P = \int\limits_{\partial\Sigma_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\, ds_P$$

равен

$$J = -i\bar{k} \int\limits_{\partial\Sigma_R} |u|^2 ds_P + e^{-i\bar{k}R}\, o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \int\limits_{\partial\Sigma_R} u\, ds_P.$$

Учитывая, что при достаточно больших R

$$u = e^{ikR}\, O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right), \quad \bar{u} = e^{-i\bar{k}R}\, O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),$$

получаем

$$J = -i\bar{k} \int\limits_{\partial\Sigma_R} |u|^2\, ds_P + o\left(\frac{1}{R}\right) R.$$

Следовательно, при $R \to \infty$

$$\int\limits_{\partial\Sigma_R^+} u(P) \frac{\partial \bar{u}(P)}{\partial \mathbf{n}_P}\, ds_P \to 0.$$

$\square$

Теорема 1. *При условии* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *(и дополнительно* $\operatorname{Re} k \neq 0$ *в случае задачи Неймана) краевые задачи* (1) – (5) *могут иметь не более одного решения в классе квадратично-суммируемых в смысле Лебега функций.*

Доказательство. Предположим противное, что существуют два решения $v_1(x,z)$ и $v_2(x,z)$ краевой задачи (1)–(5), принадлежащих пространству $L_2(\Omega)$. Пусть $u(x,z) = v_1(x,z) - v_2(x,z)$, $(x,z) \in \Omega$.

Рассмотрим функции $u_j(x,z)$, определённые в областях Ω_j, $j = 1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$u_j(x,z) = \begin{cases} u(x,z), & (x,z) \in \Omega_j \cup (\partial\Omega_j \cap \partial\Omega), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то есть значения функции $u_j(x,z)$ совпадают со значениями функции $u(x,z)$ в области Ω_j и на общих участках границ $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_j$, а на оставшейся части границы доопределены нулём. Очевидно, что $u_j \in L_2(\Omega)$.

Поскольку $C^\infty(\Omega_{j,R})$ плотно в $L_2(\Omega_{j,R})$, то существует последовательность непрерывных функций $\{u_{j,\ell}\}_{\ell=1}^\infty$, сходящихся к u_j по норме пространства $L_2(\Omega_{j,R})$.

Для фиксированных целого j и $R > d$ применим в области $\Omega_{j,R}$ первую формулу Грина к функциям $u_{j,\ell}$ и $\overline{u}_{j,\ell}$ и перейдем к пределу при $\ell \to \infty$, в результате получим

$$\int\limits_{\Omega_{j,R}} u_j \Delta \overline{u}_j\, d\sigma + \int\limits_{\Omega_{j,R}} |\nabla u_j|^2\, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega_{j,R}} u_j \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial \mathbf{n}_P}\, ds_P. \tag{7}$$

Интеграл в правой части (7) представим в виде суммы интегралов по составляющим границы $\partial\Omega_{j,R} = \partial\Omega_j \cup \partial\Sigma_R$. Согласно определению функций $u_j(x,z)$, справедливо утверждение леммы 1 (поскольку в области Ω функция $u_j(x,z)$ совпадает с $u(x,z)$, удовлетворяет на границе $\partial\Omega_j$ условию Дирихле или Неймана, а на бесконечности – условиям излучения), поэтому в пределе при $R\to\infty$ формула (7) переходит в

$$\int\limits_{\Omega_j} u_j \Delta \overline{u}_j \, d\sigma + \int\limits_{\Omega_j} |\nabla u_j|^2 \, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega_j} u_j \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial \mathbf{n}_P} \, ds_P. \tag{8}$$

В силу граничных условий правая часть формулы (8) равна нулю. Следовательно, $u_j(x,z)=0$ при $(x,z)\in\Omega_j$. В пределе при $j\to\infty$ приходим к равенству $u(x,z)=0$ для $(x,z)\in\Omega$. Таким образом, решение краевой задачи единственно. $\square$

3. Существование решения

Выберем последовательность областей Ω_j $(j=1,2,\ldots)$, аппроксимирующих область Ω и обладающих свойствами:

$$\ldots\subset\Omega_j\subset\Omega_{j+1}\subset\ldots\subset\Omega, \quad \partial\Omega_j\in C^2. \tag{9}$$

Как было замечено ранее, последовательность областей можно выбрать так, что

$$\partial\Omega_j\cap\partial\Omega\neq\emptyset, \quad j\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

и длина участка $\gamma_j'\equiv\partial\Omega\setminus(\partial\Omega_j\cap\partial\Omega)$ стремится к 0 при $j\to\infty$, то есть границы областей Ω_j совпадают, за исключением участка γ_j'. Более того, можем считать, что этот участок содержится в Ω_{j+1}. Будем обозначать через $\widetilde{\gamma}_j$ участок границы $\partial\Omega_j$, лежащий в $\overline{\Omega}$, то есть $\widetilde{\gamma}_j=\partial\Omega\cap\partial\Omega_j$, а через γ_j^* – неровный участок границы $\partial\Omega_j$.

Для каждого $j\in\mathbb{N}$ рассмотрим в области Ω_j краевую задачу

$$\triangle u(x,z)+k^2u(x,z)=0, \qquad (x,z)\in\,\Omega_j, \tag{11}$$

$$u(x,z)=f_1(x), \quad (x,z)\in\partial\Omega_j \tag{12}$$

или

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial\mathbf{n}_P}=f_2(x), \quad P=(x,z)\in\partial\Omega_j \tag{13}$$

с условиями излучения (5).

Согласно результатам о разрешимости краевых задач для уравнения Гельмгольца в гладком случае (см. [3–5]), краевая задача (11)–(13), (5) имеет единственное решение $u_j(x,z)$, принадлежащее классу $C^2(\Omega_j)\cap C\left(\overline{\Omega}_j\right)$ (в случае задачи Неймана к определению класса добавляется условие существования правильной нормальной производной на границе). В случае задачи Дирихле функция $u_j(x,z)$ представима в виде комбинации вспомогательного решения $\widetilde{u}$ для случая полуплоскости и обобщённого потенциала двойного слоя $W\left(\gamma_j^*,\psi\right)$:

$$u(M)=\widetilde{u}(M)+W\left(\gamma_j^*,\psi\right)(M), \quad M\in\Omega, \tag{14}$$

$$W\left(\gamma_j^*,\psi\right)(M)\equiv\int\limits_{\gamma_j^*}\frac{\partial G_1(M,P)}{\partial\mathbf{n}_P}\psi(\tau)\,ds_P. \tag{15}$$

Решение краевой задачи Неймана представимо в виде

$$u(M)=\widetilde{u}(M)+V\left(\gamma_j^*,\psi\right)(M), \tag{16}$$

где

$$V\left(\gamma_j^*, \psi\right)(M) \equiv \int\limits_{\gamma_j^*} G_2(M,P)\varphi(\tau)\, ds_P \tag{17}$$

есть обобщённый потенциал простого слоя. Здесь

$$G_m(M,P) = \frac{\pi i}{2}\left\{H_0^{(1)}(kr) + (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*)\right\}, \tag{18}$$

$m = 1, 2$ и $\varphi, \psi \in \dot{C}[-d, d]$. Через $H_0^{(1)}(z)$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (см., например, [17, с. 163]),

$$M = (x, z), \quad P = (\tau, \zeta), \quad r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

Плотности потенциалов определяются как решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\pi\psi(x) + \int\limits_{\gamma_j^*} \frac{\partial G_1(M,P)}{\partial \mathbf{n}_P}\psi(\tau)\, ds_P = \rho(M), \tag{19}$$

$$-\pi\varphi(x) + \int\limits_{\gamma_j^*} \frac{\partial G_2(M,P)}{\partial \mathbf{n}_M}\varphi(\tau)\, ds_P = \chi(M). \tag{20}$$

Здесь $\rho(M) = F_1(x) - \widetilde{u}(M)$, $\chi(M) = F_2(x) - \widetilde{u}(M)$, $M = (x, \Phi_j(x)) \in \gamma^*$, $P = (\tau, \Phi_j(\tau))$, $j \in \mathbb{N}$. Эти уравнения получены из теоремы о скачке значений обобщенных потенциалов (см., например, [19, 20]).

Таким образом, получаем последовательность функций $\{u_j(x,z)\}_{j=1}^{\infty}$, являющихся классическими решениями краевой задачи в областях Ω_j $(j \in \mathbb{N})$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через (Ω_j, u_j) пару, состоящую из области Ω_j и функции $u_j(x,z)$, являющейся решением одной из краевых задач (1)–(5) в области Ω_j, $j \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь пары (Ω_j, u_j) и (Ω_{j+1}, u_{j+1}) для некоторого фиксированного номера j. Согласно определению аппроксимирующей последовательности областей имеем

$$\Omega_j \subset \Omega_{j+1}, \quad \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1} \subset \partial\Omega, \quad \gamma_j' \equiv \partial\Omega_j \setminus (\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1}) \subset \Omega_{j+1}. \tag{21}$$

На общем участке границы областей Ω_j и Ω_{j+1} выполнено условие

$$u_j|_{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1}} = u_{j+1}|_{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1}}. \tag{22}$$

На участке γ_j' функция u_{j+1}, в силу (21), определена и непрерывна (как решение краевой задачи в области Ω_{j+1}). Рассмотрим теперь в области Ω_j краевую задачу, состоящую из уравнения

$$\triangle u + k^2 u = 0, \tag{23}$$

граничного условия

$$u|_{\partial\Omega_j} = u_{j+1}|_{\partial\Omega_j} \tag{24}$$

и условия излучения на бесконечности вида (5).

Приведённая краевая задача, вследствие результатов для случая гладкой границы, имеет единственное классическое решение. Обозначим решение этой краевой задачи через $\dot{u}_j(x,z)$. Таким образом, исходя из последовательности пар $\{(\Omega_j, u_j)\}_1^{\infty}$, получим последовательность функций $\{\dot{u}_j(x,z)\}_1^{\infty}$.

Заметим, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ функция $u_{j+1}|_{\Omega_j}$ также удовлетворяет условиям краевой задачи (23), (24) с условиями излучения (5). В силу единственности решения этой краевой задачи заключаем, что

$$\dot{u}_j(x,z) = u_{j+1}(x,z), \quad (x,z) \in \Omega_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Как следствие последнего соотношения, получаем при $k \le j$, $j,k \in \mathbb{N}$:

$$\dot{u}_k(x,z) = u_{j+1}(x,z), \quad (x,z) \in \Omega_k, \tag{26}$$

то есть

$$\dot{u}_k \equiv u_{j+1}|_{\Omega_k} \quad \text{при } k \le j.$$

Рассмотрим теперь отрезок последовательности

$$\{\dot{u}_1(x,z), \ldots, \dot{u}_j(x,z), \dot{u}_{j+1}(x,z)\}$$

при фиксированном $j \in \mathbb{N}$. Заменим функцию $\dot{u}_j(x,z)$ на решение той же краевой задачи, но с граничным условием вида

$$u|_{\partial\Omega_j} = \dot{u}_{j+1}|_{\partial\Omega_j}. \tag{27}$$

Полученное решение, по-прежнему, будем обозначать через $\dot{u}_j(x,z)$. Точно так же поступим с функцией $\dot{u}_{j-1}(x,z)$, и далее, вплоть до начала отрезка. Из соотношения (26) следует, что

$$\dot{u}_k \equiv \dot{u}_j|_{\Omega_k}, \quad k < j, \quad k,j \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Полученные утверждения сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 2. *Последовательность* $\{\dot{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *обладает следующими свойствами:*
1) $\dot{u}_k(x,z) = \dot{u}_j(x,z), \quad (x,z) \in \Omega_k, \quad k < j, \quad k,j \in \mathbb{N}$;
2) $\dot{u}_j|_{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1}} = \dot{u}_{j+1}|_{\partial\Omega_j \cap \partial\Omega_{j+1}}, \quad j \in \mathbb{N}$.

Из утверждений об эквивалентности интегральных уравнений и краевых задач дифракции в гладких областях (см. [3–5]) следует, что каждая функция $\dot{u}_j(x,z)$ $(j \in \mathbb{N})$ представима в виде

$$\dot{u}_j = \widetilde{u} + W\left(\gamma_j^*, \dot{\varphi}_j\right) \tag{29}$$

в случае краевой задачи Дирихле или

$$\dot{u}_j = \widetilde{u} + V\left(\gamma_j^*, \dot{\varphi}_j\right) \tag{30}$$

в случае краевой задачи Неймана. Плотности $\dot{\varphi}_j(x)$ $(j \in \mathbb{N})$ обобщённых потенциалов (15) и (17) получены как решения интегральных уравнений (19) и (20), при этом функция $f(x)$, определяющая неровный участок границы $\partial\Omega$, заменена на функцию $f_j(x)$, определяющую неровный участок границы $\partial\Omega_j$ $(j \in \mathbb{N})$.

Таким образом, наряду с последовательностью пар $\{(\Omega_j, \dot{u}_j)\}$ имеем последовательность функций $\{\dot{\varphi}_j(x)\}$.

Теорема 2. *При условии* $\operatorname{Im} k \ge 0$ *последовательность* $\{\psi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ *решений интегральных уравнений* (19) *сходится в пространстве* $L_2[-d,d]$ *к функции* $\psi(x)$ *такой, что функция*

$$u = \widetilde{u} + W\left(\gamma^*, \psi\right) \tag{31}$$

является решением краевой задачи (1)–(5) *с условием Дирихле на границе.*

Теорема 3. *При условиях* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $\operatorname{Re} k \neq 0$ *последовательность* $\{\varphi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ *решений интегральных уравнений* (20) *сходится в пространстве* $L_2[-d,d]$ *к функции* $\varphi(x)$, *такой, что потенциал*

$$u = \widetilde{u} + V\left(\gamma^*, \varphi\right) \tag{32}$$

является решением краевой задачи (1)–(5) *с условием Неймана на границе.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $\{\dot{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, построенную по указанной ранее схеме. Каждая из функций $\dot{u}_j(x,z)$ этой последовательности является решением краевой задачи дифракции в области с достаточно гладкой границей и, следовательно, как показано ранее, представима в виде обобщённого потенциала, вычисленного по формулам (29) или (30) в зависимости от поляризации задачи.

Покажем, что предел последовательности функций $\{\dot{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ существует и является решением краевой задачи (1)–(5).

Пусть i, j – натуральные числа, $k = \min\{i,j\}$ и $R > d$ – вещественное число. Рассмотрим в области Σ_R функции $\dot{u}_i(x,z)$ и $\dot{u}_j(x,z)$. Согласно лемме 2 имеем

$$\dot{u}_i(x,z) = \dot{u}_j(x,z) \quad \text{при } (x,z) \in \Omega_k. \tag{33}$$

Пусть для определённости $i > j$, тогда

$$\left.(\dot{u}_i - \dot{u}_j)\right|_{\Omega_i} = \left.(\dot{u}_i - \dot{u}_j)\right|_{\Omega_{i,R}} = U\left(\partial\Omega_{j,R}, \varphi_j\right) - U\left(\partial\Omega_{i,R}, \varphi_i\right), \tag{34}$$

где

$$U\left(\partial\Omega_{j,R}, \varphi_j\right) = W\left(\partial\Omega_{j,R}, \varphi_j\right)$$

в случае задачи Дирихле или

$$U\left(\partial\Omega_{j,R}, \varphi_j\right) = V\left(\partial\Omega_{j,R}, \varphi_j\right)$$

в случае задачи Неймана.

Из соотношения (34) получаем

$$\left.(\dot{u}_i - \dot{u}_j)\right|_{\Omega_i} = U\left(\partial\Omega_{i,R}, \varphi_j\right) - U\left(\partial\Omega_{i,R}, \varphi_i\right) + U\left(\partial\Omega_i \backslash \partial\Omega_j, \varphi_i\right),$$

откуда приходим к равенству

$$U\left(\partial\Omega_{i,R}, \varphi_i - \varphi_j\right) = \left.(u_i - u_j)\right|_{\Omega_i} + U\left(\partial\Omega_i \backslash \partial\Omega_j, \varphi_i\right). \tag{35}$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (35) равно нулю согласно (33), а второе слагаемое стремится к 0 при $j \to \infty$ в силу того, что $\Omega_{j,R} \to \Sigma_R$ и $\partial\Omega_{j,R} \to \partial\Sigma_R$ при $j \to \infty$. Таким образом, последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ фундаментальна.

В пространстве $L_2\left(\partial\Sigma_R\right)$ существует предел этой последовательности функций, который обозначим через

$$\varphi^* = \lim_{j\to\infty} \varphi_j.$$

Рассмотрим функцию

$$u^* = \widetilde{u} + U\left(\partial\Sigma_R, \varphi^*\right). \tag{36}$$

Поскольку функция u^* является обобщённым потенциалом, она удовлетворяет уравнению Гельмгольца, и для неё выполнены условия излучения на бесконечности.

Выполнение условия на ребре в точках множества $\mathcal{Q}$ следует из соотношения

$$U\left(\cup C_{\delta,j},\varphi^*\right) = U\left(\partial\Omega_{j,R},\varphi^*\right) - U\left(\partial\Sigma_R,\varphi^*\right)$$

и из того, что $\Omega_{j,R} \to \Sigma_R$ при $j \to \infty$.

Таким образом, найдено ненулевое решение краевой задачи (1)–(5), причём решение представимо в виде, указанном в формулировке теоремы. □

Теорема 4. *Функции $u(x,z)$, заданные соотношениями* (31) *и* (32)*, являются обобщенными по Винеру решениями краевой задачи* (1)–(5) *при условиях Дирихле и Неймана соответственно.*

Доказательство. Пусть S_j – последовательность областей с гладкими границами, аппроксимирующая область Ω и $S_j \subset S_{j+1} \subset \Omega$. Обозначим через ϕ_j функцию, характеризующую границу области S_j, то есть $\partial S_j = \{(x,\phi_j(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. Определим для каждого $j \in \mathbb{N}$ область $\Omega_j = \{(x,\Phi_j(x))\}$, где $\Phi_j(x) = \phi_j(x)$ при $x \in [-d,d]$ и $\Phi_j(x) = 0$ при $x \notin [-d,d]$. По построению имеем $S_j \subset \Omega_j$, $j \in \mathbb{N}$. Краевые задачи в областях S_j и Ω_j имеют единственные решения, и, как следует из рассуждений, аналогичных проведённым при доказательстве леммы 2, решение краевой задачи в области S_j является ограничением решения соответствующей краевой задачи в области Ω_j. Это означает, что пределы (31) и (32) не зависят от выбора аппроксимирующих областей. □

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ запишем интегральные уравнения (19), (20) в едином виде

$$\varphi_j(x) + \int\limits_{\gamma^*} K_j(x,\tau)\varphi_j(\tau)\,ds_P = y(x), \quad -d < x < d. \tag{37}$$

Из теорем 1–3 и теоремы об уравнениях с близкими ядрами (см. [21, с. 157]) следует

Теорема 5. *Существует последовательность $\{\widetilde{\varphi}_j(x)\}$ решений интегрального уравнения* (37)*, которая сходится в пространстве $L_2[-d,d]$ к такой функции $\varphi(x)$, что обобщённый потенциал двойного слоя (в случае задачи Дирихле) или обобщённый потенциал простого слоя (в случае задачи Неймана) с плотностью $\varphi(x)$ является решением краевой задачи дифракции* (1)–(5)*. При этом функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\varphi(x) + \int\limits_{\gamma^*} K(x,\tau)\varphi(\tau)\,ds_P = y(x), \tag{38}$$

где $P = (\tau,\Phi(\tau))$, $M = (x,\Phi(x))$, ядро вычислено по формулам

$$\begin{aligned}
K(x,\tau) &= \frac{1}{\pi}\frac{\partial G_1(M,P)}{\partial \mathbf{n}_P} \quad \textit{в } TE\textit{-случае},\\
K(x,\tau) &= -\frac{1}{\pi}\frac{\partial G_2(M,P)}{\partial \mathbf{n}_M} \quad \textit{в } TM\textit{-случае},\\
K(x,\tau) &= 0, \quad \textit{если } \ M \in \mathcal{Q},
\end{aligned}$$

а при совпадении аргументов значение ядра равно половине кривизны гладкого участка границы. Правая часть интегрального уравнения вычисляется по формулам

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\pi}\left[f_1(x) - \widetilde{u}\left(x,\Phi(x)\right)\right] \quad \textit{в } TE\textit{-случае},\\
y(x) &= -\frac{1}{\pi}\left[f_2(x) - \widetilde{u}\left(x,\Phi(x)\right)\right] \quad \textit{в } TM\textit{-случае}.
\end{aligned}$$

Непосредственным следствием теорем 1–5, а также свойств обобщённых потенциалов является следующее утверждение.

Теорема 6. *В условиях теоремы* 1 *решение краевой задачи* (1)–(5)*, построенное согласно схеме, указанной в формулировке теоремы* 5*, является классическим.*

4. Приближённое решение краевой задачи

Алгоритм приближенного решения краевой задачи (1)–(5) основан на методе сплайн-подобластей решения интегрального уравнения

$$\mathcal{K}\varphi \equiv \varphi(x) + \int\limits_{-d}^{d} K(x,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = y(x), \quad x \in [-d,d], \tag{39}$$

эквивалентного краевой задаче. Ядро интегрального уравнения (39) в TE-случае вычисляется с помощью соотношений

$$K(x,\tau) = \frac{ik}{2}\left[\frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}\left\{(x-\tau)\,\Phi'(\tau) + (\Phi(\tau)-\Phi(x))\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*}\left\{(\tau-x)\Phi'(x) - (\Phi(x)+\Phi(\tau))\right\}\right]. \tag{40}$$

Правая часть интегрального уравнения (39) в TE-случае вычисляется по формуле

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\left[f_1(x) - \widetilde{u}\,(x,\Phi(x))\right]. \tag{41}$$

В TM-случае ядро и правая часть интегрального уравнения (39) определяются по формулам

$$K(x,\tau) = \frac{ik}{2}\sqrt{\frac{1+(\Phi'(\tau))^2}{1+(\Phi'(x))^2}}\left[\frac{H_1^{(1)}(kr)}{r}\left\{(x-\tau)\,\Phi'(x) + (\Phi(\tau)-\Phi(x))\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{H_1^{(1)}(kr^*)}{r^*}\left\{(x-\tau)\Phi'(x) - (\Phi(x)+\Phi(\tau))\right\}\right], \tag{42}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\pi}\left[f_2(x) - \widetilde{u}\,(x,\Phi(x))\right]. \tag{43}$$

При совпадении аргументов значения ядер (40) и (42) доопределяются величиной, равной половине кривизны неровного участка границы:

$$-\frac{\Phi''(x)}{2\pi\left[1+(\Phi'(x))^2\right]},$$

и полагаются равными 0, если точка $M = (\tau, \Phi(\tau))$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}$.

В соотношениях (40) и (42) использованы обозначения

$$r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (\Phi(x)-\Phi(\tau))^2},\; r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (\Phi(x)+\Phi(\tau))^2}.$$

На отрезке $[-d,d]$ рассмотрим произвольную сетку узлов

$$\Delta_n : -d \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant d, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{44}$$

удовлетворяющую условию

$$\delta_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j - x_{j-1}) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{45}$$

Приближённое решение интегрального уравнения (39) ищем в виде сплайна

$$\varphi_n^l(x) = \sum_{j=0^l}^{n} c_j s_j^l(x), \quad 0^0 = 1, \tag{46}$$

где $s_j^l(x)$ – фундаментальные сплайны степени l.

Приближённое решение в случае $l = 0$ вычисляется в виде ступенчатой функции

$$\varphi_n^0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j s_j^0(x), \tag{47}$$

где

$$s_1^0(x) = \begin{cases} 1, & -d \leqslant x \leqslant x_1, \\ 0, & x_1 < x \leq d, \end{cases}$$

$$s_j^0(x) = \begin{cases} 1, & x_{j-1} < x \leqslant x_j, \\ 0, & x \notin (x_{j-1}, x_j), \end{cases} \quad j = 2, \ldots, n.$$

Неизвестные коэффициенты $c_j \ (j = 1, \ldots, n)$ определяем, согласно ступенчатому методу подобластей (см., например, [22]), из системы линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k = \Psi_j(y), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{48}$$

где

$$\Psi_j(y) = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} y(x)\, dx, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{49}$$

$$\alpha_{jk} = \Psi_j \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K(x, \tau)\, d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K(x, \tau)\, d\tau\, dx, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{50}$$

В случае $l = 1$ при построении приближённого решения используются фундаментальные сплайны первого порядка, определённые соотношениями

$$s_j^1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \\[2ex] \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \end{cases} \tag{51}$$

и $s_j^1(x) = 0$ при $x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Приближённое решение находим в виде полигонального сплайна

$$\varphi_n^1(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j s_j^1(x). \tag{52}$$

Неизвестные коэффициенты $c_j \quad (j = 0, \ldots, n)$ находим из условий

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left[\left(\mathcal{K}\varphi_n^1 \right)(x) - y(x) \right] dx = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{53}$$

С помощью функционалов Ψ_j условия (53) перепишем в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{c_{j-1} + c_j}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k = \Psi_j(y), \quad j = 1, \ldots, n, \quad (c_0 = c_n), \tag{54}$$

где

$$\alpha_{jk} = \Psi_j \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{a} K(x, \tau)\, d\tau \right). \tag{55}$$

Теорема 7. *В условиях теоремы* 1 *при достаточно больших* n *сплайн-функции* $\varphi_n^l(x)$, *определяемые ступенчатым и полигональным методами сплайн-подобластей, существуют, единственны и сходятся к точному решению* $\varphi^*(x)$.

Доказательство. Как было показано в предыдущих пунктах, интегральное уравнение (39) однозначно разрешимо. Для ядра уравнения (39) выполнены условия, приведенные в работе [23]. В случае ступенчатого метода подобластей воспользуемся теоремой 1 работы [23], а в случае полигонального метода подобластей – теоремой 3 из этой же работы. Следовательно, системы линейных алгебраических уравнений (48), (54) однозначно разрешимы, начиная с некоторого n. Таким образом, сплайны нулевого и первого порядка, определяемые по методу подобластей, существуют и единственны при всех n, начиная с некоторого.

Из оценок (2.12) и (3.3) работы [23] получаем следующие оценки погрешности метода подобластей:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^0\|_2 = O\left(\omega_x\left(K; \delta_n\right)_2 + \omega(y; \delta_n)_2\right) = O\left(\omega_x\left(K; \delta_n\right)_2 + \delta_n\right), \tag{56}$$

$$\|\varphi^* - \varphi_n^1\|_2 = O\left(\omega_x\left(K; \delta_n\right)_2 + \omega(y; \delta_n)_2\right) = O\left(\omega_x\left(K; \delta_n\right)_2 + \delta_n\right), \tag{57}$$

где через $\varphi^*(x)$ обозначено точное решение уравнения (39) и

$$\omega(y; \delta)_2 = \sup_{0<\eta\le\delta} \left\{ \int\limits_{-a}^{a-\eta} |y(t) - y(t+\eta)|^2 \, dt \right\}^{1/2},$$

$$\omega_x(K; \delta)_2 = \sup_{0<\eta\le\delta} \left\{ \int\limits_{-a}^{a-\eta} \int\limits_{-a}^{a} |K(x+\delta, \tau) - K(x, \tau)|^2 \, dx\, d\tau \right\}^{1/2}.$$

Из соотношений (56), (57) следует сходимость ступенчатого метода подобластей и полигонального метода подобластей. □

Summary

E.K. Lipachev. Dirichlet and Neumann boundary value problems for Helmholtz equation in unbounded domains with piecewise smooth part of boundary.

In this paper we study the boundary value problems modelling scattering waves by a domain with the rough boundary. We assume that a domain is the half plane and a finite part of boundary is characterized by a piecewise smooth function. We also assumed that singularities of boundaries are the edges. We prove the theorems of existence and uniqueness of solution of the boundary value problems. We find the integral equations of second kind and we show that these equations are equivalent to the boundary value problems. We propose the numerical algorithms for scattering problems. They are based on the spline-subdomains method for integral equations. We establish the convergence of this numerical algorithm.

Литература

1. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи матем. наук. – 1983. – Т. 38, № 2. – С. 3–76.
2. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи с кусочно–гладкой границей. – М.: Наука, 1991. – 336 с.
3. *Липачёв Е.К.* К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 4. – С. 69–72.
4. *Липачёв Е.К. О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с неровной границей* // Труды Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во КМО, 2002. – Т. 17. – С. 79–89.
5. *Липачёв Е.К.* Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в областях с неровной границей // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 9. – С. 43–49.
6. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.
7. *Басс Ф.Г., Фукс И.М.* Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
8. *Галишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 208 с.
9. *Electromagnetic Theory of Gratings.* / Ed. by R. Petit. – Berlin; Heidelberg; New York, 1980. – 284 p.
10. *Tsang L., Kong J.A., Ding K.H.* Scattering of Electromagnetic waves. Theories and Applications. – N. Y.: Wiley-Interscience, 2000. – 426 p.
11. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
12. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. – М.: Высш. шк., 1991. – 224 с.
13. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
14. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 328 с.
15. *Плещинский Н.Б.* Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. – Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – С. 153–185.

16. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции). – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

17. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.

18. *Егоров Ю.В., Шубин М.А.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории. // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. Т. 30. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. – С. 1–262.

19. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, 1987. – 311 с.

20. *Шестопалов Ю.В.* Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн // Журн. выч. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 7. – С. 1081–1092.

21. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

22. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 288 с.

23. *Агачев Ю.Р.* О сходимости метода сплайн-подобластей для интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 6. – С. 3–10.

Поступила в редакцию
09.10.06

Липачёв Евгений Константинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений Казанского государственного университета.

E-mail: *lipachev@ksu.ru*