УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 497–508 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.65 doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.497-508

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА ПРИ НАЛИЧИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

И.А. Блатов[1], *Н.А. Задорин*[2]

[1]*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, 443010, Россия*

[2]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия*

Аннотация

Исследован вопрос интерполяции функции одной переменной с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. Интерполируемая функция соответствует решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром ε при старшей производной. Проблема состоит в том, что применение к такой функции полиномиальных интерполяционных формул в случае равномерной сетки может приводить к неприемлемым погрешностям. Оценена погрешность формулы линейной интерполяции на сетке Бахвалова, сгущающейся в пограничном слое. Получена оценка погрешности второго порядка точности по числу узлов сетки, равномерная по параметру ε. Исследована классическая разностная формула для вычисления производной, использующая значение функции в двух узлах сетки Бахвалова. Получена оценка относительной погрешности, равномерная по параметру ε. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: функция одной переменной, пограничный слой, сетка Бахвалова, кусочно-линейная интерполяция, численное дифференцирование, ε-равномерная оценка погрешности

Введение

Вопрос интерполяции функций с большими градиентами в пограничном слое представляет несомненный интерес, так как применение полиномиальных интерполяционных формул на равномерной сетке может приводить к существенным погрешностям, это известно, например, из работ [1, 2]. При численном решении сингулярно возмущенных задач для достижения сходимости разностных схем, равномерной по малому параметру, широко применяется подход, основанный на сгущении сетки в области пограничного слоя. Хорошо известны сетки Н.С. Бахвалова [3] и Г.И. Шишкина [4]. Представляет интерес анализ погрешности интерполяционных формул и формул численного дифференцирования на этих сетках. Полиномиальные интерполяционные формулы и формулы численного дифференцирования на сетке Г.И. Шишкина исследовались в [5, 6], где получены оценки погрешностей, равномерные по малому параметру.

В настоящей работе мы оцениваем погрешность формулы кусочно-линейной интерполяции и полученной на ее основе разностной формулы для производной на сетке Бахвалова.

Итак, предполагаем, что для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция

$$u(x) = p(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

где
$$|p^{(j)}(x)| \le C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{2}$$
где функции $p(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$. Коэффициент α отделен от нуля, параметр ε может быть близок к нулю. В силу (2) регулярная составляющая $p(x)$ имеет производные, ограниченные до второго порядка, а производные сингулярной составляющей $\Phi(x)$ не ограничены равномерно по параметру $\varepsilon \in (0, 1]$.

В соответствии с [4, 7] декомпозиция (1) с ограничениями (2) справедлива для решения сингулярно возмущенной краевой задачи
$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A,\ u(1) = B, \tag{3}$$
где $a_1(x) \ge \alpha > 0$, $a_2(x) \ge 0$, $\varepsilon > 0$, функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – достаточно гладкие. При малых значениях ε решение задачи (3) имеет область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1).

Как показано в [2], применение многочлена Лагранжа на равномерной сетке для интерполяции функций вида (1) может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. В [8] на равномерной сетке построены и исследованы интерполяционные формулы с двумя и тремя узлами, точные на известной с точностью до множителя сингулярной составляющей. В [9] построена формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции, точная на сингулярной составляющей. Погрешность формулы из [9] оценивалась в [10]. В [5] оценена погрешность интерполяции многочленом Лагранжа на сетке Г.И. Шишкина и получены оценки погрешности порядка $O((\ln(N)/N)^k)$, равномерные по параметру ε, где k – число узлов интерполяции, N – число узлов сетки.

Всюду в работе под C и C_j подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа узлов сетки. Одной и той же постоянной C_j будем ограничивать различные величины, если это понятно по тексту.

1. Формула кусочно-линейной интерполяции на сетке Бахвалова

Рассмотрим неравномерную сетку с узлами $\{x_n\}$ интервала $[0, 1]$
$$\Omega^h = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n,\ n = 1, 2, \dots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}.$$
Используем сетку Бахвалова [3], модифицированную в ряде работ. В [1] приведен обзор сеток, применяемых при построении разностных схем для сингулярно возмущенных задач. В соответствии с [1] узлы сетки Бахвалова могут задаваться в виде $x_n = g(n/N)$, $n = 0, 1, \dots, N$, где функция $g(t)$ в области пограничного слоя $[0, \sigma]$ имеет вид
$$g(t) = -\frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln\Big[1 - \frac{t}{q}\Big], \quad r > 0, \quad q > \frac{1}{2}, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$
а на интервале $[\sigma, 1]$ функция $g(t)$ задается формулой
$$g(t) = \sigma + (2t - 1)(1 - \sigma), \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \tag{5}$$
Тогда вне области пограничного слоя сетка Ω^h является равномерной. При таком построении сетки $x_0 = 0$, $\sigma = x_{N/2}$, $x_N = 1$.

Конкретизируем формулу (4), учитывая представление функции (1). Зададим
$$g(t) = -\frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln\Big[1 - 2(1 - \varepsilon)t\Big], \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \le e^{-1}, \tag{6}$$

где r – целое, $r \geq 2$. Ограничение $r \geq 2$ потребуется ниже для оценки погрешности формулы кусочно-линейной интерполяции.

В соответствии с (6)

$$\sigma = g(1/2) = -\frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln \varepsilon. \tag{7}$$

Итак, в соответствии с соотношениями (5)–(7) зададим сетку Ω^h с узлами $x_n = g(n/N)$ при $\varepsilon \leq e^{-1}$. При таком ограничении на ε параметр σ растет с увеличением ε. При $\varepsilon > e^{-1}$ или $\sigma > 1/2$ сетку Ω^h задаем равномерной.

Пусть функция $u(x)$ вида (1) задана в узлах сетки Ω^h, $u_n = u(x_n)$. Зададим формулу линейной интерполяции на произвольном сеточном интервале $[x_{n-1}, x_n]$ в виде

$$L_2(u, x) = u_{n-1} + \frac{x - x_{n-1}}{h_n}(u_n - u_{n-1}). \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет представление* (1) *с ограничениями* (2). *Тогда для заданной сетки* Ω^h *и некоторой постоянной* C *справедлива оценка погрешности:*

$$|u(x) - L_2(u, x)| \leq \frac{C}{N^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Доказательство. Остановимся на случае $\varepsilon \leq e^{-1}$. Сначала покажем, что при всех n для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка

$$h_n \leq \frac{C_2}{N}. \tag{9}$$

Если $n > N/2$, то неравенство (9) верно, так как сетка на интервале $[\sigma, 1]$ равномерна.

Рассмотрим случай $n \leq N/2$. Учитывая, что в этом случае

$$x_n = -\frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln \Big[1 - 2(1 - \varepsilon)n/N\Big], \tag{10}$$

получаем

$$h_n = \frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln \Big[1 + \frac{2(1 - \varepsilon)/N}{1 - 2(1 - \varepsilon)n/N}\Big], \quad n = 1, 2, \ldots, N/2. \tag{11}$$

Несложно убедиться, что последовательность шагов h_n, $n = 1, 2, \ldots, N/2$, строго возрастающая. Из (11) следует

$$h_{N/2} = \frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln \Big[1 + \frac{2(1 - \varepsilon)}{N\varepsilon}\Big].$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (9).

Для погрешности формулы линейной интерполяции справедливо представление

$$L_2(u, x) - u(x) = \frac{1}{h_n} \int\limits_x^{x_n} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \int\limits_t^s u''(q)\, dq\, dt\, ds, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{12}$$

Учитывая представление (1), оценим погрешность интерполяции на функциях $p(x)$ и $\Phi(x)$.

Учитывая (2), (9), (12), для некоторой постоянной C получим

$$|p(x) - L_2(p, x)| \leq \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{13}$$

Теперь оценим погрешность интерполяции на функции $\Phi(x)$.

Остановимся на случае $n \le N/2$. Учитывая оценки (2), из (12) имеем

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le h_n \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{C_1}{\varepsilon^2} e^{-\alpha x/\varepsilon}\, dx.$$

Следовательно,

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_1}{\alpha\varepsilon} h_n \Big[e^{-\alpha x_{n-1}/\varepsilon} - e^{-\alpha x_n/\varepsilon}\Big]. \tag{14}$$

В силу (10) из (14) получаем

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_1 h_n}{\alpha\varepsilon} \Big[b_n^r - a_n^r\Big], \tag{15}$$

где

$$a_n = 1 - \frac{Kn}{N}, \quad b_n = a_n + \frac{K}{N}, \quad K = 2(1-\varepsilon), \quad 0 \le a_n \le 1, \quad 0 \le b_n \le 1. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$b_n^r - a_n^r = b_n^r(1 - \alpha_n^r), \quad \alpha_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad 1 - \alpha_n^r = (1 - \alpha_n)(1 + \alpha_n + \cdots + \alpha_n^{r-1}).$$

Теперь из (15) вытекает, что

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_1 h_n}{\alpha\varepsilon}\, b_n(b_n - a_n) r. \tag{17}$$

Согласно (11), (16) из (17) имеем

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_1 K r^2}{\alpha^2 N}\Big(1 - \frac{K(n-1)}{N}\Big) \ln\Big[1 + \frac{K}{N - Kn}\Big]. \tag{18}$$

Рассмотрим случай $n < N/2$. Обозначим $P = N - Kn$. Тогда

$$P \ge N - 2(1-\varepsilon)(N/2 - 1) > K \ge 2(1 - e^{-1}).$$

Оценка (18) при этом принимает вид

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_1 K r^2}{\alpha^2 N^2}(P + K) \ln\Big(1 + \frac{K}{P}\Big). \tag{19}$$

Из оценки (19) следует, что для некоторой постоянной C_0

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_0}{N^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad n < \frac{N}{2}. \tag{20}$$

Остановимся на случае $n = N/2$. Тогда в силу (18)

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C_1 K r^2}{\alpha^2 N^2}(N\varepsilon + K) \ln\Big(1 + \frac{K}{N\varepsilon}\Big). \tag{21}$$

Из (21) при $\varepsilon \ge 1/N$ для некоторой постоянной C имеем

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}], \quad \varepsilon \ge 1/N. \tag{22}$$

Остановимся на случае $\varepsilon < 1/N$. В соответствии с (2) $|\Phi(x)| \le C_1 e^{-\alpha x/\varepsilon}$. Учитывая (10), получаем

$$e^{-\alpha x_{N/2-1}/\varepsilon} = \Big(\varepsilon + \frac{K}{N}\Big)^r, \quad e^{-\alpha x_{N/2}/\varepsilon} = \varepsilon^r.$$

Поскольку $\varepsilon < 1/N,\ r \ge 2$, то

$$e^{-\alpha x/\varepsilon} \le \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}].$$

Следовательно, для некоторой постоянной C_2

$$|L_2(\Phi, x) - \Phi(x)| \le |L_2(\Phi, x)| + |\Phi(x)| \le \frac{C_2}{N^2}, \quad x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}], \quad \varepsilon < 1/N. \tag{23}$$

Остается рассмотреть случай $n > N/2$. В соответствием с (2), (7) при $x \ge \sigma$ справедливо неравенство $|\Phi''(x)| \le C_1$. Поэтому для функции $\Phi(x)$ выполняется оценка погрешности

$$|\Phi(x) - L_2(\Phi, x)| \le \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n],\ n > \frac{N}{2}. \tag{24}$$

Используя оценки (13), (20), (22)–(24), в случае $\varepsilon < e^{-1}$ получаем утверждение теоремы.

Если $\varepsilon \ge e^{-1}$ или $\sigma > 1/2$, то производные функции $\Phi(x)$ являются равномерно ограниченными, поэтому на каждом сеточном интервале справедлива оценка погрешности, соответствующая утверждению теоремы.

Теорема доказана. □

2. Погрешность при вычислении производной

Для вычисления производной функции вида (1) рассмотрим формулу

$$u'(x) \approx L_2'(u, x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{h_n}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{25}$$

Рассмотрим сначала случай равномерной сетки с шагом h. Пусть $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда при $\varepsilon = h$

$$\varepsilon \Big| \frac{u(h) - u(0)}{h} - u'(0) \Big| = e^{-1}.$$

Таким образом, для равномерной сетки относительная погрешность формулы (25) не является ε-равномерной, при $\varepsilon = h$ погрешность является величиной порядка $O(1)$.

В случае сетки Шишкина в [6] получена ε-равномерная оценка погрешности:

$$\varepsilon \Big| \frac{u_n - u_{n-1}}{h_n} - u'(x) \Big| \le C \frac{\ln N}{N}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad 1 \le n \le N. \tag{26}$$

Оценим погрешность формулы (25) в случае сетки Бахвалова, применяемой выше для линейной интерполяции.

Для погрешности формулы (25) справедлива оценка

$$|L_2'(u, x) - u'(x)| \le \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} |u''(s)|\, ds. \tag{27}$$

Пусть $n \leq N/2$. Учитывая оценки (2) и используя обозначения из теоремы 1, из (27) получаем

$$\varepsilon|L_2'(\Phi,x)-\Phi'(x)| \leq C\Big[e^{-\alpha x_{n-1}/\varepsilon}-e^{-\alpha x_n/\varepsilon}\Big] = C(b_n^r-a_n^r) \leq Cb_n(b_n-a_n)r \leq \frac{C_3}{N}.$$

Итак, для для некоторой постоянной C_3

$$\varepsilon|L_2'(\Phi,x)-\Phi'(x)| \leq \frac{C_3}{N}, \quad x\in[x_{n-1},x_n], \quad 1\leq n\leq \frac{N}{2}. \tag{28}$$

В силу (2), (27), (28) для некоторой постоянной C имеем

$$\varepsilon|L_2'(u,x)-u'(x)| \leq \frac{C}{N}, \quad x\in[x_{n-1},x_n], \quad n\leq \frac{N}{2}. \tag{29}$$

Пусть теперь $n > N/2$. При $x \geq \sigma$ выполняется оценка $|\Phi''(x)| \leq C_1$, поэтому в соответствии с (2), (7), (27) справедлива оценка

$$|L_2'(u,x)-u'(x)| \leq \frac{C}{N}, \quad x\in[x_{n-1},x_n], \quad n > \frac{N}{2}. \tag{30}$$

Итак, для формулы (25) в случае сетки Бахвалова в области пограничного слоя справедлива оценка погрешности (29), а вне области пограничного слоя справедлива оценка (30).

3. Результаты численных экспериментов

Проведено численное сравнение точности формулы линейной интерполяции, применяемой на равномерной сетке, сетках Шишкина и Бахвалова.

Рассмотрим сетку Шишкина. Учитывая представление (1) для интерполируемой функции $u(x)$, зададим шаги сетки из [4] на основе соотношений:

$$\sigma=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}, \quad h_n=\frac{2\sigma}{N}, \quad n\leq\frac{N}{2}; \quad h_n=\frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad n>\frac{N}{2}. \tag{31}$$

В соответствии с [5] в случае такой сетки для некоторой постоянной C

$$|u(x)-L_2(u,x)| \leq C\,\frac{\ln^2 N}{N^2}, \quad x\in[0,1]. \tag{32}$$

Зададим функцию вида (1)

$$u(x)=\cos\frac{\pi x}{2}+e^{-x/\varepsilon}, \quad x\in[0,1],$$

при этом в (1) $\Phi(x)=e^{-x/\varepsilon}$. Пусть погрешность интерполяции определяет соотношение

$$\Delta_{N,\varepsilon}=\max_{n,j}|L_2(u,\tilde{x}_{n,j})-u(\tilde{x}_{n,j})|,$$

где $\tilde{x}_{n,j}$ – узлы более мелкой сетки, образованной делением каждого интервала $[x_{n-1},x_n]$ исходной сетки на 10 равных подинтервалов.

В табл. 1–3 приведена погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ формулы линейной интерполяции (8) в зависимости от ε и N и вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon}=\log_2[\Delta_{N,\varepsilon}/\Delta_{2N,\varepsilon}]$. В таблицах используется принятое обозначение $10^{-k}=e{-}k$.

В табл. 1 приведена погрешность в случае равномерной сетки. Видно, что погрешность не уменьшается с уменьшением шага сетки h, если $\varepsilon=h$.

Табл. 1

Погрешность и вычисленный порядок точности формулы линейной интерполяции на равномерной сетке

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$7.5e{-}4$ 2.0	$1.9e{-}4$ 2.0	$4.7e{-}5$ 2.0	$1.2e{-}5$ 2.0	$2.9e{-}6$ 2.0	$7.3e{-}7$ 2.0
16^{-1}	$7.6e{-}2$ 1.66	$2.4e{-}2$ 1.82	$6.8e{-}3$ 1.91	$1.8e{-}3$ 1.95	$4.7e{-}4$ 1.98	$1.2e{-}4$ 1.99
32^{-1}	$2.0e{-}1$ 1.36	$7.7e{-}2$ 1.66	$2.4e{-}2$ 1.82	$6.9e{-}3$ 1.91	$1.8e{-}3$ 1.96	$4.7e{-}4$ 1.98
64^{-1}	$3.7e{-}1$ 0.90	$2.0e{-}1$ 1.37	$7.7e{-}2$ 1.66	$2.4e{-}2$ 1.83	$6.9e{-}3$ 1.91	$1.8e{-}3$ 1.98
128^{-1}	$4.8e{-}1$ 0.36	$3.7e{-}1$ 0.90	$2.0e{-}1$ 1.37	$7.7e{-}2$ 1.66	$2.4e{-}2$ 1.83	$6.9e{-}3$ 1.91
256^{-1}	$5.0e{-}1$ 0.05	$4.8e{-}1$ 0.37	$3.7e{-}1$ 0.90	$2.0e{-}1$ 1.37	$7.7e{-}2$ 1.66	$2.4e{-}2$ 1.83
512^{-1}	$5.0e{-}1$ 0.00	$5.0e{-}1$ 0.05	$4.8e{-}1$ 0.37	$3.7e{-}1$ 0.90	$2.0e{-}1$ 1.37	$7.7e{-}2$ 1.66

Табл. 2

Погрешность и вычисленный порядок точности формулы линейной интерполяции на сетке Шишкина

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$7.5e{-}4$ 2.0	$1.9e{-}4$ 2.0	$4.7e{-}5$ 2.0	$1.2e{-}5$ 2.0	$2.9e{-}6$ 2.0	$7.3e{-}7$ 2.0
16^{-1}	$4.2e{-}2$ 1.18	$1.9e{-}2$ 1.46	$6.8e{-}3$ 1.91	$1.8e{-}3$ 1.95	$4.7e{-}4$ 1.99	$1.2e{-}4$ 1.99
32^{-1}	$4.3e{-}2$ 1.18	$1.9e{-}2$ 1.35	$7.4e{-}3$ 1.48	$2.7e{-}3$ 1.57	$9.0e{-}4$ 1.63	$2.9e{-}4$ 1.68
64^{-1}	$4.3e{-}2$ 1.18	$1.9e{-}2$ 1.35	$7.4e{-}3$ 1.48	$2.7e{-}3$ 1.57	$9.0e{-}4$ 1.63	$2.9e{-}4$ 1.68
128^{-1}	$4.3e{-}2$ 1.18	$1.9e{-}2$ 1.35	$7.4e{-}3$ 1.48	$2.7e{-}3$ 1.57	$9.0e{-}4$ 1.63	$2.9e{-}4$ 1.68
256^{-1}	$4.3e{-}2$ 1.18	$1.9e{-}2$ 1.35	$7.4e{-}3$ 1.48	$2.7e{-}3$ 1.57	$9.0e{-}4$ 1.63	$2.9e{-}4$ 1.68
512^{-1}	$4.3e{-}2$ 1.18	$1.9e{-}2$ 1.35	$7.4e{-}3$ 1.48	$2.7e{-}3$ 1.57	$9.0e{-}4$ 1.63	$2.9e{-}4$ 1.68
T_N	1.36	1.47	1.56	1.62	1.66	1.70

В табл. 2 приведена погрешность для сетки Шишкина (31). Последняя строка содержит порядок точности $T_N = \log_2 \left[4\ln^2(N)/\ln^2(2N) \right]$, соответствующий оценке погрешности (32). Результаты экспериментов согласуются с оценкой погрешности.

В табл. 3 приведена погрешность для сетки Бахвалова, определенной в разд. 1. Порядок точности близок к двум, что соответствует теореме 1.

Остановимся на погрешности вычисления производной по формуле (25), где шаг h_n зависит от задаваемой сетки.

В табл. 4–6 по аналогии с табл. 1–3 приведены погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ и вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ в случаях равномерной сетки, сетки Шишкина и сетки

Табл. 3

Погрешность и вычисленный порядок точности формулы линейной интерполяции на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$7.5e{-}4$ 2.0	$1.9e{-}4$ 2.0	$4.7e{-}5$ 2.0	$1.2e{-}5$ 2.0	$2.9e{-}6$ 2.0	$7.3e{-}7$ 2.0
16^{-1}	$5.4e{-}3$ 1.84	$1.5e{-}3$ 1.92	$4.0e{-}4$ 1.87	$1.1e{-}4$ 1.93	$2.9e{-}5$ 1.97	$7.3e{-}6$ 1.99
32^{-1}	$5.8e{-}3$ 1.84	$1.6e{-}3$ 1.92	$4.3e{-}4$ 1.80	$1.2e{-}4$ 1.84	$3.5e{-}5$ 1.93	$9.1e{-}6$ 1.97
64^{-1}	$6.0e{-}3$ 1.84	$1.7e{-}3$ 1.92	$4.5e{-}4$ 1.96	$1.1e{-}4$ 1.76	$3.4e{-}5$ 1.83	$9.5e{-}6$ 1.92
128^{-1}	$6.1e{-}3$ 1.84	$1.7e{-}3$ 1.91	$4.5e{-}4$ 1.96	$1.2e{-}4$ 1.98	$3.0e{-}5$ 1.75	$8.8e{-}6$ 1.83
256^{-1}	$6.1e{-}3$ 1.84	$1.7e{-}3$ 1.91	$4.6e{-}4$ 1.96	$1.2e{-}4$ 1.98	$3.0e{-}5$ 1.99	$7.5e{-}6$ 1.76
512^{-1}	$6.2e{-}3$ 1.84	$1.7e{-}3$ 1.91	$4.6e{-}4$ 1.96	$1.2e{-}4$ 1.98	$3.0e{-}5$ 1.99	$7.5e{-}6$ 1.99

Табл. 4

Погрешность и порядок точности при вычислении производной на равномерной сетке

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$3.8e{-}2$ 1.0	$1.9e{-}2$ 1.0	$9.6e{-}3$ 1.0	$4.8e{-}3$ 1.0	$2.4e{-}3$ 1.0	$1.2e{-}3$ 1.0
16^{-1}	$2.7e{-}1$ 0.73	$1.6e{-}1$ 0.86	$9.0e{-}2$ 0.93	$4.7e{-}2$ 0.96	$2.4e{-}2$ 0.98	$1.2e{-}2$ 0.99
32^{-1}	$3.8e{-}1$ 0.50	$2.7e{-}1$ 0.73	$1.6e{-}1$ 0.86	$9.0e{-}2$ 0.93	$4.7e{-}2$ 0.96	$2.4e{-}2$ 0.98
64^{-1}	$4.2e{-}1$ 0.14	$3.9e{-}1$ 0.50	$2.7e{-}1$ 0.73	$1.6e{-}1$ 0.86	$9.0e{-}2$ 0.93	$4.8e{-}2$ 0.96
128^{-1}	$3.2e{-}1$ 0.39	$4.2e{-}1$ 0.14	$3.9e{-}1$ 0.50	$2.7e{-}1$ 0.73	$1.6e{-}1$ 0.86	$9.0e{-}2$ 0.93
256^{-1}	$1.4e{-}1$ 1.22	$3.2e{-}1$ 0.39	$4.2e{-}1$ 0.14	$3.9e{-}1$ 0.50	$2.7e{-}1$ 0.73	$1.6e{-}1$ 1.86
512^{-1}	$3.1e{-}2$ 2.16	$1.4e{-}1$ 1.22	$3.2e{-}1$ 0.39	$4.2e{-}1$ 0.14	$3.9e{-}1$ 0.50	$2.7e{-}1$ 0.73

Бахвалова, где

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \varepsilon \max_{n,j} \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{h_n} - u'(\tilde{x}_{n,j}) \right|.$$

Применение равномерной сетки неприемлемо для достаточно малых значений ε. В случае сетки Шишкина результаты вычислений согласуются с оценкой (26).

В случае сетки Бахвалова при всех n подтверждается оценка погрешности (29).

Заключение

Исследован вопрос интерполяции функции одной переменной на сетке Бахвалова при наличии пограничного слоя Получены оценки погрешности формулы

Табл. 5

Погрешность и порядок точности при вычислении производной на сетке Шишкина

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$3.8e{-}2$ 1.0	$1.9e{-}2$ 1.0	$9.6e{-}3$ 1.0	$4.8e{-}3$ 1.0	$2.4e{-}3$ 1.0	$1.2e{-}3$ 1.0
16^{-1}	$2.1e{-}1$ 0.53	$1.4e{-}1$ 0.69	$9.0e{-}2$ 0.93	$4.7e{-}2$ 0.96	$2.4e{-}2$ 0.98	$1.2e{-}2$ 0.99
32^{-1}	$2.1e{-}1$ 0.54	$1.5e{-}1$ 0.64	$9.3e{-}2$ 0.72	$5.7e{-}2$ 0.77	$3.3e{-}2$ 0.81	$1.9e{-}2$ 0.84
64^{-1}	$2.1e{-}1$ 0.54	$1.5e{-}1$ 0.64	$9.4e{-}2$ 0.72	$5.7e{-}2$ 0.77	$3.3e{-}2$ 0.81	$1.9e{-}2$ 0.84
128^{-1}	$2.1e{-}1$ 0.54	$1.5e{-}1$ 0.64	$9.4e{-}2$ 0.72	$5.7e{-}2$ 0.77	$3.3e{-}2$ 0.81	$1.9e{-}2$ 0.84

Табл. 6

Погрешность и порядок точности при вычислении производной на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$3.8e{-}2$ 1.0	$1.9e{-}2$ 1.0	$9.6e{-}3$ 1.0	$4.8e{-}3$ 1.0	$2.4e{-}3$ 1.0	$1.2e{-}3$ 1.0
16^{-1}	$8.0e{-}2$ 0.90	$4.3e{-}2$ 0.95	$2.2e{-}2$ 0.97	$1.1e{-}2$ 0.99	$5.7e{-}3$ 0.99	$2.9e{-}3$ 1.00
32^{-1}	$8.3e{-}2$ 0.90	$4.5e{-}2$ 0.95	$2.3e{-}2$ 0.97	$1.2e{-}2$ 0.99	$6.0e{-}3$ 0.99	$3.0e{-}3$ 1.00
64^{-1}	$8.5e{-}2$ 0.89	$4.5e{-}2$ 0.94	$2.4e{-}2$ 0.97	$1.2e{-}2$ 0.99	$6.1e{-}3$ 0.99	$3.1e{-}3$ 1.00
128^{-1}	$8.5e{-}2$ 0.89	$4.6e{-}2$ 0.94	$2.4e{-}2$ 0.97	$1.2e{-}2$ 0.99	$6.1e{-}3$ 0.99	$3.1e{-}3$ 1.00
256^{-1}	$8.5e{-}2$ 0.89	$4.6e{-}2$ 0.94	$2.4e{-}2$ 0.97	$1.2e{-}2$ 0.99	$6.2e{-}3$ 0.99	$3.1e{-}3$ 1.00

кусочно-линейной интерполяции и соответствующей формулы численного дифференцирования, равномерные по малому параметру. Приведены результаты вычислительных экспериментов, согласующиеся с полученными оценками погрешности.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60009.

Литература

1. *Linß T.* Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. – Berlin: Springer, 2010. – 233 p.
2. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 267–275.
3. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859.
4. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.

5. *Задорин А.И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона – Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 289-303. – doi: 10.15372/SJNM20150304.
6. *Задорин А.И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2018. – Т. 21, № 3. – С. 243–254. – doi: 10.15372/SJNM20180301.
7. *Linß T.* The necessity of Shishkin decompositions // Appl. Math. Lett. – 2001. – V. 14, No 7. – P. 891–896. – doi: 10.1016/S0893-9659(01)00061-1.
8. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 221–233.
9. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Electron. Math. Rep. – 2012. – V. 9. – P. 445–455.
10. *Блатов И.А., Задорин Н.А.* Анализ интерполяционной формулы, точной на погранслойной составляющей интерполируемой функции // Наука и мир. – 2015. – Т. 1, № 2. – С. 13–17.

Поступила в редакцию
26.09.19

Блатов Игорь Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
ул. Льва Толстого, д. 23, г. Самара, 443010, Россия
E-mail: *blatow@mail.ru*

Задорин Никита Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: *nik-zadorin@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 497–508

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.497-508

Interpolation on the Bakhvalov Mesh in the Presence of an Exponential Boundary Layer

I.A. Blatov[a*], *N.A. Zadorin*[b**]

[a]*Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, 443010 Russia*
[b]*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mail: **blatow@mail.ru*, ***nik-zadorin@yandex.ru*

Received September 26, 2019

Abstract

Interpolation of the function of one variable with large gradients in the region of the exponential boundary layer was studied. The interpolated function corresponds to solution of a boundary value problem for an ordinary differential equation of the second order with the small parameter ε before the highest derivative. Applying classical polynomial interpolation formulas on a uniform mesh to this function can lead to unacceptable errors. In the paper, the error of the piecewise linear interpolation formula on the Bakhvalov mesh condensing in the region of the boundary layer was estimated. The Bakhvalov mesh is used in a number of works when constructing difference schemes for singularly perturbed problems; therefore, estimating the error of interpolation formulas on this mesh is of interest. An error estimate of the order of $O(1/N^2)$ was obtained uniformly with respect to the parameter ε, where N is the number of mesh nodes. The problem of computing the derivative of the function with large gradients given in the nodes of the Bakhvalov mesh was investigated. The classical difference formula with two nodes was considered obtained by differentiating the linear interpolant studied above. An estimate of the relative error of the order of $O(1/N)$, uniform in the parameter ε, was obtained. The results of the numerical experiments consistent with the obtained error estimates were presented. Numerical comparison of the errors obtained during the interpolation and numerical differentiation on the Bakhvalov mesh with errors on the Shishkin mesh and on the uniform mesh was carried out.

Keywords: function of one variable, boundary layer, Bakhvalov mesh, piecewise linear interpolation, numerical differentiation, ε-uniform error estimation

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-31-60009).

References

1. Linß T. *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems.* Berlin, Springer, 2010. 233 p.
2. Zadorin A.I. Interpolation method for the boundary-layer problem. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2007, vol. 10, no. 3, pp. 267–275. (In Russian)

3. Bakhvalov N.S. The optimization of methods of solving boundary value problems with a boundary layer. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 139–166. doi: 10.1016/0041-5553(69)90038-X.

4. Shishkin G.I. *Setochnye approksimatsii singulyarno vozmushchennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii* [Grid Approximation of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations]. Yekaterinburg, Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, 1992. 233 p. (In Russian)

5. Zadorin A.I. Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids. *Numer. Anal. Appl.*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 235–247. doi: 10.1134/S1995423915030040.

6. Zadorin A.I. Analysis of numerical differentiation formulas in a boundary layer on a Shishkin grid. *Numer. Anal. Appl.*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 193–203. doi: 10.1134/S1995423918030011.

7. Linß T. The necessity of Shishkin decompositions. *Appl. Math. Lett.*, 2001, vol. 14, no. 7, pp. 891–896. doi: 10.1016/S0893-9659(01)00061-1.

8. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 2, pp. 211–223. doi: 10.1134/S0965542510020028.

9. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2012, vol. 9, pp. 445–455.

10. Blatov I.A., Zadorin N.A. Analysis of the interpolation formula exact on the boundary layer component of the interpolated function. *Nauka Mir*, 2015, vol. 1, no. 2, pp. 13–17. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Блатов И.А., Задорин Н.А.* Интерполяция на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 497–508. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.497-508.

***For citation*:** Blatov I.A., Zadorin N.A. Interpolation on the Bakhvalov mesh in the presence of an exponential boundary layer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 497–508. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.497-508. (In Russian)