Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 2, с. 77–85 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0015*

Д.Н. ТУМАКОВ

ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Аннотация. Рассмотрена переопределенная задача Коши для уравнения Гельмгольца в полубесконечной области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Методом преобразования Фурье в пространстве распределений медленного роста получены необходимые и достаточные условия разрешимости, связывающие граничные функции. Построены интегральные представления решения.

Ключевые слова: переопределенная задача Коши, уравнение Гельмгольца, преобразование Фурье, пространство распределений медленного роста.

УДК: 517.958 : 537.8

Abstract. In this paper we consider an over-determined Cauchy problem for the Helmholtz equation in a semifinite domain with a piecewise smooth curvilinear boundary. Applying the Fourier transform method in the space of slow-growth distributions, we establish necessary and sufficient solvability conditions which connect the boundary functions. We construct integral representations of solutions.

Keywords: over-determined Cauchy problem, Helmholtz equation, Fourier transform, space of slow-growth distributions.

Задача рассеяния волн на неровной поверхности стала актуальной в последние годы из-за ее приложений в различных областях математической физики, в том числе в оптике, в теории распространения радиоволн и радиолокации ([1], [2]). Эту задачу исследовали численными и аналитическими методами многие авторы (например, [3], [4]). В большинстве случаев рассматривались задачи рассеяния на локально возмущенной полуплоскости. В исследованиях [5]–[7] при решении задачи рассеяния в полубесконечной области с кусочно-гладкой границей были использованы методы теории потенциала.

В данной работе исследована переопределенная задача Коши для уравнения Гельмгольца в полубесконечной области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. К такой задаче сводится двумерная задача рассеяния электромагнитных волн на возмущенной границе полуплоскости. Методом преобразования Фурье в пространстве распределений медленного роста получены необходимые условия разрешимости переопределенной задачи, представляющие собой зависимость между граничными функциями.

Поступила 17.10.2007

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

с вещественным коэффициентом k в области D^+ (над границей S на рис. 1).

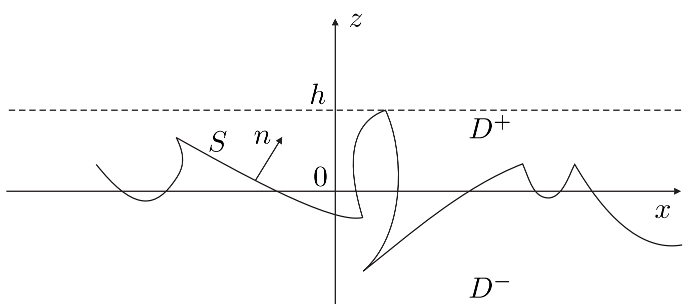

Рис. 1.

Пусть $S = \{(f_1(t), f_2(t)),\ t \in R = (-\infty, +\infty)\}$ — кусочно-гладкая кривая, заданная параметрически. Косинусы углов между нормалью к ней и осями координат вычисляются по формулам [8]:

$$\cos(n, x) = -\frac{g(t)}{\sigma(t)}, \quad \cos(n, z) = \frac{1}{\sigma(t)}, \tag{2}$$

где

$$\sigma(t) = \sqrt{1 + g^2(t)}, \quad g(t) = \frac{df_2(t)}{df_1(t)} = \frac{f_2'(t)}{f_1'(t)}. \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения Гельмгольца (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} &u(f_1(t), f_2(t)) = a_0(t), \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(f_1(t), f_2(t)) = a_1(t), \quad t \in R, \end{aligned} \tag{4}$$

и условию излучения. Это условие состоит в том, что в решении должны отсутствовать приходящие с бесконечности волны. Функции $a_0(t)$, $a_1(t)$ в условиях (4) полагаем непрерывными.

2. Решение задачи Коши

Доопределим решение $u(x, z)$ нулем в области D^- и будем рассматривать его как распределение медленного роста. Справедлива

Теорема 1. *Задача Коши* (1), (4) *эквивалентна уравнению*

$$\left(k^2 - \xi^2 - \zeta^2\right) U(\xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t) e^{i\xi f_1(t) + i\zeta f_2(t)} dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t) \left(i\xi \frac{g(t)}{\sigma(t)} - i\zeta \frac{1}{\sigma(t)} \right) e^{i\xi f_1(t) + i\zeta f_2(t)} dt \tag{5}$$

относительно образа Фурье $U(\xi, \zeta)$ *искомой функции.*

Доказательство. Пусть ν — непрерывная функция. Введем распределение δ_S, действующее на любую основную функцию φ по правилу

$$(\nu\delta_S, \varphi) = \int_S \nu(s)\varphi(s)ds.$$

Тогда обобщенный лапласиан можно записать в виде ([9], с. 116)

$$\Delta u = \{\Delta u\} - \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S \delta_S - \frac{\partial}{\partial n}\left([u]_S\delta_S\right), \tag{6}$$

где $[u]_S(\vartheta) = \lim\limits_{\vartheta'\to\vartheta,\ \vartheta'\in D^+} u(\vartheta') - \lim\limits_{\vartheta'\to\vartheta,\ \vartheta'\in D^-} u(\vartheta')$, $\vartheta \in S$, — скачок функции при переходе через поверхность S из области D^+ в D^-. Подобным образом записывается и скачок производной $[\partial u/\partial n]_S$.

Применим преобразование Фурье к выражению (6). Выпишем образ Фурье второго слагаемого в правой части (6)

$$\left(F\left(\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S \delta_S\right), \varphi\right) = \left(\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S \delta_S\ , F\varphi\right) = \left(\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S \delta_S\ , \int \varphi(\vartheta)e^{i(\vartheta,x)}d\vartheta\right) =$$
$$= \int \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S \delta_S \int \varphi(\vartheta)e^{i(\vartheta,\vartheta')}d\vartheta d\vartheta' = \iint \varphi(\xi,\zeta)\int_S \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S e^{i\xi f_1(t)+i\zeta f_2(t)}dt\,d\xi\,d\zeta,$$

получим

$$F\left(\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S \delta_S\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\left(f_1(t), f_2(t)\right)\right]_S e^{i\xi f_1(t)+i\zeta f_2(t)}dt.$$

Для образа Фурье последнего слагаемого в (6)

$$\left(F\frac{\partial}{\partial n}\left([u]_S\,\delta_S\right), \varphi\right) = \left(\frac{\partial}{\partial n}\left([u]_S\,\delta_S\right), F\varphi\right) = -\int_S [u]_S \frac{\partial}{\partial n}\int \varphi(\vartheta)e^{i(\vartheta,\vartheta')}d\vartheta\,ds =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\left(f_1(t), f_2(t)\right)\right]_S\left(\cos(n,x)\iint \varphi(\xi,\zeta)i\xi e^{i\xi f_1(t)+i\zeta f_2(t)}d\xi d\zeta + \right.$$
$$\left. + \cos(n,z)\iint \varphi(\xi,\zeta)i\zeta e^{i\xi f_1(t)+i\zeta f_2(t)}d\xi d\zeta\right)dt.$$

Используем (2) и (3) и запишем полученное выражение в параметрическом виде

$$F\frac{\partial}{\partial n}\left([u]_S\,\delta_S\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left[u\left(f_1(t), f_2(t)\right)\right]_S\left(-i\xi\frac{g(t)}{\sigma(t)} + i\zeta\frac{1}{\sigma(t)}\right)e^{i\xi f_1(t)+i\zeta f_2(t)}dt. \qquad \square$$

Пусть функция $\gamma(\xi) = \{i\sqrt{\xi^2-k^2}$ при $|\xi| > k$; $-\sqrt{k^2-\xi^2}$ при $|\xi| \le k\}$.

Теорема 2. *Решение задачи Коши* (1), (4) *имеет вид*

$$u(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)K_1(t;x,z)dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)K_0(t;x,z)dt, \tag{7}$$

где ядро первого интеграла

$$K_1(t;x,z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{|\xi|>k}\frac{1}{2\gamma(\xi)}e^{i\gamma(\xi)(f_2(t)-z)+i\xi(f_1(t)-x)}d\xi, & z < f_2(t), \\ \displaystyle\int_{|\xi|>k}\frac{1}{2\gamma(\xi)}e^{i\xi(f_1(t)-x)}d\xi, & z = f_2(t), \\ K_1^1(t;x,z), & z > f_2(t), \end{cases} \tag{8}$$

$$K_1^1(t;x,z) = \int_{|\xi|>k} \frac{1}{2\gamma(\xi)} e^{i\gamma(\xi)(z-f_2(t))+i\xi(f_1(t)-x)} d\xi + \\ + i\int_{|\xi|<k} \frac{1}{\gamma(\xi)} \sin\left[(z-f_2(t))\gamma(\xi)\right] e^{i\xi(f_1(t)-x)} d\xi$$

и ядро второго интеграла

$$K_0(t;x,z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{|\xi|>k} \left[\frac{i\xi}{2\gamma(\xi)}\frac{g(t)}{\sigma(t)} - \frac{i}{2\sigma(t)}\right] e^{i\gamma(\xi)(f_2(t)-z)+i\xi(f_1(t)-x)} d\xi, & z < f_2(t), \\ \displaystyle\frac{ig(t)}{2\sigma(t)} \int_{|\xi|>k} \frac{\xi}{\gamma(\xi)} e^{i\xi(f_1(t)-x)} d\xi + \frac{i}{2\sigma(t)} \int_{|\xi|<k} e^{i\xi(f_1(t)-x)} d\xi, & z = f_2(t), \\ K_0^1(t;x,z), & z > f_2(t), \end{cases} \tag{9}$$

$$K_0^1(t;x,z) = \int_{|\xi|>k} \left[\frac{i\xi}{2\gamma(\xi)}\frac{g(t)}{\sigma(t)} + \frac{i}{2\sigma(t)}\right] e^{i\gamma(\xi)(z-f_2(t))+i\xi(f_1(t)-x)} d\xi + \\ + \int_{|\xi|<k} \left[\frac{i}{\sigma(t)} \cos\left[(z-f_2(t))\gamma(\xi)\right] - \frac{\xi}{\gamma(\xi)}\frac{g(t)}{\sigma(t)} \sin\left[(z-f_2(t))\gamma(\xi)\right]\right] e^{i\xi(f_1(t)-x)} d\xi.$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$h(\omega, f_2(t)-z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\zeta(f_2(t)-z)}}{\zeta+\omega} d\zeta.$$

Найдем образ Фурье $U(\xi,\zeta)$ из формулы (5). Если множитель $k^2-\xi^2-\zeta^2$ не имеет вещественных корней, то разделим на него правую и левую части уравнения. Если же вещественные корни есть, то используем метод выхода по ζ в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости. Далее, применим обратное преобразование Фурье по обоим переменным и получим

$$u(x,z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\xi|>k} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(a_1(t) + i\xi \frac{g(t)}{\sigma(t)} a_0(t)\right) \times \right. \\ \times \left(h(\gamma(\xi), f_2(t)-z) - h(-\gamma(\xi), f_2(t)-z)\right) e^{i\xi f_1(t)} \frac{dt}{2\gamma(\xi)} - \\ \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\sigma(t)} a_0(t) \left(-h(-\gamma(\xi), f_2(t)-z) - h(\gamma(\xi), f_2(t)-z)\right) e^{i\xi f_1(t)} dt \right] e^{-i\xi x} d\xi + \\ + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{|\xi|<k} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(a_1(t) + i\xi \frac{g(t)}{\sigma(t)} a_0(t)\right) \times \right. \\ \times \left(h(i0+\gamma(\xi), f_2(t)-z) - h(i0-\gamma(\xi), f_2(t)-z)\right) e^{i\xi f_1(t)} \frac{dt}{2\gamma(\xi)} + \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{2\sigma(t)} a_0(t) \left(h(i0+\gamma(\xi), f_2(t)-z) + h(i0-\gamma(\xi), f_2(t)-z)\right) e^{i\xi f_1(t)} dt \right] e^{-i\xi x} d\xi.$$

Вычислим интегралы, представляющие собой значения функции $h(\gamma(\xi), f_2(t)-z)$. При $|\xi| > k$

$$h\left(\gamma(\xi), f_2(t)-z\right) = \begin{cases} 0, & z < f_2(t), \\ -\pi i, & z = f_2(t), \\ -2\pi i e^{i(z-f_2(t))\gamma(\xi)}, & z > f_2(t). \end{cases}$$

Интеграл $h(ia, f_2(t)-z)$ при $z = f_2(t)$ для произвольного вещественного $a > 0$ вычисляется следующим образом:

$$h(ia, f_2(t)-z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta + ia} d\zeta = \lim_{\zeta\to+\infty} \ln(\zeta + ia) - \lim_{\zeta\to-\infty} \ln(\zeta + ia) = \\ = \lim_{R\to+\infty} \left(\ln Re^{i0} - \ln Re^{i\pi}\right) = \lim_{R\to+\infty} (\ln R - \ln R - i\pi) = -i\pi,$$

а при $z \neq f_2(t)$ — методом вычетов.

Аналогичным образом можно показать, что

$$h(-\gamma(\xi), f_2(t)-z) = \begin{cases} +2\pi i e^{i(f_2(t)-z)\gamma(\xi)}, & z < f_2(t), \\ +\pi i, & z = f_2(t), \\ 0, & z > f_2(t). \end{cases}$$

В случае же $|\xi| < k$

$$h(+i0 \pm \gamma(\xi), f_2(t)-z) = \begin{cases} 0, & z < f_2(t), \\ -\pi i, & z = f_2(t), \\ -2\pi i e^{\pm i(z-f_2(t))\gamma(\xi)}, & z > f_2(t). \end{cases}$$

Тогда

$$u(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|>k}\left[\frac{1}{2\gamma(\xi)}\int_{z<f_2(t)}\left(a_1(t) + i\xi\frac{g(t)}{\sigma(t)}a_0(t)\right)e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}(f_2(t)-z)+i\xi f_1(t)}dt + \right. \\ + \frac{1}{2\gamma(\xi)}\int_{z>f_2(t)}\left(a_1(t) + i\xi\frac{g(t)}{\sigma(t)}a_0(t)\right)e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}(z-f_2(t))+i\xi f_1(t)}dt - \\ - \int_{z<f_2(t)}\frac{ia_0(t)}{2\sigma(t)}e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}(f_2(t)-z)+i\xi f_1(t)}dt + \int_{z>f_2(t)}\frac{ia_0(t)}{2\sigma(t)}e^{-\sqrt{\xi^2-k^2}(z-f_2(t))+i\xi f_1(t)}dt + \\ \left. + \frac{1}{2\gamma(\xi)}\int_{z=f_2(t)}\left(a_1(t) + i\xi\frac{g(t)}{\sigma(t)}a_0(t)\right)e^{+i\xi f_1(t)}dt\right]e^{-i\xi x}d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|<k}\left[\frac{1}{2\gamma(\xi)}\int_{z>f_2(t)}\left(a_1(t) + i\xi\frac{g(t)}{\sigma(t)}a_0(t)\right)2i\sin\left[\gamma(\xi)(z-f_2(t))\right]e^{i\xi f_1(t)}dt + \right. \\ \left. + \int_{z>f_2(t)}\frac{ia_0(t)}{\sigma(t)}\cos\left[\gamma(\xi)(z-f_2(t))\right]e^{i\xi f_1(t)}dt + \int_{z=f_2(t)}\frac{ia_0(t)}{2\sigma(t)}e^{i\xi f_1(t)}dt\right]e^{-i\xi x}d\xi. \qquad \square$$

Выразим ядра интегралов правой части (7) через функции Бесселя, воспользовавшись следующими формулами:

$$\int_{|x|>k}\frac{e^{i\xi x}}{\sqrt{x^2-k^2}}dx = -\pi Y_0(k|\xi|), \quad \int_{|x|>k}\frac{x\,e^{i\xi x}}{\sqrt{x^2-k^2}}dx = -i\pi k\,\mathrm{sign}\,(\xi)Y_1(k|\xi|), \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(x-x')\xi+i|z-z'|\sqrt{k^2-\xi^2}}}{\sqrt{k^2-\xi^2}}d\xi = \pi H_0^{(1)}(kr), \quad r = \sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x')\xi+i|z-z'|\sqrt{k^2-\xi^2}}d\xi = i\pi k\frac{|z-z'|}{r}H_1^{(1)}(kr), \tag{12}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi}{\sqrt{k^2-\xi^2}}e^{i(x-x')\xi+i|z-z'|\sqrt{k^2-\xi^2}}d\xi = i\pi k\frac{x-x'}{r}H_1^{(1)}(kr). \tag{13}$$

Первый интеграл в (10) содержится в справочнике ([10], с. 134), второй получается из первого в силу свойств преобразования Фурье и свойств бесселевых функций. Интеграл (11) вычислен в ([11], с. 126), в нем ветвь корня $\sqrt{k^2-\xi^2}$ при $|\xi|<k$ выбрана положительной. Интегралы (12) и (13) получаются непосредственным дифференцированием интеграла (11) по z и по x соответственно.

Для функции $K_1(t;x,z)$, определенной формулой (8), при $z\neq f_2(t)$ дополним интеграл до бесконечного и воспользуемся формулой (11), а для случая $z=f_2(t)$ — первой формулой (10). Получим

$$K_1(t;x,z)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}H_0^{(1)}(kr')+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{|\xi|<k}\frac{1}{\gamma(\xi)}e^{-i(f_2(t)-z)\gamma(\xi)+i(f_1(t)-x)\xi}d\xi, & z\neq f_2(t),\\ \dfrac{i\pi}{2}Y_0\left(k\left|f_1(t)-x\right|\right), & z=f_2(t),\end{cases} \tag{14}$$

где $r'=\sqrt{(x-f_1(t))^2+(z-f_2(t))^2}$.

Преобразуем выражение для $K_0(t;x,z)$ (9) при $z\neq f_2(t)$ следующим образом. Дополним интегралы в правой части до бесконечных и выразим их через функции Бесселя по формулам (12) и (13), используем вторую формулу (10) при $z=f_2(t)$ и получим

$$K_0(t;x,z)=\begin{cases}\dfrac{\pi k}{2r'}\left[-\dfrac{g(t)}{\sigma(t)}(f_1(t)-x)+\dfrac{1}{\sigma(t)}(f_2(t)-z)\right]H_1^{(1)}(kr')+ & \\ \qquad+\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_{|\xi|<k}\left[\frac{\xi}{\gamma(\xi)}\frac{g(t)}{\sigma(t)}+\frac{1}{\sigma(t)}\right]e^{-i(f_2(t)-z)\gamma(\xi)+i(f_1(t)-x)\xi}d\xi, & z\neq f_2(t),\\ -i\pi k\dfrac{g(t)}{2\sigma(t)}\operatorname{sign}(f_1(t)-x)Y_1(k\left|f_1(t)-x\right|)+\dfrac{i\sin\left[k(f_1(t)-x)\right]}{\sigma(t)(f_1(t)-x)}, & z=f_2(t).\end{cases} \tag{15}$$

Заметим, что формула (7) представляет собой формулу Грина. Для доказательства достаточно равенства

$$K_0(t;x,z)=\frac{\partial K_1(t;x,z)}{\partial n},$$

которое получается непосредственно при вычислении нормальной производной функции $K_1(t;x,z)$ при $z\neq f_2(t)$, а при $z=f_2(t)$ следует воспользоваться формулой Сохоцкого.

3. Связь между граничными значениями

Будем предполагать, что все функции гармонически зависят от времени, и эта зависимость имеет вид $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота. В таком случае функция e^{-iaz} с положительным a, характеризующим частоту осцилляций вдоль оси z, определяет волну, распространяющуюся в направлении оси z. Функция e^{+iaz} определяет волну, двигающуюся в противоположном направлении.

Условие на бесконечности сводится к следующему: или в решении задачи Коши не содержится волн, приходящих с бесконечности на линию $z=h$ (условие излучения), или в решении задачи не содержится волн, уходящих с этой линии на бесконечность. Покажем, что для переопределенной граничной задачи условие на бесконечности сводится к некоторой зависимости между следами на границе искомой функции и ее нормальной производной.

Теорема 3. *Условие излучения выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}a_1(t)\,e^{i\gamma(\xi)f_2(t)+i\xi f_1(t)}dt-i\int_{-\infty}^{+\infty}a_0(t)\left(\frac{\gamma(\xi)}{\sigma(t)}-\xi\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)e^{i\gamma(\xi)f_2(t)+i\xi f_1(t)}dt=0,\quad |\xi|<k. \tag{16}$$

Решение переопределенной задачи не содержит волн, уходящих на бесконечность, тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)\, e^{-i\gamma(\xi)f_2(t)+i\xi f_1(t)}dt + i\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)\left(\frac{\gamma(\xi)}{\sigma(t)} + \xi\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right) e^{-i\gamma(\xi)f_2(t)+i\xi f_1(t)}dt = 0, \quad |\xi| < k. \tag{17}$$

Доказательство. Выделим в представлении (7) части, соответствующие уходящим на бесконечность волнам

$$u^{\uparrow}(x,z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)\int_{|\xi|<k}\frac{1}{\gamma(\xi)}e^{+i(z-f_2(t))\gamma(\xi)+i(f_1(t)-x)\xi}d\xi\, dt + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)\int_{|\xi|<k}\left(\frac{1}{\sigma(t)} + \frac{\xi}{\gamma(\xi)}\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)e^{+i(z-f_2(t))\gamma(\xi)+i(f_1(t)-x)\xi}d\xi\, dt$$

и приходящим с бесконечности волнам

$$u^{\downarrow}(x,z) = -\frac{1}{4\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)\int_{|\xi|<k}\frac{1}{\gamma(\xi)}e^{-i(z-f_2(t))\gamma(\xi)+i(f_1(t)-x)\xi}d\xi\, dt + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)\int_{|\xi|<k}\left(\frac{1}{\sigma(t)} - \frac{\xi}{\gamma(\xi)}\frac{g(t)}{\sigma(t)}\right)e^{-i(z-f_2(t))\gamma(\xi)+i(f_1(t)-x)\xi}d\xi\, dt.$$

Для того чтобы были выполнены условия на бесконечности, или функция $u^{\downarrow}(x,z)$, или функция $u^{\uparrow}(x,z)$ должны обращаться в нуль при $z \geq h$, где $h = \max f_2(t)$. Отсюда следуют формулы (16) и (17).

Следствие. Если условие излучения выполнено, то функция $u(x,z)$ при $z > h$ имеет вид

$$u(x,z) = \frac{1}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)H_0^{(1)}(kr')dt + \frac{k}{4i}\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)\frac{g(t)(f_1(t)-x)+(f_2(t)-z)}{\sigma(t)r'}H_1^{(1)}(kr')dt.$$

Для доказательства достаточно в выражение (7) для $u(x,z)$ подставить функции $K_1(t;x,z)$ (14) и $K_0(t;x,z)$ (15) и воспользоваться формулой (16).

Теорема 4. *Распределение $u(x,z)$ является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда граничные функции удовлетворяют или условию*

$$\pi i\, a_0(w) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)K_0(t;f_1(w),f_2(w))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)K_1(t;f_1(w),f_2(w))dt, \tag{18}$$

или условию

$$\pi i\, a_1(w) - \frac{\partial}{\partial n}\int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t)K_1(t;f_1(w),f_2(w))dt = \frac{\partial}{\partial n}\int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)K_0(t;f_1(w),f_2(w))dt, \tag{19}$$

а также условию на бесконечности (16) *или* (17).

Для доказательства формул (18) и (19) необходимо найти предельные значения на границе (4) функции $u(x,z)$, определенной формулой (7).

4. Частный случай. Прямолинейная граница

Для проверки полученных формул рассмотрим случай, когда граница S совпадает с прямой линией. В этом случае функции, задающие границу параметрически, имеют вид $f_1(t) = t$, $f_2(t) = 0$. Отсюда следует, что $g(t) = 0$ и $\sigma(t) = 1$.

Начнем с условий на бесконечности. Нетрудно заметить, что уравнения (16) и (17) преобразуются к виду

$$A_1(\xi) \mp i\gamma(\xi)A_0(\xi) = 0,\ |\xi| < k, \tag{20}$$

здесь $A_0(\xi)$, $A_1(\xi)$ — образы Фурье граничных функций.

Запишем ядра интегрального представления решения задачи Коши (7). Получим из формулы (8)

$$K_1(t;x,z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{|\xi|>k} \frac{1}{2\gamma(\xi)} e^{-i\gamma(\xi)z+i\xi(t-x)}d\xi, & z<0,\\ \displaystyle\int_{|\xi|>k} \frac{1}{2\gamma(\xi)} e^{i\xi(t-x)}d\xi, & z=0,\\ \displaystyle\int_{|\xi|>k} \frac{1}{2\gamma(\xi)} e^{i\gamma(\xi)z+i\xi(t-x)}d\xi + i\int_{|\xi|<k} \frac{\sin\gamma(\xi)z}{\gamma(\xi)}\ e^{i\xi(t-x)}d\xi, & z>0, \end{cases} \tag{21}$$

и из формулы (9)

$$K_0(t;x,z) = \begin{cases} \displaystyle -\frac{i}{2}\int_{|\xi|>k} e^{-i\gamma(\xi)z+i\xi(t-x)}d\xi, & z<0,\\ \displaystyle \frac{i}{2}\int_{|\xi|<k} e^{i\xi(t-x)}d\xi, & z=0,\\ \displaystyle \frac{i}{2}\int_{|\xi|>k} e^{i\gamma(\xi)z+i\xi(t-x)}d\xi + i\int_{|\xi|<k} \cos\gamma(\xi)z\ e^{i\xi(t-x)}d\xi, & z>0. \end{cases} \tag{22}$$

Подставим в формулу (18) представления для функций $K_1(t;x,z)$ (21) и $K_0(t;x,z)$ (22). Имеем

$$\pi i\, a_0(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} a_0(t)\frac{i}{2}\int_{|\xi|<k} e^{i\xi(t-x)}d\xi\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} a_1(t) \int\limits_{|\xi|>k} \frac{1}{2\gamma(\xi)} e^{i\xi(t-x)}d\xi\, dt, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Перейдем под интегралами к образам Фурье

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\, a_0(x) - \frac{i}{2}\int_{|\xi|<k} A_0(\xi)e^{-i\xi x}d\xi = \int_{|\xi|>k} \frac{1}{2\gamma(\xi)}A_1(\xi)e^{-i\xi x}d\xi, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Применим к последнему равенству преобразование Фурье

$$\pi i\, A_0(\zeta) - \pi i\int_{|\xi|<k} A_0(\xi)\delta(\xi-\zeta)d\xi = \pi\int_{|\xi|>k} \frac{1}{\gamma(\xi)}A_1(\xi)\delta(\xi-\zeta)d\xi, \quad -\infty < \zeta < +\infty.$$

Воспользуемся свойством дельта-распределений и получим

$$A_1(\zeta) = i\,\gamma(\zeta)A_0(\zeta), \quad |\zeta| > k. \tag{23}$$

Формулы (20) и (23) совпадают с результатами, установленными для случая полуплоскости в работе [12].

Литература

[1] Zhang B., Chandler-Wilde S.N. *Acoustic scattering by an inhomogeneous layer on a rigid plate* // SIAM J. Appl. Math. – 1998. – V. 58. – № 6. – P. 1931–1950.

[2] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* – М.: Мир, 1987. – 311 с.

[3] Benali A., Chandezon J., Fontaine J. *A new theory for scattering of electromagnetic waves from conducting or dielectric rough surfaces* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. – 1992. – V. 40. – P. 141–148.

[4] Cao P., Macaskill C. *Iterative techniques for rough surface scattering problems* // Wave Motion. – 1995. – V. 21. – P. 209–229.

[5] Липачёв Е.К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 4. – С. 69–72.

[6] Липачёв Е.К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Препринт ПМФ-05-01. Казанск. матем. об-во. – Казань, 2005. – 26 с.

[7] Липачёв Е.К. *Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в областях с неровной границей* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 9. – С. 43–49.

[8] Тумаков Д.Н. *Интегральное уравнение задачи дифракции электромагнитной волны на криволинейном металлическом экране* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Казанск. матем. об-во. – Казань, 2001. – С. 218–225.

[9] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 512 с.

[10] Брычков Ю.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования обобщенных функций.* – М.: Наука, 1977. – 288 с.

[11] Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. *Теория дифракции.* – М.: Мир, 1964. – 428 с.

[12] Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. *Граничные задачи для уравнения Гельмгольца в квадранте и в полуплоскости, составленной из двух квадрантов* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 7. – С. 63–74.

Д.Н.Тумаков

старший научный сотрудник, отдел прикладной математической физики,
НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, д. 1/37,

`e-mail:` Dmitri.Tumakov@ksu.ru

D.N.Tumakov

Senior Researcher, Department of Applied Mathematical Physics,
Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan State University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Dmitri.Tumakov@ksu.ru