УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 1 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 51–65 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 510.5

Σ-СВОДИМОСТЬ И lm-СВОДИМОСТЬ МНОЖЕСТВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МНОЖЕСТВ

Д.Х. Зайнетдинов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе изучены предельно монотонные множества, пары множеств, а также последовательности, состоящие из бесконечных множеств. Исследованы основные свойства предельно монотонной сводимости между двумя множествами, между множеством и парой множеств, определенной в терминах Σ-сводимости соответствующих семейств специального вида. Кроме того, получено описание Σ-сводимости семейств специального вида в терминах lm-сводимости и показана взаимосвязь понятий lm-сводимости последовательностей множеств и Σ-сводимости семейств специального вида для данных последовательностей множеств.

Ключевые слова: вычислимая функция, Σ-сводимость, предельно монотонная функция, предельно монотонные множества, предельно монотонная сводимость, последовательность бесконечных множеств, семейство подмножеств натуральных чисел

Введение

Работа посвящена изучению основных свойств предельно монотонных множеств, пар множеств и последовательностей множеств, а также исследованию предельно монотонной сводимости (для краткости будем обозначать через lm-сводимость) между последовательностями множеств. Рассмотрена взаимосвязь между понятиями lm-сводимости на последовательностях множеств и Σ-сводимости на семействах специального вида для данных последовательностей. Таким образом, в настоящей работе будет дано полное описание lm-сводимости в терминах Σ-сводимости.

В работе [1] введено кодирование семейств подмножеств $\mathbb{N}$ в алгебраические структуры с сохранением алгебраических свойств. И.Ш. Калимуллин и В.Г. Пузаренко в совместной работе [2] ввели понятие Σ-сводимости семейств, которое соответствует Σ-определимости конечно-наследственных надстроек отвечающих этим семействам структур, а именно:

Определение 1. Семейство $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ будет Σ-*сводиться* к семейству $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, если существуют такие оператор перечисления Φ и элементы $Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{G}$, что

$$\mathcal{F} \bigcup \{\emptyset\} = \{\Phi(\{\langle n,k\rangle\} \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m \oplus E(\mathcal{G})) :\ n,k \in \mathbb{N}\ \&\ X_1, \dots, X_n \in \mathcal{G}\},$$

где

$$E(\mathcal{G}) = \{2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_t} :\ t \in \mathbb{N}\ \&\ x_1 < x_2 < \cdots < x_t\ \&\ \&\ (\exists X \in \mathcal{G})(\{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subseteq X)\}.$$

В связи с изучением предельно монотонного множества (см. [3]) возникло понятие lm-сводимости на множествах. В настоящей работе lm-сводимость между множествами будет рассмотрена на основе Σ-сводимости соответствующих семейств начальных сегментов для этих множеств. Более того, данный результат будет обобщен на случай последовательностей множеств.

В первой части работы рассматривается понятие Σ-сводимости семейств подмножеств натуральных чисел, введенное в [2]. Кроме того, доказывается эквивалентность понятий Σ-сводимости и lm-сводимости для двух множеств, определенной с помощью предельно монотонного оператора. Во второй части работы будут исследованы lm-сводимость и Σ-сводимость множества к паре множеств. Здесь же будет доказана эквивалентность этих двух понятий. Кроме того, приводятся результаты, полученные при изучении lm-сводимости между парами множеств. В третьей части понятия Σ-сводимости и lm-сводимости будут обобщены на случай последовательностей, состоящих из бесконечных множеств. Основные сведения, полученные при изучении предельно монотонных функций, множеств и последовательностей, можно найти в работах [3–5]. Помимо этого, несколько интересных результатов, касающихся вопросов lm-сводимости множеств, были получены в работе [6]. Что же касается основных обозначений, то мы будем придерживаться в основном работ [2] и [7].

В настоящей статье через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество натуральных чисел. Запись $\mathbb{N}_n$ будет обозначать первые n чисел натурального ряда. Через $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^X$ обозначим множество всех подмножеств множества X. Под семейством $\mathcal{S}$ будем понимать подмножество $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Малые греческие буквы φ, ψ, θ используются для обозначения частичных функций. Для частичной функции φ и аргумента x записываем $\varphi(x)\downarrow$, если функция φ определена на аргументе x; в противном случае будем писать $\varphi(x)\uparrow$. Для множества A его характеристическую функцию обозначим через χ_A; будем отождествлять A с его характеристической функцией, обозначая её в виде $A(x)$. Ограничение функции f на аргументы $y < x$ записываем в виде $f \upharpoonright x$; запись $A \upharpoonright x$ означает $\chi_A \upharpoonright x$. Для A, $B \subseteq \mathbb{N}$ под *сочленением* $A \oplus B$ мы, как обычно, понимаем множество

$$\{2x : x \in A\} \bigcup \{2x+1 : x \in B\}.$$

Пусть заданы подмножества натуральных чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n > 2$. Тогда $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = A_1 \oplus (A_2 \oplus \cdots \oplus A_n)$. Образ пары (x,y) относительно стандартной функции пары $(x^2+2xy+y^2+3x+y)/2$ обозначим через $\langle x, y\rangle$. Малыми греческими буквами ρ и τ будем обозначать конечные строки из $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Для строки ρ через $|\rho|$ обозначим её длину. Для обозначения множества всех конечных последовательностей над множеством A используется запись $A^{<\mathbb{N}}$.

1. Σ-сводимость и lm-сводимость множеств

В этом разделе покажем, что определение lm-сводимости двух множеств эквивалентно определению Σ-сводимости семейств начальных сегментов для данных множеств. Сначала приведём определения предельно монотонной функции, предельно монотонного оператора и lm-сводимости двух множеств [7].

Определение 2. Функция $\overline{\theta} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *предельно монотонной*, если существует такая частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всех x и s выполняются следующие соотношения:

(i) $\forall t \geqslant s : \ \theta(x,s)\downarrow \& \, \theta(x,t)\downarrow \Rightarrow \theta(x,s) \leqslant \theta(x,t)$;

(ii) $\overline{\theta}(x) = \max_t \theta(x,t) < \infty$ (считаем $\max \emptyset = 0$).

Пустое множество и множество, являющееся областью значения предельно монотонной функции, называются *предельно монотонными.*

Определение 3. Отображение $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ называется *предельно монотонным оператором*, если существует частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющая для всех $\rho \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ и $s \in \mathbb{N}$ условиям

(i) $\forall \tau \geqslant \rho,\ \forall t \geqslant s:\ \theta(\rho, s)\downarrow \ \&\, \theta(\tau, t)\downarrow \Rightarrow \theta(\rho, s) \leqslant \theta(\tau, t)$;

(ii) $\overline{\theta}(\rho) = \max\limits_t \theta(\rho, t) < \infty$;

(iii) $\forall X \subseteq \mathbb{N}:\ \Theta\langle X\rangle = \{\overline{\theta}(\rho) : \rho \in X^{<\mathbb{N}}\}$.

Определение 4. Множество A назовём *lm-сводимым* к множеству B (обозначается как $A \leqslant_{lm} B$), если $A = \emptyset$ или $A = \Theta\langle B\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ.

Рассмотрим подробнее понятие Σ*-сводимости* для семейств множеств. Пусть даны два произвольных множества A и B. Возьмём в качестве семейств для множеств A и B специальные семейства начальных сегментов $\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\}$ и $\mathcal{S}(B) = \{\mathbb{N} \restriction b : b \in B\}$. Для заданного семейства $\mathcal{S}(B)$ множество $E(\mathcal{S}(B))$ из определения 1 является вычислимо перечислимым. Кроме того, элементами семейства $\mathcal{S}(B)$ являются только вычислимо перечислимые множества. Следовательно, для семейства $\mathcal{S}(B)$ в определении 1 в $\mathcal{S}$-кортеже можно опустить множества Y и $E(\mathcal{S}(B))$. Тогда Σ-сводимость между семействами начальных сегментов множеств A и B можно записать с помощью оператора перечисления Φ в виде

$$\{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\} = \{\Phi(\{\langle n, k\rangle\} \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n) \mid n, k \in \mathbb{N}\}, \tag{1}$$

где $X_i = \{\mathbb{N} \restriction b_i : b_i \in B\},\ i \in \mathbb{N}_n$.

Равенство (1) перепишем в виде

$$\{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\} = \{\Phi(\{n\} \oplus \mathbb{N} \restriction b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{N} \restriction b_n) \mid n \in \mathbb{N};\ b_1, \ldots, b_n \in B\}. \tag{2}$$

Заметим, что $x \in \mathcal{S}(A)$ тогда и только тогда, когда существует конечное множество F, для которого выполнено условие $[\langle x, F\rangle \in W \ \&\ \ F \subseteq \mathcal{S}(B)]$. Здесь множество F отождествляется с его номером в канонической нумерации всех конечных множеств, а $\langle x, F\rangle$ – упорядоченная пара. Если зафиксировать некоторое вычислимо перечислимое множество $W_n, n \in \mathbb{N}$, то условие $[\langle x, F\rangle \in W \ \&\ \ F \subseteq \mathcal{S}(B)]$ при $W = W_n$ будет определять такой оператор перечисления Φ_n, что $\mathcal{S}(A) = = \Phi_n(\mathcal{S}(B))$. Тогда для семейств $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}(B)$ имеем, что $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B)$, если и только если $\mathcal{S}(A) = \Phi_n(\mathcal{S}(B))$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Элементы W_n называются также аксиомами оператора Φ_n. Поскольку задание множества аксиом эквивалентно заданию соответствующего оператора перечисления, будем отождествлять множество W_n и оператор Φ_n.

Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между понятиями lm-сводимости двух множеств и Σ-сводимости между специальными семействами для данных множеств.

Теорема 1. *$A \leqslant_{lm} B$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A \leqslant_{lm} B$. Это означает, что $A = = \Theta\langle B\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ. В силу приведенных выше определений предельно монотонного оператора и предельно монотонной функции имеем

$$A = \Theta\langle B\rangle = \{\overline{\theta}(\rho) : \rho \in B^{<\mathbb{N}}\} = \{\max_t \theta(\rho, t) < \infty : \rho \in B^{<\mathbb{N}},\ t \in \mathbb{N}\},$$

где $\overline{\theta}$ является предельно монотонной функцией.

Покажем, что $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B)$, то есть докажем справедливость равенства (2).

Определим оператор перечисления Φ:

$$\Phi = \{(\langle x, \{n\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_n \rangle) \mid \overline{\theta}(b_1 b_2 \dots b_n) = \max_t \theta(b_1 b_2 \dots b_n, t) \geqslant x\}, \quad (3)$$

где $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_n$. Отметим, что предикат $\max\limits_t \theta(b_1 b_2 \dots b_n, t) \geqslant x$ является вычислимо перечислимым. Покажем, что определенный в (3) оператор Φ задает семейство начальных сегментов множества A.

Предположим, что $A \neq \emptyset$. В силу условия теоремы следует, что для любого элемента $a \in A$ верно представление $a = \max_t \theta(b_1 b_2 \dots b_n, t)$, где $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_n$. Другими словами, a есть значение максимума частично вычислимой функции θ для некоторой строки $\rho = b_1 b_2 \dots b_n$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_n$.

Тогда $\mathbb{N} \upharpoonright a = \Phi(\{n\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_n)$, где $\mathbb{N} \upharpoonright b_i \in \mathcal{S}(B)$, $i \in \mathbb{N}_n$. Таким образом, элементы семейства $\mathcal{S}(A)$ задаются с помощью оператора Φ с использованием кортежей, составленных из элементов семейства $\mathcal{S}(B)$.

Обратно, рассмотрим произвольное множество $X = \Phi(\{n\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_n)$, где $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_n$. Тогда $X = \mathbb{N} \upharpoonright a$ и $a = \max_t \theta(b_1 b_2 \dots b_n, t)$. Таким образом, $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B)$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B)$. Тогда $\mathcal{S}(A) \bigcup \{\emptyset\} = \{\Phi(X) \mid X \in K_{\mathcal{S}(B)}\}$ для некоторого e-оператора Φ. Σ-сводимость между семействами начальных сегментов для множеств A и B можно записать с помощью оператора перечисления Φ в следующем виде:

$$\{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\} = \{\Phi(\{\langle n, k \rangle\} \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_n) \mid n, k \in \mathbb{N}\}, \quad (4)$$

где $X_i = \{\mathbb{N} \upharpoonright b_i : b_i \in B\}$ для $i \in \mathbb{N}_n$.

Покажем, что $A \leqslant_{lm} B$. Пусть $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ – вычислимое перечисление множества Φ, то есть $\Phi = \bigcup\limits_t \Phi_t$ и $\Phi_t \subseteq \Phi_{t+1}$.

Рассмотрим некоторую строку $\rho \in B^{<\mathbb{N}}$ длины $m \in \mathbb{N}$, то есть $\rho = b_1 b_2 \dots b_m$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_m$. Тогда длину строки можно раскодировать на левую $l(m) = n$ и правую $r(m) = k$ компоненты.

Пусть $\langle n, k \rangle$ – номер пары (n, k) в канторовской нумерации всех пар натуральных чисел. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такая пара (n, k), $n, k \in \mathbb{N}$, что $m = \langle n, k \rangle$.

Определим функцию $\theta(b_1 b_2 \dots b_m, t)$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_m$, как максимальное значение x, для которого $\langle x, F \rangle \in \Phi_t$ – такая аксиома, что $\{\langle n, k \rangle\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_n \subseteq F$. Таким образом, n – число первых элементов $b_1, b_2, \dots, b_n$ из строки $b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots b_m$. Следовательно, функция $\theta(b_1 b_2 \dots b_m, t)$ зависит лишь от первых n элементов строки $b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots b_m$ и не зависит от элементов $b_{n+1}, \dots, b_m$. Кроме того, функция $\theta(b_1 b_2 \dots b_m, t)$ является возрастающей.

Проверим, что $A = \Theta\langle B \rangle = \{\overline{\theta}(\rho) : \rho \in B^{<\mathbb{N}}\}$ для некоторой предельно монотонной функции $\overline{\theta}$. Пусть $a \in A$. Тогда $\mathbb{N} \upharpoonright a \in \mathcal{S}(A)$. В силу того, что $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(B)$, имеем $\{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\} = \Phi(\{\langle n, k \rangle\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_n)$, где $\mathbb{N} \upharpoonright b_i \in \mathcal{S}(B)$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $m = \langle n, k \rangle$. Доопределим строку $b_1 b_2 \dots b_n$ до $b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots b_m$, полагая $b_i = b_n$ для $i = n+1, \dots, m$. Тогда $a = \overline{\theta}(b_1 b_2 \dots b_m) = \max\limits_t \theta(b_1 b_2 \dots b_m, t)$, где $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_m$. Отсюда следует, что $a \in \Theta\langle B \rangle$.

Обратно, пусть $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_m$ и $\overline{\theta}(b_1 b_2 \dots b_m) = a$, то есть $a \in \Theta\langle B \rangle$. Поэтому в силу Σ-сводимости между $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}(B)$ получим, что $\mathbb{N} \upharpoonright a = \Phi(\{\langle n, k \rangle\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_n)$ и $\mathbb{N} \upharpoonright a \in \mathcal{S}(A)$. Следовательно, $a \in A$.

Итак, $A \leqslant_{lm} B$ посредством предельно монотонной функции $\overline{\theta}$, то есть для любого элемента $a \in A$ (все начальные сегменты $x \leqslant a$ которого перечислены посредством оператора Φ_t) существует такая строка $\rho = b_1 b_2 \dots b_m$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_m$, что $a = \overline{\theta}(b_1 b_2 \dots b_m)$. Теорема 1 доказана. □

2. Σ-сводимость и lm-сводимость множества к паре множеств

В данном разделе изучаются вопросы lm-сводимости множества к паре множеств и Σ-сводимости между семействами начальных сегментов для множества и пары множеств. Основным результатом этой части работы является получение ответа на вопрос о том, как соотносятся между собой понятия lm-сводимости множества к паре множеств и Σ-сводимости семейств начальных сегментов для множества и пары множеств. Сначала приведём основные определения, которые потребуются нам в дальнейшем.

Определение 5. Функция $\overline{\theta} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ называется *предельно монотонной*, если существует такая частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всех x, y и s выполняются следующие соотношения:

(i) $\forall\, t \geqslant s: \ \theta(x, y, s) \downarrow \Rightarrow \theta(x, y, s) \leqslant \theta(x, y, t) \downarrow$;

(ii) $\overline{\theta}(x, y) = \max\limits_t \theta(x, y, t) < \infty$ (считаем $\max \emptyset = 0$).

Определение 6. Отображение $\Theta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ называется *предельно монотонным оператором*, если существует частично вычислимая функция

$$\theta : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

удовлетворяющая для всех $\rho \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $\tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ и $s \in \mathbb{N}$ следующим условиям:

(i) $\forall\, \zeta \geqslant \rho,\ \forall\, \eta \geqslant \tau,\ \forall\, t \geqslant s: \ \theta(\rho, \tau, s) \downarrow \Rightarrow \theta(\rho, \tau, s) \leqslant \theta(\zeta, \eta, t) \downarrow$;

(ii) $\overline{\theta}(\rho, \tau) = \max\limits_t \theta(\rho, \tau, t) < \infty$;

(iii) $\forall\, X \subseteq \mathbb{N},\ \forall\, Y \subseteq \mathbb{N}: \ \Theta\langle X, Y\rangle = \{\overline{\theta}(\rho, \tau) : \rho \in X^{<\mathbb{N}}, \tau \in Y^{<\mathbb{N}}\}$.

Пусть $\{\theta_e\}_{e \in \mathbb{N}}$ – эффективная нумерация всех трехместных частично вычислимых функций, удовлетворяющих условию (i) определения 6. Для каждого e через Θ_e обозначим предельно монотонный оператор, действующий из $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, задаваемый для каждого множества $X \subseteq \mathbb{N}$ и $Y \subseteq \mathbb{N}$ равенством

$$\Theta_e\langle X, Y\rangle = \{\overline{\theta}_e(\rho, \tau) : \rho \in X^{<\mathbb{N}}, \tau \in Y^{<\mathbb{N}}\}.$$

Определение 7. Множество A будет *lm-сводиться* к паре множеств (B, C) (обозначается как $A \leqslant_{lm} (B, C)$), если $A = \emptyset$ или $A = \Theta_e\langle B, C\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ_e.

Перейдем теперь к рассмотрению Σ-сводимости специальных семейств начальных сегментов для множества и пары множеств. Пусть даны произвольные множество A и пара множеств (B, C). Определим для них следующие семейства начальных сегментов:

$$\mathcal{S}(A) = \{\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A\}$$

и

$$\mathcal{S}(B, C) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright c : c \in C\}.$$

Следующее определение задаёт Σ-сводимость между семействами $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}(B, C)$.

Определение 8. Будем говорить, что семейство $\mathcal{S}(A)$ Σ-*сводится* к семейству $\mathcal{S}(B,C)$ (и обозначать как $\mathcal{S}(A)\sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B,C)$), если

$$\{\mathbb{N}\restriction a : a\in A\} = \{\Phi(\{n\}\oplus(\{x_1\}\oplus\mathbb{N}\restriction d_1)\oplus\dots\oplus(\{x_n\}\oplus\mathbb{N}\restriction d_n))| \\ \mid n\in\mathbb{N},\ x_i\in\{0,1\},\ i\in\mathbb{N}_n\} \qquad (5)$$

для некоторого оператора перечисления Φ и функции d_i, $i\in\mathbb{N}_n$, определяемой по формуле

$$d_i = \begin{cases} b_i\in B, & \text{если } x_i=0,\\ c_i\in C, & \text{если } x_i=1.\end{cases}$$

Эквивалентность определений lm-сводимости множества к паре множеств и Σ-сводимости между семействами начальных сегментов для данного множества и пары множеств устанавливает следующая

Теорема 2. $A\leqslant_{lm}(B,C)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{S}(A)\sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B,C)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $A\leqslant_{lm}(B,C)$. Это значит, что $A = \Theta\langle B,C\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ. В силу приведенных выше определений 6 и 7 имеем

$$A=\Theta\langle B,C\rangle = \{\overline{\theta}(\rho,\tau) : \rho\in B^{<\mathbb{N}}, \tau\in C^{<\mathbb{N}}\} = \\ = \{\max_t \theta(b_1\dots b_r, c_1\dots c_s, t)<\infty : b_i\in B,\ i\in\mathbb{N}_r\ \&\ c_j\in C,\ j\in\mathbb{N}_s\ \&\ t\in\mathbb{N}\},$$

для некоторой предельно монотонной функции от двух аргументов $\overline{\theta}$.

Покажем, что $\mathcal{S}(A)\sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B,C)$, то есть докажем справедливость равенства (5). Определим оператор перечисления Φ:

$$\Phi = \{(\langle x, \{n\}\oplus(\{0\}\oplus\mathbb{N}\restriction b_1)\oplus\dots\oplus(\{0\}\oplus\mathbb{N}\restriction b_r)\oplus(\{1\}\oplus\mathbb{N}\restriction c_1)\oplus\dots\oplus(\{1\}\oplus\mathbb{N}\restriction c_s)\rangle)| \\ \mid \overline{\theta}(b_1\dots b_r, c_1\dots c_s) = \max_t \theta(b_1\dots b_r, c_1\dots c_s, t)\geqslant x\}, \quad (6)$$

где $b_i\in B$, $i\in\mathbb{N}_r$; $c_j\in C$, $j\in\mathbb{N}_s$ и $n=r+s$. Покажем, что определенный в (6) оператор Φ задает семейство начальных сегментов множества A.

Предположим, что $A\neq\emptyset$. Так как $A\leqslant_{lm}(B,C)$, то для любого элемента $a\in A$ имеем, что $a=\max_t\theta(b_1\dots b_r, c_1\dots c_s, t)$ для некоторых строк $\rho=b_1\dots b_r$ и $\tau = c_1\dots c_s$, где $b_i\in B$, $i\in\mathbb{N}_r$ и $c_j\in C$, $j\in\mathbb{N}_s$.

Тогда $\mathbb{N}\restriction a = \Phi(\{n\}\oplus(\{0\}\oplus\mathbb{N}\restriction b_1)\oplus\dots\oplus(\{0\}\oplus\mathbb{N}\restriction b_r)\oplus(\{1\}\oplus\mathbb{N}\restriction c_1)\oplus\dots\oplus(\{1\}\oplus\mathbb{N}\restriction c_s))$, где $\mathbb{N}\restriction b_i\in\mathcal{S}(B)$, $i\in\mathbb{N}_r$ и $\mathbb{N}\restriction c_j\in\mathcal{S}(C)$, $j\in\mathbb{N}_s$. Таким образом, элементы семейства $\mathcal{S}(A)$ задаются оператором Φ с помощью кортежей, составленных из элементов семейств $\mathcal{S}(B)$ и $\mathcal{S}(C)$.

Обратно, рассмотрим произвольное множество $X=\Phi(\{n\}\oplus(\{0\}\oplus\mathbb{N}\restriction b_1)\oplus\dots\oplus(\{0\}\oplus\mathbb{N}\restriction b_r)\oplus(\{1\}\oplus\mathbb{N}\restriction c_1)\oplus\dots\oplus(\{1\}\oplus\mathbb{N}\restriction c_s))$, где $\mathbb{N}\restriction b_i\in\mathcal{S}(B)$, $i\in\mathbb{N}_r$ и $\mathbb{N}\restriction c_j\in\mathcal{S}(C)$, $j\in\mathbb{N}_s$. Тогда $X=\mathbb{N}\restriction a$, где $a=\max_t\theta(b_1\dots b_r, c_1\dots c_s, t)$.

Таким образом, $\mathcal{S}(A)\sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B,C)$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{S}(A)\sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B,C)$. Σ-сводимость между семействами начальных сегментов для множества A и пары (B,C) можно записать с помощью оператора перечисления Φ в виде

$$\{\mathbb{N}\restriction a : a\in A\} = \{\Phi(\{\langle n,k\rangle\}\oplus(\{x_1\}\oplus\mathbb{N}\restriction d_1)\oplus\dots\oplus(\{x_n\}\oplus\mathbb{N}\restriction d_n))| \\ \mid n,k\in\mathbb{N},\ x_i\in\{0,1\},\ i\in\mathbb{N}_n\}, \quad (7)$$

где

$$d_i = \begin{cases} b_i \in B, & \text{если } x_i = 0,\\ c_i \in C, & \text{если } x_i = 1 \end{cases}$$

для $i \in \mathbb{N}_n$.

Покажем, что $A \leqslant_{lm} (B, C)$. Пусть $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ – вычислимое перечисление множества Φ, то есть $\Phi = \bigcup\limits_t \Phi_t$ и $\Phi_t \subseteq \Phi_{t+1}$. Рассмотрим некоторую строку $\rho \in B^{<\mathbb{N}}$ длины $p \in \mathbb{N}$: $\rho = b_1 b_2 \ldots b_p$, где $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_p$.

Пусть $p = \langle k, \langle x_1 x_2 \ldots x_n\rangle\rangle$, где $\langle x_1 x_2 \ldots x_n\rangle$ – номер строки $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Определим функцию $\theta(b_1 b_2 \ldots b_p, c_1 c_2 \ldots c_q, t)$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_p$, $c_j \in C$, $j \in \mathbb{N}_q$, как максимальное значение x, для которого $\langle x, F\rangle \in \Phi_t$ – такая аксиома, что $\{\langle n, k\rangle\} \oplus (\{x_1\} \oplus \mathbb{N} \restriction d_1) \oplus \cdots \oplus (\{x_n\} \oplus \mathbb{N} \restriction d_n) \subseteq F$, где

$$d_i = \begin{cases} b_i \in B, & \text{если } x_i = 0;\\ c_i \in C, & \text{если } x_i = 1 \end{cases}$$

для $i \in \mathbb{N}_n$.

Таким образом, $n = r + s$ – сумма числа первых r элементов $b_1, b_2, \ldots, b_r$ строки $b_1 b_2 \ldots b_r b_{r+1} \ldots b_p$ и числа первых s элементов $c_1, c_2, \ldots, c_s$ строки $c_1 c_2 \ldots c_s c_{s+1} \ldots c_q$.

Поэтому, имея все элементы последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно определить функцию $\theta(b_1 \ldots b_p, c_1 \ldots c_q, t)$. Функция $\theta(b_1 \ldots b_p, c_1 \ldots c_q, t)$ зависит лишь от первых r элементов строки $b_1 b_2 \ldots b_r b_{r+1} \ldots b_p$ и от первых s элементов строки $c_1 c_2 \ldots c_s c_{s+1} \ldots c_q$.

Проверим, что $A = \Theta\langle B, C\rangle = \{\overline{\theta}(\rho, \tau) : \rho \in B^{<\mathbb{N}}, \tau \in C^{<\mathbb{N}}\}$ для некоторой предельно монотонной функции $\overline{\theta}$. Пусть $a \in A$. Тогда $\mathbb{N} \restriction a \in \mathcal{S}(A)$. В силу того, что $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(B, C)$, имеем

$$\begin{multline} \{\mathbb{N} \restriction a : a \in A\} = \{\Phi(\{\langle n, k\rangle\} \oplus (\{x_1\} \oplus \mathbb{N} \restriction d_1) \oplus \cdots \oplus (\{x_n\} \oplus \mathbb{N} \restriction d_n)) | \\ | \; n, k \in \mathbb{N},\ x_i \in \{0, 1\},\ i \in \mathbb{N}_n\}, \quad (8) \end{multline}$$

где

$$\mathbb{N} \restriction d_i = \begin{cases} \mathbb{N} \restriction b_i \in \mathcal{S}(B), & \text{если } x_i = 0;\\ \mathbb{N} \restriction c_i \in \mathcal{S}(C), & \text{если } x_i = 1 \end{cases}$$

для $i \in \mathbb{N}_n$.

Пусть $p = \langle k, \langle x_1 x_2 \ldots x_n\rangle\rangle$. Доопределим строку $b_1 \ldots b_r$ до $b_1 \ldots b_r b_{r+1} \ldots b_p$, полагая $b_i = b_r$ для $i = r+1, \ldots, p$. Аналогично доопределяем строку $c_1 \ldots c_s$ до $c_1 \ldots c_s c_{s+1} \ldots c_q$, полагая $c_j = c_s$ для $j = s+1, \ldots, q$.

Тогда $a = \overline{\theta}(b_1 \ldots b_p, c_1 \ldots c_q) = \max\limits_t \theta(b_1 \ldots b_p, c_1 \ldots c_q, t)$, где $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_p$ и $c_j \in C$, $j \in \mathbb{N}_q$. Таким образом, $a \in \Theta\langle B, C\rangle$.

Обратно, пусть $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_p$, $c_j \in C$, $j \in \mathbb{N}_q$. Пусть $\overline{\theta}(b_1 \ldots b_p, c_1 \ldots c_q) = a$, то есть $a \in \Theta\langle B, C\rangle$. Тогда в силу Σ-сводимости между $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}(B, C)$ получим $\mathbb{N} \restriction a = \Phi(\{\langle n, k\rangle\} \oplus (\{0\} \oplus \mathbb{N} \restriction b_1) \oplus \cdots \oplus (\{0\} \oplus \mathbb{N} \restriction b_r) \oplus (\{1\} \oplus \mathbb{N} \restriction c_1) \oplus \cdots \oplus (\{1\} \oplus \oplus \mathbb{N} \restriction c_s))$ и $\mathbb{N} \restriction a \in \mathcal{S}(A)$. Следовательно, $a \in A$.

Итак, $A \leqslant_{lm} (B, C)$ посредством предельно монотонной функции $\overline{\theta}$, то есть для любого элемента $a \in A$ (все начальные сегменты $x \leqslant a$ которого перечислены с помощью оператора Φ_t) существуют такие строки $\rho = b_1 \ldots b_p$, $b_i \in B$, $i \in \mathbb{N}_p$ и $\tau = c_1 \ldots c_q$, $c_j \in C$, $j \in \mathbb{N}_q$, что $a = \overline{\theta}(b_1 b_2 \ldots b_p, c_1 c_2 \ldots c_q)$. Теорема 2 доказана. □

Далее определим предельно монотонную сводимость между двумя парами множеств через Σ-определимость заданных для них семейств специального вида. Пусть даны две произвольные пары множеств (A, B) и (C, D). Зададим для этих двух пар следующие семейства начальных сегментов:

$$\mathcal{S}(A, B) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \restriction a : a \in A\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \restriction b : b \in B\},$$

$$\mathcal{S}(C, D) = \{\{0\} \oplus \mathbb{N} \restriction c : c \in C\} \oplus \{\{1\} \oplus \mathbb{N} \restriction d : d \in D\}.$$

При этом нетрудно заметить, что $\mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$ и $\mathcal{S}(B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$. Из теоремы 2 можно заключить, что $\mathcal{S}(A) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$ и $\mathcal{S}(B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$ тогда и только тогда, когда $A \leqslant_{lm} (C, D)$ и $B \leqslant_{lm} (C, D)$. Кроме того, сводимости $A \leqslant_{lm} (C, D)$ и $B \leqslant_{lm} (C, D)$ выполнены тогда и только тогда, когда $(A, B) \leqslant_{lm} (C, D)$. Отсюда немедленно вытекает следующее

Определение 9. Будем говорить, что $(A, B) \leqslant_{lm} (C, D)$, если и только если $\mathcal{S}(A, B) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(C, D)$.

В работе [7] было установлено существование такой пары множеств (A, B), что для любого множества C выполнено соотношение $(A, B) \nleqslant_{lm} C$. Используя этот результат, можно доказать, что класс рассматриваемых семейств множеств является собственным. Таким образом, имеет место

Следствие 1. *Существуют такая пара множеств* (A, B)*, что для любого множества* C *выполнено соотношение* $\mathcal{S}(A, B) \neq {}_\Sigma\mathcal{S}(C)$.

Вопрос о существование такой тройки множеств (A, B, C), что для любой пары множеств (D, E) было бы справедливо соотношение $(A, B, C) \nleqslant_{lm} (D, E)$, остается открытым. Следовательно, вопрос о Σ-эквивалентности соответствующих семейств для данных множеств также пока остается открытым.

3. Σ-сводимость и lm-сводимость последовательностей множеств

Этот раздел начнём с рассмотрения предельно монотонной сводимости между последовательностями множеств $\mathcal{A} = \{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, определенной с помощью предельно монотонного оператора.

Определение 10. Пусть $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность, состоящая из бесконечных множеств B_n, $n \in \mathbb{N}$. *Текстом* над последовательностью $\mathcal{B}$ назовем такую последовательность строк $\widetilde{\rho}$, элементы которой представляют собой строки, принадлежащие $B_i^{<\mathbb{N}}$, то есть $\widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q)$, где $\rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}_q$, $q \in \mathbb{N}$.

Пусть дана последовательность $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, состоящая из бесконечных множеств. Пусть также имеются два текста $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{\tau}$ над $\mathcal{B}$. Тогда $\widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q)$, где $\rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}_q$ и $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r)$, где $\tau_j \in B_j^{<\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}_r$.

Пусть строка $\rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}_q$ имеет вид $\rho_i = \rho_i^1 \rho_i^2 \ldots \rho_i^{u_i}$, где $\rho_i^k \in B_i$ для всех $1 \leqslant k \leqslant u_i$. Аналогично, строка $\tau_j \in B_j^{<\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}_r$ будет иметь вид $\tau_j = \tau_j^1 \tau_j^2 \ldots \tau_j^{v_j}$, где $\tau_j^m \in B_j$ для всех $1 \leqslant m \leqslant v_j$.

Введём для текстов $\widetilde{\rho}$ и $\widetilde{\tau}$ над $\mathcal{B}$ отношение порядка. Будем говорить, что $\widetilde{\rho} \geqslant \widetilde{\tau}$, если последовательно выполнены следующие условия:

(i) $q = r$;

(ii) $u_i = v_i$, $i \in \mathbb{N}_q$;

(iii) $\rho_i^k \geqslant \tau_i^k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant u_i$, $i \in \mathbb{N}_q$.

В противном случае будем говорить, что тексты $\widetilde{\tau}$ и $\widetilde{\rho}$, определенные над последовательностью $\mathcal{B}$, несравнимы.

Определение 11. Функция $\overline{\theta} : \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \dots, \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}) \to \mathbb{N}$ называется *предельно монотонной*, если существует такая частично вычислимая функция $\theta : \mathbb{N} \times \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \dots, \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что для всех $m \in \mathbb{N}$, $\widetilde{x} \in (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \dots, \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ и $s \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

(i) $\forall\, t \geqslant s: \ \theta(m, \widetilde{x}, s) \downarrow \Rightarrow \theta(m, \widetilde{x}, s) \leqslant \theta(m, \widetilde{x}, t) \downarrow$;

(ii) $\overline{\theta}(m, \widetilde{x}) = \max\limits_t \theta(m, \widetilde{x}, t) < \infty$ (считаем $\max \emptyset = 0$).

Определение 12. Отображение $\Theta : (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \dots, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \dots, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ называется *предельно монотонным оператором*, если существует частично вычислимая функция

$$\theta : \mathbb{N} \times (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \dots, \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

удовлетворяющая для всех $m \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\rho} \in (\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \dots, \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})$ и $s \in \mathbb{N}$ следующим условиям:

(i) $\forall\, \widetilde{\tau} \geqslant \widetilde{\rho},\ \forall\, t \geqslant s: \ \theta(m, \widetilde{\rho}, s) \downarrow \Rightarrow \theta(m, \widetilde{\rho}, s) \leqslant \theta(m, \widetilde{\tau}, t) \downarrow$;

(ii) $\overline{\theta}(m, \widetilde{\rho}) = \max\limits_t \theta(m, \widetilde{\rho}, t) < \infty$;

(iii) $\forall\, \mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}: \ \Theta\langle\mathcal{B}\rangle = (\Theta^1\langle\mathcal{B}\rangle, \Theta^2\langle\mathcal{B}\rangle, \dots, \Theta^m\langle\mathcal{B}\rangle, \dots)$,

где $\Theta^m\langle\mathcal{B}\rangle = \{\overline{\theta}(m, \widetilde{\rho}) : \widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)\ \&\ \rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}}, i \in \mathbb{N}_q\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $\{\theta_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ – эффективная нумерация всех таких частично вычислимых функций, удовлетворяющих условию (i) определения 12. Для каждого e обозначим через Θ_e предельно монотонный оператор, отображающий последовательность множеств $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \dots, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ в последовательность множеств $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \dots, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ и определенный для каждой последовательности $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равенством

$$\Theta_e\langle\mathcal{B}\rangle = (\Theta_e^1\langle\mathcal{B}\rangle, \Theta_e^2\langle\mathcal{B}\rangle, \dots, \Theta_e^m\langle\mathcal{B}\rangle, \dots),$$

где $\Theta_e^m\langle\mathcal{B}\rangle = \{\overline{\theta}_e(m, \widetilde{\rho}) : \widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)\ \&\ \rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}}, i \in \mathbb{N}_q\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Определение 13. Последовательность $\mathcal{A} = \{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ будет *lm-сводиться* к последовательности $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (обозначается как $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$), если $A_m = \emptyset$ для любого $m \in \mathbb{N}$ или $\mathcal{A} = \Theta_e\langle\mathcal{B}\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ_e.

Перейдем к рассмотрению Σ-сводимости между семействами специального вида для последовательностей множеств. Пусть $\mathcal{A} = \{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательности, состоящие из бесконечных множеств. Определим для них следующие семейства начальных сегментов:

$$\mathcal{S}(\mathcal{A}) = \{\{m\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A_m,\ m \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}) = \{\{n\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b : b \in B_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Определение 14. Семейство $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ будет *Σ-сводиться* к семейству $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ (обозначается как $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(\mathcal{B})$), если

$$\{\{m\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright a : a \in A_m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{\Phi(\{\langle l, z\rangle\}\oplus(\{x_1\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright b_1)\oplus\dots\oplus(\{x_l\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright b_l)) \mid l, z \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{N},\ b_i \in B_{x_i},\ i \in \mathbb{N}_l\} \quad (9)$$

для некоторого оператора перечисления Φ.

Следующая теорема показывает, что приведенные выше понятия lm-сводимости последовательностей множеств и Σ-сводимости специальных семейств начальных сегментов для этих последовательностей эквивалентны.

Теорема 3. *$\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(\mathcal{B})$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{A} = \Theta\langle\mathcal{B}\rangle$ для некоторого предельно монотонного оператора Θ. В силу приведенных выше определений 12 и 13 имеем

$$A_m = \Theta^m\langle\mathcal{B}\rangle = \left\{\overline{\theta}(m,\widetilde{\rho}) \mid \widetilde{\rho} = (\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_q),\ \rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}},\ i \in \mathbb{N}_q \ \&\ m,q \in \mathbb{N}\right\} =$$
$$= \left\{\max_t \theta(m,\widetilde{\rho},t) < \infty \mid \widetilde{\rho} = (\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_q),\ \rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}},\ i \in \mathbb{N}_q \ \&\ m,t,q \in \mathbb{N}\right\}$$

для предельно монотонной функции $\overline{\theta}$ и частично вычислимой функции θ.

Покажем, что $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_{\Sigma} \mathcal{S}(\mathcal{B})$, то есть докажем справедливость равенства (9) для некоторого оператора перечисления Φ.

Пусть Φ – оператор перечисления, содержащий все аксиомы такого вида

$$\langle x, \{\langle l,0\rangle\} \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_q\rangle,$$

что выполнены следующие соотношения:

(i) $\mathcal{F}_1 = (\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_1^1) \oplus \cdots \oplus (\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_1^{l_1})$,
$\mathcal{F}_2 = (\{2\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_2^1) \oplus \cdots \oplus (\{2\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_2^{l_2})$,
$\vdots$
$\mathcal{F}_q = (\{q\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_q^1) \oplus \cdots \oplus (\{q\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_q^{l_q})$,
где l_i – длина строки ρ_i для всех $i \in \mathbb{N}_q$;

(ii) $\overline{\theta}(m,\widetilde{\rho}) = \max_t \theta(m,\widetilde{\rho},t) \geqslant x$, где $\widetilde{\rho} = (\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_q)$, $\rho_i = \rho_i^1 \ldots \rho_i^{l_i}$, $i \in \mathbb{N}_q$, $t \in \mathbb{N}$;

(iii) $l = l_1 + \cdots + l_q$, где l – сумм длин всех строк ρ_i, $i \in \mathbb{N}_q$.

Покажем, что определенный таким образом оператор Φ задает специальное семейство для последовательности $\mathcal{A} = \{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Так как $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$, то для любого элемента $a \in A_m$ выполнено равенство $a = \max_t \theta(m,(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_q),t)$ для некоторых строк $\rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}_q$. При этом $\rho_1 = \rho_1^1 \ldots \rho_1^{l_1}$; $\rho_2 = \rho_2^1 \ldots \rho_2^{l_2}$; …; $\rho_q = \rho_q^1 \ldots \rho_q^{l_q}$ и $\rho_i^j \in B_i$ для всех $1 \leqslant j \leqslant l_i$ и $i \in \mathbb{N}_q$. Тогда

$$\{m\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright a = \Phi(\{\langle l,0\rangle\} \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_q),$$

где $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{N}_q$ задаются в соответствии с (i). Таким образом, элементы семейства $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ задаются с помощью оператора Φ с использованием кортежей, составленных из элементов семейств $\mathcal{F}_i$, которые, в свою очередь, принадлежат семейству $\mathcal{S}(\mathcal{B})$.

Обратно, рассмотрим теперь произвольное множество

$$\Phi(\{\langle l,z\rangle\} \oplus (\{x_1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1) \oplus \cdots \oplus (\{x_l\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_l)) \mid$$
$$\mid l,z \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{N},\ b_i \in B_{x_i},\ i \in \mathbb{N}_l. \quad (10)$$

Из определения оператора Φ получаем, что параметр $z = 0$ и множество из (10) будет иметь вид

$$\Phi(\{\langle l, 0\rangle\} \oplus ((\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_1) \oplus \cdots \oplus (\{1\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_{l_1}))\oplus \\ \oplus ((\{2\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_{l_1+1}) \oplus \cdots \oplus (\{2\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_{l_1+l_2})) \oplus \cdots \oplus \\ \oplus ((\{q\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_{l_1+l_2+\cdots+1}) \oplus \cdots \oplus (\{q\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_{l_1+l_2+\cdots+l_q}))),$$

где $l,\, q \in \mathbb{N},\ b_i \in B_{x_i},\ i \in \mathbb{N}_l, l = l_1 + \cdots + l_q$.

Обозначим это множество через X. Тогда $X = \{m\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright a$, где $a = \max\limits_t \theta(m, (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q), t)$ и

$$\rho_1 = b_1 \ldots b_{l_1},$$
$$\rho_2 = b_{l_1+1} \ldots b_{l_1+l_2},$$
$$\vdots$$
$$\rho_q = b_{l_1+l_2+\cdots+l_{q-1}+1} \ldots b_{l_1+l_2+\cdots+l_{q-1}+l_q}.$$

Таким образом, $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(\mathcal{B})$. Σ-сводимость между семействами начальных сегментов для последовательности множеств $\mathcal{A} = \{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и последовательности множеств $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ зададим с помощью оператора перечисления Φ в виде

$$\{\{m\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright a \mid a \in A_m,\ m \in \mathbb{N}\} = \{\Phi(\{\langle l, z\rangle\}\oplus(\{x_1\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright b_1)\oplus\cdots\oplus(\{x_l\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright b_l)) \mid \\ \mid l, z \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{N},\ b_i \in B_{x_i},\ i \in \mathbb{N}_l\} \quad (11)$$

Докажем, что $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$. Пусть $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ – вычислимое перечисление множества Φ, то есть $\Phi = \bigcup\limits_t \Phi_t$ и $\Phi_t \subseteq \Phi_{t+1}$.

Определим частично вычислимую функцию $\theta(\widetilde{\rho}, m, t)$ для произвольной последовательности строк $\widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q)$ и для произвольных параметров $m,\, t \in \mathbb{N}$, где $\rho_i = \rho_i^1 \ldots \rho_i^{d_i}$, $i \in \mathbb{N}_q$, $q \in \mathbb{N}$.

Пусть $q = \langle z, \langle x_1 x_2 \ldots x_l\rangle, p\rangle$ – длина определяемого текста, где $\langle x_1 x_2 \ldots x_l\rangle$ – номер последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$, $z \in \mathbb{N}$ – некоторое фиксированное число и $p \in \mathbb{N}$. Здесь мы ввели дополнительный параметр $p \in \mathbb{N}$ для того, чтобы длина определяемого текста $\widetilde{\rho}$ была достаточно большим числом, бóльшим, чем значение $\max\limits_{i\in\mathbb{N}_l}\{x_i\}$. Таким образом, параметр p обеспечит нам нахождение текста нужной длины при задании функции θ.

Зададим функцию $\theta(m, (\rho_1^1 \ldots \rho_1^{d_1}, \rho_2^1 \ldots \rho_2^{d_2}, \ldots, \rho_q^1 \ldots \rho_q^{d_q}), t)$, как максимальное значение x, для которого $\langle x, F\rangle \in \Phi_t$ – такая аксиома, что $\{\langle l, z\rangle\}\oplus(\{x_1\}\oplus\mathbb{N} \upharpoonright b_1)\oplus \cdots \oplus (\{x_l\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright b_l) \subseteq F$ и b_i, $i \in \mathbb{N}_l$, определяются следующим образом:

(i) b_1 равен первому элементу строки ρ_{x_1};

(ii) затем для каждого $i = 2, \ldots, l$ полагаем:

если $x_i \neq x_j$ для всех $j < i$, то b_i равен первому элементу строки ρ_{x_i},

иначе, если $x_i = x_j$ для некоторых $j < i$, то b_i равен первому элементу строки ρ_{x_j}, идущему после элемента, который соответствует такому b_j с наибольшим номером j, что $x_j = x_i$.

Если для некоторой строки $\rho_i = \rho_i^1 \dots \rho_i^{d_i}$, $i \in \mathbb{N}_q$ из некоторого определяемого текста $\widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q)$ значение d_i будет меньше, чем количество $x_k = i$, $k \in \mathbb{N}_l$, то функция $\theta(m, \widetilde{\rho}, t)$ не определена для такой последовательности строк.

Для каждого $i \in \mathbb{N}_q$ определим через l_i количество x_k, где $k \in \mathbb{N}_l$ для которых $x_k = i$, то есть l_i является длиной строки ρ_i. Таким образом, $l = l_1 + \dots + l_q$ – количество первых $l_1, l_2, \dots, l_q$ элементов, взятых соответственно из строк $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$, где $q \in \mathbb{N}$.

Поэтому, зная все элементы последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_l)$, определим значение частично вычислимой функции $\theta(m, (\rho_1^1 \dots \rho_1^{d_1}, \rho_2^1 \dots \rho_2^{d_2}, \dots, \rho_q^1 \dots \rho_q^{d_q}), t)$. Функция θ будет зависеть лишь от первых l_i элементов в каждой из строк ρ_i.

Для последовательностей $\mathcal{A} = \{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ и $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, состоящих из бесконечных множеств, проверим, что $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$. Другими словами покажем, что

$$A_m = \Theta^m \langle \mathcal{B} \rangle = \big\{ \overline{\theta}(m, \widetilde{\rho}) \mid \widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q),\ \rho_i \in B_i^{<\mathbb{N}},\ i \in \mathbb{N}_q \ \&\ m, q \in \mathbb{N} \big\}$$

для некоторой предельно монотонной функции $\overline{\theta}$.

Пусть $a \in A_m$. Покажем, что $a \in \Theta^m \langle \mathcal{B} \rangle$. Так как $a \in A_m$, то $\{m\} \oplus \mathbb{N} \restriction a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. В силу того, что $\mathcal{S}(\mathcal{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathcal{S}(\mathcal{B})$, имеем

$$\{m\} \oplus \mathbb{N} \restriction a = \Phi(\{\langle l, z \rangle\} \oplus (\{x_1\} \oplus \mathbb{N} \restriction b_1) \oplus \dots \oplus (\{x_l\} \oplus \mathbb{N} \restriction b_l) \mid l, z \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{N},\ b_i \in B_{x_i},\ i \in \mathbb{N}_l) \quad (12)$$

Пусть $q = \langle z, \langle x_1 x_2 \dots x_l \rangle, p \rangle$ – длина определяемого текста для функции θ, где $\langle x_1 x_2 \dots x_l \rangle$ – номер последовательности $x_1, x_2, \dots, x_l$.

Определяем строки $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ из текста $\widetilde{\rho}$:

(i) ρ_1^1 – первый b_i, при котором $x_i = 1$; ρ_1^2 – второй b_i, при котором $x_i = 1$, и так далее определяем все элементы строки ρ_1, где длина ρ_1 – количество $x_i = 1$.

(ii) ρ_2^1 – первый b_i, при котором $x_i = 2$; ρ_2^2 – второй b_i, при котором $x_i = 2$, и так далее продолжаем определять элементы строки ρ_2, где длина ρ_2 – количество $x_i = 2$.

Продолжаем этот процесс для всех остальных строк ρ_i.

Затем доопределим строку $\rho_i^1 \rho_i^2 \dots \rho_i^{l_i}$ до $\rho_i^1 \rho_i^2 \dots \rho_i^{l_i} \dots \rho_i^{d_i}$, в тех случаях, где это необходимо для $i \in \mathbb{N}_q$, полагая $\rho_i^s = \rho_i^{l_i}$ для $s = l_i + 1, \dots, d_i$. В итоге получим

$$a = \overline{\theta}(m, \widetilde{\rho}) = \overline{\theta}(m, (\rho_1^1 \dots \rho_1^{d_1}, \rho_2^1 \dots \rho_2^{d_2}, \dots, \rho_q^1 \dots \rho_q^{d_q})) = \max_t \theta(m, (\rho_1^1 \dots \rho_1^{d_1}, \rho_2^1 \dots \rho_2^{d_2}, \dots, \rho_q^1 \dots \rho_q^{d_q}), t).$$

Отсюда следует, что $a \in \Theta^m \langle \mathcal{B} \rangle$.

Обратно, пусть $a \in \Theta^m \langle \mathcal{B} \rangle$. Покажем, что $a \in A_m$. Пусть $\rho_i = \rho_i^1 \rho_i^2 \dots \rho_i^{d_i}$, где $\rho_i^j \in B_i$ для всех $1 \leqslant j \leqslant d_i$, $i \in \mathbb{N}_q$. Пусть справедливо равенство $a = \overline{\theta}(m, (\rho_1^1 \dots \rho_1^{d_1}, \rho_2^1 \dots \rho_2^{d_2}, \dots, \rho_q^1 \dots \rho_q^{d_q}))$ для некоторой предельно монотонной функции $\overline{\theta}$. Тогда в силу Σ-сводимости между $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ получим

$$\{m\} \oplus \mathbb{N} \restriction a = \Phi(\{\langle l, z \rangle\} \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_q),$$

где

$$\mathcal{F}_1 = (\{1\} \oplus \mathbb{N} \restriction \rho_1^1) \oplus \dots \oplus (\{1\} \oplus \mathbb{N} \restriction \rho_1^{l_1}),$$

$$\mathcal{F}_2 = (\{2\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_2^1) \oplus \cdots \oplus (\{2\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_2^{l_2}),$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{F}_q = (\{q\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_q^1) \oplus \cdots \oplus (\{q\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright \rho_q^{l_q})$$

и $\rho_i^j \in B_i$ для всех $1 \leqslant j \leqslant l_i$ и $i \in \mathbb{N}_q$. Тогда $\{m\} \oplus \mathbb{N} \upharpoonright a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Отсюда следует, что $a \in A_m$.

Таким образом, $\mathcal{A} \leqslant_{lm} \mathcal{B}$ посредством предельно монотонной функции $\overline{\theta}$. Для любого элемента $a \in A_m$ (все начальные сегменты $x \leqslant a$ которого перечисляются с помощью оператора Φ_t) существуют такие строки $\rho_1 = \rho_1^1 \ldots \rho_1^{d_1}; \rho_2 = \rho_2^1 \ldots \rho_2^{d_2}; \ldots; \rho_q = \rho_q^1 \ldots \rho_q^{d_q}$, что $a = \overline{\theta}(m, \widetilde{\rho})$, где $\widetilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q)$. Теорема 3 доказана. □

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю И.Ш. Калимуллину за постановку задач, постоянное внимание к работе и плодотворные беседы на протяжении всего времени написания статьи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-41-02507, 15-31-20607, 15-01-08252) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.2045.2014).

Литература

1. *Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. – 2005. – V. 136, No 3. – С. 219–246. – doi: 10.1016/j.apal.2005.02.001.
2. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31–53.
3. *Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A.* Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141, No 9. – P. 3275–3289.
4. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38, No 2. – P. 165–178.
5. *Downey R.G., Kach A.M., Turetsky D.* Limitwise monotonic functions and their applications // Proc. 11th Asian Logic Conf. – Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2011. – P. 59–85. – doi: 10.1142/9789814360548_0004.
6. *Зайнетдинов Д.Х., Калимуллин И.Ш.* О предельно монотонной сводимости Σ_2^0-множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 154, кн. 1. – С. 22–30.
7. *Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D.* Maximality and minimality under limitwise monotonic reducibility // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 4. – P. 333–338. – doi: 10.1134/S1995080214040155

Поступила в редакцию
24.12.15

Зайнетдинов Дамир Хабирович, аспирант кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *damir.zh@mail.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 51–65

Σ-Reducibility and lm-Reducibility of Sets and Sequences of Sets

D.Kh. Zainetdinov

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *damir.zh@mail.ru*

Received December 24, 2015

Abstract

Limitwise monotonic sets, pairs of sets, and sequences consisting of infinite sets are studied in the paper. The main properties of limitwise monotonic reducibility between two sets, as well as between the set and a pair of sets defined in terms of Σ-reducibility of the corresponding families of a special form, are considered. In addition, description of Σ-reducibility of the families of a special form in terms of lm-reducibility is obtained. The relationship between the concepts of lm-reducibility of the sequences of sets and Σ-reducibility of the families of a special form for the sequences of sets is demonstrated.

Keywords: computable function, Σ-reducibility, limitwise monotonic function, limitwise monotonic sets, limitwise monotonic reducibility, sequence of infinite sets, family of subsets of natural numbers

Acknowledgments. I am grateful to I.Sh. Kalimullin, my scientific adviser, for formulation of the research problems, consistent attention to the work, and fruitful discussions during the preparation of the manuscript.

This work was funded in part by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 15-41-02507, 15-31-20607, and 15-01-08252) and by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

References

1. Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R. Enumerations in computable structure theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 2005, vol. 136, no. 3, pp. 219–246. doi: 10.1016/j.apal.2005.02.001.
2. Kalimullin I.Sh., Puzarenko V.G. Reducibility on families. *Algebra Logic*, 2009, vol. 48, no. 1, pp. 20–32.
3. Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A. Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2013, vol. 141, no. 9, pp. 3275–3289.
4. Khoussainov B., Nies A., Shore R. Computable models of theories with few models. *Notre Dame J. Formal Logic*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 165–178.
5. Downey R.G., Kach A.M., Turetsky D. Limitwise monotonic functions and their applications. *Proc. 11th Asian Logic Conf.*, Hackensack, NJ, World Sci. Publ., 2011, pp. 59–85. doi: 10.1142/9789814360548_0004.
6. Zainetdinov D.Kh., Kalimullin I.Sh. On limitwise monotonic reducibility of Σ^0_2-sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 154, no. 1, pp. 22–30. (In Russian)
7. Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D. Maximality and minimality under limitwise monotonic reducibility. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 4, pp. 333–338. doi: 10.1134/S1995080214040155.

Для цитирования: *Зайнетдинов Д.Х.* Σ-сводимость и lm-сводимость множеств и последовательностей множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 51–65.

For citation: Zainetdinov D.Kh. Σ-reducibility and lm-reducibility of sets and sequences of sets. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 51–65. (In Russian)