

УДК 517.9

## НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.М. Тухватуллина

**Аннотация**

В работе для специального семейства невыпуклых областей получены вариационные неравенства типа Харди, которые являются аналогами неравенств для выпуклых областей, представленных ранее в статьях М. Hoffmann-Ostenhof, Т. Hoffmann-Ostenhof, А. Laptev “A geometrical version of Hardy’s inequality” (J. Funct. Anal. – 2002. – No 189. – P. 539–548) и J. Tidblom “A geometrical version of Hardy’s inequality for  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ” (Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – No 132. – P. 2265–2271). Нами предложено также достаточное условие регулярности для многомерных областей, которое используется для доказательства неравенств типа Харди. В качестве примеров представлены неравенства типа Харди для конкретных невыпуклых областей в двумерном и трехмерном пространствах.

**Ключевые слова:** неравенства типа Харди, выпуклые области, регулярные области.

**Введение**

Вариационные неравенства являются одним из важнейших инструментов решения задач математической физики. В настоящей работе мы рассматриваем вариационные неравенства типа Харди. Исследованию и доказательству неравенств типа Харди и их модификаций посвящено множество научных работ, в частности недавние статьи Ф.Г. Авхадиева, К.-Й. Виртса, Х. Брэзиса, М. Маркуса, Е. Дэвиса, М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптева, Ж. Тидблома (см. [1–8]).

Неравенство типа Харди, доказанное М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф и Ари Лаптевым в статье [7], для произвольной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) и произвольной функции  $u \in H_0^1(\Omega)$  имеет вид:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{4} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^2(x)} |u(x)|^2 dx + \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx, \quad (1)$$

где  $|\Omega|$  – мера области  $\Omega$ ,  $\rho_{\nu}(x)$  – расстояние от точки  $x \in \Omega$  до границы области  $\Omega$  по направлению вектора  $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $s_{n-1}$  есть площадь поверхности единичной сферы  $\mathbb{S}^{n-1}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ :  $s_{n-1} = |\mathbb{S}^{n-1}|$ ,  $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$  – элемент площади поверхности единичной сферы  $\mathbb{S}^{n-1}$ ,  $d\omega(\nu) = \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{s_{n-1}}$ .

В [7] доказано также, что в случае выпуклой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  неравенство может быть существенно упрощено, а именно: (1) можно записать в виде

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx, \quad (2)$$

где  $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

Впоследствии Ж. Тидблом в [8] распространил неравенство (2) на случай выпуклых областей  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и функций  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ( $p > 1$ ):

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq c_p \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{\alpha(p, n)}{|\Omega|^{p/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx, \quad (3)$$

где

$$c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p, \quad \alpha(p, n) = \frac{(p-1)^{p+1}}{p^p} \left(\frac{s_{n-1}}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Сопоставив неравенства (1) и (2), мы задались вопросом, существуют ли невыпуклые области, для которых справедливы аналоги неравенства (2), доказанного в [7] для выпуклых областей. В настоящей работе мы даем положительный ответ на поставленный вопрос и представляем специальный класс невыпуклых областей, для которых существуют аналоги неравенства (2).

### 1. Достаточное условие регулярности многомерных областей и его применение в неравенствах типа Харди

Предварительно введем необходимые нам определения и обозначения. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Следуя Е.Б. Дэвису (см. [9]) определим функцию  $\tau_{\nu}(x)$  как расстояние между точкой  $x \in \Omega$  и ближайшей точкой, принадлежащей границе  $\partial\Omega$ , по направлению вектора  $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ :

$$\tau_{\nu}(x) = \min\{s > 0 : x + s\nu \notin \Omega\}.$$

Введем также  $\rho_{\nu}(x)$  – расстояние до границы по направлению  $\nu$ , диаметр  $D_{\nu}(x)$  вдоль направления  $\nu$  и  $\delta_0(\Omega)$  – внутренний радиус области  $\Omega$  следующим образом:

$$\rho_{\nu}(x) = \min\{\tau_{\nu}(x), \tau_{-\nu}(x)\}, \quad D_{\nu}(x) = \tau_{\nu}(x) + \tau_{-\nu}(x), \quad \delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \delta(x).$$

Определим псевдодистанцию  $m(x)$  от точки  $x$  до границы области  $\Omega$  (см. [9]):

$$\frac{1}{m^2(x)} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{\nu}^2(x)}.$$

Пусть  $a \in \partial\Omega$ ,  $r > 0$ . Определим область  $\tilde{\Omega}(a, r)$ :

$$\tilde{\Omega}(a, r) = \{y \notin \Omega : |y - a| < r\}.$$

Граничную точку  $a$  области  $\Omega$  назовем регулярной граничной точкой области  $\Omega$ , если для нее выполняется условие:

$$\exists x \in \Omega : |x - a| = \text{dist}(x, \partial\Omega).$$

Множество всех регулярных граничных точек области  $\Omega$  обозначим через  $\tilde{\partial\Omega}$ .

Следуя [9], введем понятие регулярной области в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – регулярная область, если существует конечная константа  $c$  такая, что

$$\delta(x) \leq m(x) \leq c\delta(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Для двумерных областей Е.Б. Дэвис привел достаточное условие регулярности области (см. [9]):

Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  регулярна, если существует константа  $c_1 > 0$  такая, что

$$|\{y \notin \Omega : |y - a| < r\}| \geq 2c_1 r^2 \quad \forall a \in \partial\Omega, \quad \forall r > 0.$$

Мы несколько ослабляем достаточное условие регулярности Дэвиса и обобщаем его на случай многомерных областей. Впоследствии это условие и полученные нами оценки константы регулярности  $c$  используются для формулировки и доказательства неравенств типа Харди для невыпуклых регулярных областей.

**Теорема 1.** *Если существует положительная константа  $\tilde{c}$  такая, что*

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| = \text{mes} \left( \tilde{\Omega}(a, r) \right) \geq \tilde{c} r^n \quad \forall a \in \partial\tilde{\Omega}, \quad \forall r : 0 < r \leq \delta_0(\Omega),$$

то область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  регулярна.

**Доказательство.** Выберем произвольную внутреннюю точку  $x$  области  $\Omega$ . Пусть

$$r = \delta(x) = |x - a|$$

для некоторой точки  $a \in \partial\tilde{\Omega}$ . Очевидно, при таком выборе радиуса  $r$  будут выполняться ограничения:  $0 < r \leq \delta_0(\Omega)$ .

Введем множества

$$S_{\tilde{\Omega}(a,r)} = \{\nu \in \mathbb{S}^{n-1} : x + s\nu \in \tilde{\Omega}(a, r) \text{ для некоторого } s > 0\},$$

$$\Lambda_{\tilde{\Omega}(a,r)} = \{y = |y|\nu \in \mathbb{R}^n : r < |y| < 2r, \nu \in S_{\tilde{\Omega}(a,r)}\}.$$

Из геометрических соображений ясно, что тогда

$$r < s < 2r, \quad |\tilde{\Omega}(a, r)| \leq |\Lambda_{\tilde{\Omega}(a,r)}|.$$

Мера указанной области  $\Lambda_{\tilde{\Omega}(a,r)}$  есть

$$|\Lambda_{\tilde{\Omega}(a,r)}| = \int_r^{2r} \rho^{n-1} d\rho \int_{S_{\tilde{\Omega}(a,r)}} d\mathbb{S}^{n-1}(\nu) = \frac{(2^n - 1)r^n}{n} |\tilde{S}^{n-1}|,$$

где  $|\tilde{S}^{n-1}| = \int_{S_{\tilde{\Omega}(a,r)}} d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$  — площадь поверхности  $S_{\tilde{\Omega}(a,r)}$ .

Следовательно,

$$\frac{(2^n - 1)r^n}{n} |\tilde{S}^{n-1}| \geq |\tilde{\Omega}(a, r)| \geq \tilde{c} r^n,$$

а значит,

$$|\tilde{S}^{n-1}| \geq \frac{n\tilde{c}}{2^n - 1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(x)} &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} \geq \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{S_{\tilde{\Omega}(a,r)}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} > \\ &> \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{S_{\tilde{\Omega}(a,r)}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{4\delta^2(x)} = \frac{|\tilde{S}^{n-1}|}{4|\mathbb{S}^{n-1}|\delta^2(x)} \geq \frac{\tilde{c} n}{4\delta^2(x)|\mathbb{S}^{n-1}|(2^n - 1)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определением  $\tau_\nu(x)$  и неравенством  $s < 2r$ .

Таким образом, существует константа

$$c = 2 \left( \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|(2^n - 1)}{\tilde{c}n} \right)^{1/2} : m(x) \leq c\delta(x).$$

В двумерном и трехмерном случаях получим соответственно:

$$c = 2 \left( \frac{3\pi}{\tilde{c}} \right)^{1/2}, \quad c = 4 \left( \frac{7\pi}{3\tilde{c}} \right)^{1/2}.$$

Неравенство  $\delta(x) \leq m(x)$  следует из простой цепочки соотношений:

$$\frac{1}{m^2(x)} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} \leq \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\delta^2(x)} = \frac{1}{\delta^2(x)}.$$

Итак, мы доказали, что

$$\exists c < +\infty : \delta(x) \leq m(x) \leq c\delta(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Следовательно,  $\Omega$  – регулярная область.  $\square$

Используя доказанное нами достаточное условие регулярности области, несложно построить примеры невыпуклых регулярных областей.

**Пример 1.** В двумерном пространстве рассмотрим область  $\Omega$  – концентрическое кольцо, образованное двумя окружностями радиусов  $R_1, R_2$  ( $R_2 < R_1$ ). Покажем, что в случае  $R_2 \geq \frac{R_1}{5}$  область  $\Omega$  будет регулярной. Заметим, что при невыполнении этого условия величину  $|\tilde{\Omega}(a, r)|$  не удастся оценить снизу через  $r^2$  для всех точек  $a \in \partial\tilde{\Omega}$  и произвольного  $r > 0$ .

При  $R_2 \geq \frac{R_1}{5}$  ясно, что  $\delta_0(\Omega) = \frac{R_1 - R_2}{2} \leq 2R_2$ .

Рассмотрим произвольную граничную точку  $a$ , лежащую на окружности радиуса  $R_2$ . При  $r \leq 2R_2$  круги радиуса  $r$  с центром в точке  $a$  будут пересекать окружность радиуса  $R_2$  либо в двух точках (при  $r < 2R_2$ ) (соединив каждую из этих двух точек пересечения с точкой  $a$ , мы получим некоторый угол  $\alpha$  с вершиной в точке  $a$ :  $0 < \alpha < \pi$ ), либо в одной точке (при  $r = 2R_2$ ).

Пусть сначала  $r \leq 2R_2$  и  $0 < \alpha < \pi/2$ .  $\tilde{\Omega}(a, r)$  состоит из сектора круга радиуса  $r$ , соответствующего центральному углу  $\alpha$ , и двух одинаковых сегментов круга радиуса  $R_2$ . Несложные вычисления дадут нам точное значение величины  $|\tilde{\Omega}(a, r)|$ :

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| = \frac{r^2}{4} \left( 2\alpha + \frac{\pi - \alpha}{\cos^2(\alpha/2)} - 2 \operatorname{tg}(\alpha/2) \right),$$

которое в силу возрастания функции

$$Y(\alpha) = \left( 2\alpha + \frac{\pi - \alpha}{\cos^2(\alpha/2)} - 2 \operatorname{tg}(\alpha/2) \right)$$

при  $0 < \alpha < \pi/2$  приведет нас к неумлучшаемой оценке:

$$\tilde{\Omega}(a, r) \geq \frac{\pi r^2}{4}.$$

В случае  $r < 2R_2$  и  $\pi/2 \leq \alpha < \pi$  оценим величину  $\tilde{\Omega}(a, r)$  через площадь сектора круга радиуса  $r$ , соответствующего центральному углу  $\alpha > \pi/2$ :

$$\tilde{\Omega}(a, r) \geq \frac{\pi r^2}{4}.$$

При  $r = 2R_2$  круг пересечет окружность радиуса  $R_2$  лишь в одной точке, и  $\tilde{\Omega}(a, r)$  есть круг радиуса  $R_2$ ,

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| = \pi R_2^2 = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Для граничных точек, лежащих на окружности радиуса  $R_1$ , очевидно, имеем

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| \geq \frac{\pi r^2}{2}.$$

Таким образом, область  $\Omega$  регулярна, так как

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| \geq \frac{\pi r^2}{4} = \tilde{c} r^2 \quad \forall a \in \tilde{\partial\Omega}, \quad \forall r : 0 < r \leq \delta_0(\Omega), \quad \tilde{c} = \frac{\pi}{4},$$

причем константа  $\tilde{c}$  из достаточного условия регулярности (теорема 1) является точной.

**Пример 2.** В трехмерном пространстве рассмотрим область  $\Omega$  – шар с удаленным из него шаровым сектором. Рассмотрим соответствующий данному шаровому сектору конус. Пусть  $\alpha$  – плоский угол между образующими конуса, который получается при рассмотрении центрального сечения конуса,  $0 < \alpha < \pi$ ,  $R$  – радиус шара,  $0 < R < \infty$ . Для любого  $r : 0 < r \leq \delta_0(\Omega) = R/2$  оценим объем области  $\tilde{\Omega}(a, r)$  для точек  $a$ , принадлежащих множеству регулярных граничных точек  $\tilde{\partial\Omega}$  области  $\Omega$ :

1) если  $a$  – центр шара, тогда, очевидно, область  $\tilde{\Omega}(a, r)$  есть шаровой сектор, соответствующий шару радиуса  $r$ , следовательно,

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| = \frac{4}{3}\pi r^3 \sin^2(\alpha/4);$$

2) если  $a$  – точка, лежащая на поверхности области  $\Omega$  в месте выреза шарового сектора, то

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| \geq \frac{4}{3}\pi r^3 \sin^2(\alpha/4);$$

3) если  $a$  – точка, лежащая на поверхности области  $\Omega$  (за исключением точек из пункта 2), тогда объем области  $\tilde{\Omega}(a, r)$  будет не меньше объема полушара радиуса  $r$ , то есть

$$|\Omega(a)| \geq \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Обобщая полученные результаты, получим точную оценку:

$$|\tilde{\Omega}(a, r)| \geq \frac{4\pi}{3}r^3 \sin^2(\alpha/4) = \tilde{c} r^3 \quad \forall a \in \partial\Omega, \quad \tilde{c} = \frac{4\pi}{3} \sin^2(\alpha/4).$$

Следовательно,  $\Omega$  – регулярная область.

Нетрудно показать, что всякая выпуклая область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  является регулярной областью.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2(x)} &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} = \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{-\nu}^2(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\min^2\{\tau_\nu(x), \tau_{-\nu}(x)\}} = \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}. \end{aligned}$$

Исходя из определения величин  $\rho_\nu(x)$ ,  $\delta(x)$  и их геометрической интерпретации, для точек выпуклых областей несложно вывести неравенство:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} \geq \frac{1}{n} \frac{1}{\delta^2(x)},$$

$x \in \Omega$ ,  $\Omega$  – выпуклая в  $\mathbb{R}^n$  область. Следовательно,

$$\frac{1}{m^2(x)} \geq \frac{1}{2n} \frac{1}{\delta^2(x)},$$

или

$$m(x) \leq \sqrt{2n}\delta(x).$$

Таким образом, всякая выпуклая область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  является регулярной с константой  $c = \sqrt{2n}$ .

Как будет показано в следующей теореме, класс невыпуклых регулярных областей является специальным классом невыпуклых областей, для которого нам удалось получить аналоги неравенства (2), доказанного в [7] для выпуклых областей.

**Теорема 2.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – произвольная регулярная область с константой регулярности  $c$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$  – произвольная функция. Тогда справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{2c^2} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

**Доказательство.** Как известно из работы [7], для произвольной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и произвольной функции  $u \in H_0^1(\Omega)$  справедливо неравенство:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{4} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} |u(x)|^2 dx + \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n}}{4} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}} dx.$$

Если  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – регулярная область с константой  $c$ , то из рассуждений, проведенных выше, мы получим:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)} = \frac{2}{m^2(x)} \geq \frac{2}{c^2 \delta^2(x)}.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{2c^2} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n}}{4} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}} dx,$$

или

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{2c^2} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n}}{4|\Omega|^{2/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Теорема доказана. □

В случаях  $n = 2, n = 3$  наше неравенство существенно упростится:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{\pi}{2|\Omega|} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

для произвольной регулярной с константой  $c$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  и произвольной функции  $u \in H_0^1(\Omega)$ , и

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{3}{2c^2} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \left[ \frac{3\pi^2}{4|\Omega|^2} \right]^{1/3} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx$$

для произвольной регулярной с константой  $c$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  и произвольной функции  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Для концентрического кольца из примера 1 и для шара с вырезанным сектором из примера 2 соответственно получим неравенства:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{48} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \frac{1}{2(R_1^2 - R_2^2)} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{3 \sin^2(\alpha/4)}{56} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} dx + \left[ \frac{3\pi^2}{4|\Omega|^2} \right]^{1/3} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx,$$

где  $|\Omega| = \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^2(\alpha/4)$ .

## 2. Неравенства типа Харди для невыпуклых регулярных областей и функций из пространства $W_0^{1,p}$

Обратимся теперь к неравенствам типа Харди, полученным Ж. Тидбломом в [8], которые обобщают результаты М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф и А. Лаптева на случай функций из пространства  $W_0^{1,p}(\Omega)$  для произвольного  $p > 1$ .

Для произвольной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , функции  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  неравенство типа Харди (см. [8]) выглядит следующим образом:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq \frac{c_p \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|u(x)|^p}{\rho_{\nu}^p(x)} d\omega(\nu) dx + \frac{\alpha(p,n)}{|\Omega|^{p/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx, \quad (4)$$

где

$$c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p, \quad \alpha(p,n) = \frac{(p-1)^{p+1}}{p^p} \left(\frac{s_{n-1}}{n}\right)^{p/n} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ж. Гидблом также доказал, что для выпуклых областей  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и функций  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ( $p > 1$ ) неравенство (4) может быть существенно упрощено:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq c_p \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{\alpha(p, n)}{|\Omega|^{p/n}} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx. \quad (5)$$

Для невыпуклых областей неравенств, аналогичных неравенству (5), в литературе мы не нашли. Получим их для невыпуклых регулярных областей. Предварительно докажем вспомогательную теорему.

**Теорема 3.** *Для каждой точки  $x$ , принадлежащей регулярной с константой  $c$  области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , верно неравенство:*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^p(x)} \geq \frac{2^{p/2}}{m^p(x)}.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^p(x)} \leq \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^p(x)} \right)^{2/p} \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\omega(\nu) \right)^{1-2/p} = \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^p(x)} \right)^{2/p},$$

то есть

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^p(x)} \geq \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^2(x)} \right)^{p/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^p(x)} &= \left( \frac{1}{m^2(x)} \right)^{p/2} = \left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\tau_{\nu}^2(x)} \right)^{p/2} = \left( \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{\nu}^2(x)} \right)^{p/2} = \\ &= \left( \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{\nu}^2(x)} + \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_{-\nu}^2(x)} \right)^{p/2} = \left( \frac{1}{2|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\rho_{\nu}^2(x)} \right)^{p/2} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^2(x)} \right)^{p/2} \leq \frac{1}{2^{p/2}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_{\nu}^p(x)}. \end{aligned}$$

Получили требуемое.  $\square$

Используя теорему 3, легко приходим к следующему результату:

**Теорема 4.** *Для произвольной регулярной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с константой регулярности  $c$ , функции  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  ( $p > 1$ ) справедливо неравенство:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx &\geq \frac{c_p \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \\ &\times \left( \frac{2^{p/2}}{c^p} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + (p-1) \left( \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{|\Omega|n} \right)^{p/n} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right). \end{aligned}$$



**Доказательство.** Действительно, для каждой точки  $x$  регулярной области  $\Omega$  справедливо неравенство:

$$m(x) \leq c\delta(x),$$

где  $c$  – константа регулярности данной области, следовательно,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^p(x)} \geq \frac{2^{p/2}}{m^p(x)} \geq \frac{2^{p/2}}{c^p \delta^p(x)}.$$

□

В случае плоской регулярной области  $\Omega$  с константой регулярности  $c$  и функции  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx &\geq \frac{c_p \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \times \\ &\times \left( \frac{2^{p/2}}{c^p} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + (p-1) \left(\frac{\pi}{|\Omega|}\right)^{p/2} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right). \end{aligned}$$

Если  $\Omega$  – концентрическое кольцо, то, очевидно, имеем:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq \frac{c_p \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \left( \frac{1}{24^{p/2}} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{(p-1)}{(R_1^2 - R_2^2)^{p/2}} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right).$$

Для регулярной с константой  $c$  трехмерной области  $\Omega$  и функции  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  верно неравенство:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq c_p(p+1) \left[ \frac{2^{p/2}}{c^p} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + (p-1) \left(\frac{4\pi}{3|\Omega|}\right)^{p/3} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right].$$

В случае шара с вырезанным сектором (пример 2), очевидно, получим:

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq c_p(p+1) \left[ \frac{\sin^p(\alpha/4)}{14^{p/2}} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + (p-1) \left(\frac{4\pi}{3|\Omega|}\right)^{p/3} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right],$$

величина  $|\Omega|$  была определена выше.

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Фариту Габидиновичу Авхадиеву.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (госконтракт № 02.740.11.0193) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00762а).

### Summary

*A.M. Tukhvatullina.* Hardy Type Inequalities for a Special Family of Non-Convex Domains.

In this work, we obtain Hardy type inequalities that involve the distance to the boundary and the volume of a domain for a special family of non-convex domains. These inequalities are analogues of the inequalities for convex domains proved by M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev, and J. Tidblom. To prove Hardy type inequalities, we propose a sufficient condition of regularity for multidimensional domains. Hardy type inequalities for certain non-convex domains in two- and three-dimensional spaces are used as an example.

**Key words:** Hardy type inequalities, convex domains, regular domains.

### Литература

1. *Авхадиев Ф.Г.* Неравенства для интегральных характеристик областей. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2006. – 140 с.
2. *Авхадиев Ф.Г.* Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2006. – Т. 255. – С. 8–18.
3. *Avkhadiev F.G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // *Lobachevskii J. Math.* – 2006. – V. 21. – P. 3–31.
4. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // *Z. Angew. Math. Mech.* 87. – 2007. – H. 8–9. – P. 632–642.
5. *Brezis H., Marcus M.* Hardy's inequalities revisited // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4). – 19978. – V. 25, No 1–2. – P. 217–237.
6. *Davies E.B.* A review of Hardy inequalities // *The Maz'ya anniversary Collection*, V. 2. *Oper. Theory Adv. Appl.* – 1999. – V. 110. – P. 55–67.
7. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // *J. Funct. Anal.* – 2002. – V. 189, No 2. – P. 539–548.
8. *Tidblom J.* A geometrical version of Hardy's inequality for  $W_0^{1,p}(\Omega)$  // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2004. – V. 132, No 8. – P. 2265–2271.
9. *Davies E.B.* *Spectral Theory and Differential Operators* // *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – V. 42. – 186 p.

Поступила в редакцию  
17.01.11

---

**Тухватуллина Алина Михайловна** – аспирант Казанского (Приволжского) федерального университета, лаборант-исследователь Научно-образовательного центра КФУ «Экстремальные задачи комплексного анализа и математической физики».

E-mail: *kzn.alina@gmail.com*