Известия вузов. Математика
2015, №8, с. 75–84

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Г.А. ТОЛСТИХИНА, *А.М. ШЕЛЕХОВ*

О СТРУКТУРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТРИ-ТКАНИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ СЕРДЦЕВИНОЙ ЛЕВОЙ ТРИ-ТКАНИ БОЛА

Аннотация. Решается проблема, поставленная М.А. Акивисом в 1976 году: по заданным структурным уравнениям три-ткани Бола найти структурные уравнения три-ткани, определяемой ее сердцевиной.

Ключевые слова: три-ткань Бола, сердцевина ткани Бола.

УДК: 514.763

Данная работа продолжает исследования авторов по теории многомерных три-тканей Бола, заданных на $2r$-мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ тремя гладкими слоениями λ_1, λ_2 и λ_3 коразмерности r [1]–[4]. Ткани Бола (левые B_l, правые B_r и средние B_m) характеризуются тем, что на них замыкаются все достаточно малые соответствующие конфигурации (фигуры) Бола ([5], с. 46).

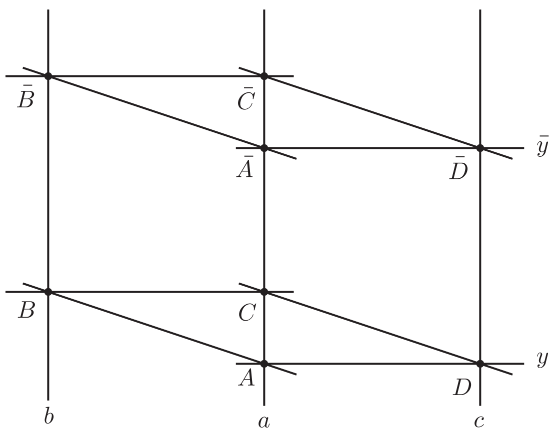

Рис.

На рисунке изображена левая конфигурация Бола, которая получается следующим образом. Пусть a и b — два произвольных достаточно близких вертикальных слоя ткани, y — произвольный горизонтальный слой (на рис. слои первого, второго и третьего слоений ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно). Слой y пересекает слой a в точке A. Через A проходит единственный наклонный слой, который пересекает слой b в точке B. Проходящий через B горизонтальный слой пересекает вертикальный слой a в точке C; через нее проходит единственный наклонный слой,

Поступила 18.02.2014

который пересекает слой y в точке D. Аналогичное построение для другого горизонтального слоя $\overline{y}$ приводит к точкам $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и $\overline{D}$. На произвольной ткани вертикальный слой, проходящий через точку $\overline{D}$, не проходит через точку D. Если же проходит, то говорят, что на ткани замыкается левая конфигурация Бола.

Замыкание всех достаточно малых левых фигур Бола означает, что положение слоя c не зависит от выбора горизонтального слоя y, а зависит только от слоев a и b. Следовательно, на первом (вертикальном) слоении левой ткани Бола возникает бинарная операция $c = a{*}b$, которая является гладкой локальной квазигруппой и называется сердцевиной левой ткани Бола. Сердцевина $c = a * b$ три-ткани B_l определяет на базе X первого слоения ткани семейство гладких функций S_a таких, что $S_a(b) = a * b$ для любых $a \in X$ и $b \in U_a \subset X$, где U_a — достаточно малая окрестность точки a. Функции S_a являются локальными симметриями и определяют на многообразии $\{X, S_a\}$ структуру локально симметрического пространства. В связи с этим, в частности, ткани Бола и гладкие лупы Бола являются предметом пристального изучения (например, обзор [6]).

Известно [7], что сердцевина является идемпотентой ($a{*}a = a$), левообратимой ($a{*}(a{*}b) = b$) и леводистрибутивной ($a{*}(b{*}c) = (a{*}b){*}(a{*}c)$). Из этих свойств вытекает, что сердцевина изотопна некоторой левой лупе Бола. Следовательно, она (сердцевина) определяет, как координатная квазигруппа, левую три-ткань Бола, которую обозначаем CB_l. В [4] показано, что переход от ткани CB_l к ткани CCB_l не дает ничего нового, так как ткани CB_l и CCB_l эквивалентны.

Согласно [8] сердцевина три-ткани B_l не изотопна координатной квазигруппе этой ткани, т. е. ткани B_l и CB_l, вообще говоря, не эквивалентны. В связи с этим возникает задача, на которую обратил наше внимание М.А. Акивис (1976 г.): исходя из структурных уравнений ткани B_l, найти структурные уравнения три-ткани CB_l. В данной работе решаем эту задачу при допущении, что известны уравнения исходной ткани B_l в локальных координатах (см. теорему). Полученный результат проиллюстрирован на примере.

1. Рассмотрим три-ткань W, образованную на вещественном гладком многообразии $\mathcal{M}$ размерности $2r$ тремя гладкими слоениями λ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) размерности r. Обозначим базу слоения λ_α через X_α, где X_α — некоторая область в $\mathcal{R}^r$. На многообразии M три-ткань определяет локальную гладкую трехбазисную квазигруппу $f : \lambda_1 \times \lambda_2 \to \lambda_3$, которая паре слоев из первых двух слоений, пересекающихся в точке p, ставит в соответствие слой третьего слоения, проходящий через p. Функция f называется функцией ткани, определяемая ею квазигруппа — координатной квазигруппой этой ткани, а соответствующее уравнение

$$z = f(x, y) \equiv x \cdot y, \quad x \in \lambda_1, \quad y \in \lambda_2, \quad z \in \lambda_3, \tag{1}$$

называется уравнением ткани.

Всегда можно считать, что уравнение (1) записано в локальных координатах, т. е. $x \in X_1$, $y \in X_2$, $z \in X_3$. Ясно, что в области действия этих координат многообразие M естественным образом отождествляется с прямым произведением $X_\alpha \times X_\beta$. Например, введя на M локальные координаты (x, y), полагаем (локально!) $M \sim X_1 \times X_2$, причем слоения ткани W будут задаваться уравнениями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = f(x, y) = \text{const}$.

Так как слои ткани по определению трансверсальны, то функция f удовлетворяет условиям $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \neq 0$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \neq 0$ в каждой точке области определения.

Уравнение ткани (1) определено с точностью до замены параметров вида

$$\widetilde{x} = \alpha(x), \quad \widetilde{y} = \beta(y), \quad \widetilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы. Тройка (α, β, γ) называется изотопическим преобразованием или изотопией. Этим преобразованием уравнение (1) приводится к виду

$$\widetilde{z} = \widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\widetilde{x}), \beta^{-1}(\widetilde{y})).$$

Можно считать также, что последнее уравнение задает другую три-ткань $\widetilde{W}$, эквивалентную три-ткани W ([5], с. 11).

Пусть теперь W — левая три-ткань Бола B_l, т. е. на ней замыкаются левые фигуры Бола, изображенные на рисунке. В силу определения функции f замыканию конфигурации B_l (см. рис.) соответствует равенство

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(c, y). \tag{2}$$

Как обычно, через f^{-1} и ${}^{-1}f$ обозначены правая и левая обратные к f операции: если $z = f(x, y)$, то $y = f^{-1}(x, z)$ и $x = {}^{-1}f(z, y)$. С другой стороны, как было сказано выше, замыкание конфигурации B_l означает, что положение слоя c не зависит от выбора y. Следовательно, уравнение (2) задает сердцевину $c = a * b$ три-ткани B_l.

Согласно ([5], с. 57) слоения ткани можно параметризовать так, что ее координатная квазигруппа f станет лупой. Пусть f — лупа с единицей e. Положим в уравнении (2) $y = e$. Тогда $f(e, y) = y$ и уравнение (2) сердцевины примет вид

$$c = f(a, f^{-1}(b, a)) = F(a, b) \equiv a * b. \tag{3}$$

Замечание 1. Положив $y = e$, отождествили параметры вертикальных и наклонных слоев ткани, пересекающихся на горизонтальном слое $y = e$ ([5], с. 57). Поэтому $X_1 \equiv X_3$, $f : X_1 \times X_2 \to X_1$ и можно считать, что ткань W задана на многообразии $X_1 \times X_1$.

2. Согласно ([5], с. 12) базисные дифференциальные формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ на $\mathcal{M}$ (здесь и далее $i, j, k, \ldots = \overline{1, r}$) можно выбрать так, что слоения три-ткани W будут задаваться уравнениями

$$\lambda_1 : \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2 : \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3 : \underset{3}{\omega}^i \overset{\text{def}}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0. \tag{4}$$

При этом формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l. \end{gathered} \tag{5}$$

Величины a^i_{jk} и b^i_{jkl} являются тензорами и называются тензором кручения и тензором кривизны три-ткани W соответственно.

Согласно ([5], с. 97) ткани B_l характеризуются тензорным условием $b^i_{(jk)l} = 0$ (как обычно, по индексам, стоящим в круглых скобках, проводится симметрирование, по индексам в квадратных скобках — альтернирование). Пользуясь последним соотношением и обозначая

$$\widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^k, \tag{6}$$

приведем уравнения (5) к виду [5]

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \\ d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + \widetilde{R}^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l. \end{gathered} \tag{7}$$

Как видно из (7), формы $\{\underset{1}{\omega}^i, \widetilde{\omega}^i_j\}$ определяют аффинную связность (обозначается $\widetilde{\Gamma}$) на базе первого слоения ткани B_l. Тензор кривизны этой связности

$$\widetilde{R}^i_{jkl} = \frac{1}{4}(b^i_{klj} - 2a^i_{mj}a^m_{kl}) \tag{8}$$

является ковариантно постоянным в связности $\widetilde{\Gamma}$, т. е. $\widetilde{\nabla}\widetilde{R}^i_{jkl} = 0$, где символ $\widetilde{\nabla}$, как обычно, обозначает ковариантный дифференциал относительно связности $\widetilde{\Gamma}$. Таким образом, связность $\widetilde{\Gamma}$ есть каноническая связность локально симметрической структуры, определенной на многообразии X первой и третьей сериями уравнений (7). Согласно [7] тензоры кручения и кривизны левой ткани Бола удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\widetilde{\nabla}a^i_{jk} \equiv da^i_{jk} - a^i_{mk}\widetilde{\omega}^m_j - a^i_{jm}\widetilde{\omega}^m_k + a^m_{jk}\widetilde{\omega}^i_m = \frac{1}{2}b^i_{jkl}(\underset{3}{\omega}^l + \underset{2}{\omega}^l),$$
$$\widetilde{\nabla}b^i_{jkl} \equiv db^i_{jkl} - b^i_{mkl}\widetilde{\omega}^m_j - b^i_{jml}\widetilde{\omega}^m_k - b^i_{jkm}\widetilde{\omega}^m_l + b^m_{jkl}\widetilde{\omega}^i_m = (a^i_{pl}b^p_{jkm} + a^p_{jk}b^i_{plm})(\underset{3}{\omega}^m + \underset{2}{\omega}^m).$$

Кроме того, их компоненты связаны соотношениями

$$a^i_{pl}b^p_{jkm} - a^i_{pm}b^p_{jkl} + b^i_{plm}a^p_{jk} - b^i_{pml}a^p_{jk} + b^i_{jkp}a^p_{lm} = 0.$$

3. Рассмотрим левую три-ткань Бола CB_l, для которой сердцевина (3) является координатной квазигруппой. Так как $F : X_1 \times X_1 \to X_1$, то слоения этой ткани задаются уравнениями

$$a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad c = F(a, b) = \text{const}$$

на многообразии $X_1 \times \widetilde{X}_2$, где $\widetilde{X}_2 = \mathrm{id}(X_1)$, а id — естественное вложение, полученное отождествлением координат. Поэтому можно считать, что ткань CB_l задана на многообразии $X_1 \times X_1$. В силу замечания 1 получаем, что ткани B_l и CB_l заданы на одном и том же многообразии.

Переобозначив переменные, перепишем уравнения (3) в виде

$$z = f(x, y) = F(x, \overline{x}), \tag{9}$$

где переменные связаны соотношением $y = f^{-1}(\overline{x}, x)$ или

$$x = f(\overline{x}, y). \tag{10}$$

Как видно из уравнений (9), у тканей B_l и CB_l первые слоения ($x = \text{const}$) и третьи слоения ($z = \text{const}$) совпадают. Найдем, как связаны соответствующие дифференциальные формы, определяющие эти слоения.

Прежде всего заметим, что так как ткань CB_l является левой тканью Бола, то ее структурные уравнения имеют вид, аналогичный (7),

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\overline{\omega}}^i &= \underset{1}{\overline{\omega}}^j \wedge \overline{\omega}^i_j, \\ d\underset{2}{\overline{\omega}}^i &= \underset{2}{\overline{\omega}}^j \wedge \overline{\omega}^i_j - \overline{a}^i_{jk}\underset{2}{\overline{\omega}}^j \wedge \underset{3}{\overline{\omega}}^k, \\ d\overline{\omega}^i_j &= \overline{\omega}^k_j \wedge \overline{\omega}^i_k + \overline{R}^i_{jkl}\underset{1}{\overline{\omega}}^k \wedge \underset{1}{\overline{\omega}}^l, \end{aligned} \tag{11}$$

где, как и выше, $\underset{3}{\overline{\omega}}^k = \underset{1}{\overline{\omega}}^k + \underset{2}{\overline{\omega}}^k$, $\overline{a}^i_{jk}$ — тензор кручения ткани CB_l, а $\overline{R}^i_{jkl}$ — ее тензор кривизны.

Согласно [3] три-ткань B_l и соответствующая ей ткань CB_l имеют одну и ту же сердцевину, определенную на X. Следовательно, они индуцируют на X одну и ту же локально симметрическую связность $\widetilde{\Gamma}$. Эта связность определяется на ткани B_l формами $\{\underset{1}{\omega}^i, \widetilde{\omega}^i_j\}$, которые удовлетворяют первой и третьей серии структурных уравнений (7). С другой стороны, связность $\widetilde{\Gamma}$ определяется формами $\underset{1}{\overline{\omega}}^i$ и $\overline{\omega}^i_k$, удовлетворяющими первой и третьей серии структурных уравнений (11). Следовательно, указанные подсистемы эквивалентны в том смысле, что существует преобразование базиса

$$\underset{1}{\overline{\omega}}^i = \alpha^i_j \underset{1}{\omega}^j, \tag{12}$$

при котором тензор кривизны меняется по известному тензорному закону

$$\overline{R}^i_{jkl} = \alpha^i_m \widetilde{R}^m_{pqr} \widetilde{\alpha}^p_j \widetilde{\alpha}^q_k \widetilde{\alpha}^r_l. \tag{13}$$

Пусть в некоторых локальных координатах уравнение (1) ткани B_l имеет вид $z^i = f^i(x^j, y^k)$. Продифференцируем его, и в соответствии с ([1], с. 23) обозначим $\overline{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\widetilde{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}$,

$$\underset{1}{\omega}^i = \overline{f}^i_j dx^j, \quad \underset{2}{\omega}^i = \widetilde{f}^i_j dy^j. \tag{14}$$

Получим $dz^i = \overline{f}^i_j(x,y)dx^j + \widetilde{f}^i_j(x,y)dy^j = \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i$. Аналогично, дифференцируя уравнение $z = F(x, \overline{x})$ ткани CB_l, придем к равенствам $dz^i = \underset{1}{\overline{\omega}}^i + \underset{2}{\overline{\omega}}^i$, где

$$\underset{1}{\overline{\omega}}^i = \overline{F}^i_j(x,\overline{x})dx^j, \quad \underset{2}{\overline{\omega}}^i = \widetilde{F}^i_j(x,\overline{x})d\overline{x}^j.$$

В силу (9)

$$\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = \underset{1}{\overline{\omega}}^i + \underset{2}{\overline{\omega}}^i \tag{15}$$

или

$$\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\overline{\omega}}^i. \tag{16}$$

Далее продифференцируем (10): $dx^i = \overline{f}^i_j(\overline{x},y)d\overline{x}^j + \widetilde{f}^i_j(\overline{x},y)dy^j$. Отсюда

$$dy^j = (dx^k - \overline{f}^k_m(\overline{x},y)d\overline{x}^m)\widetilde{g}^j_k(\overline{x},y),$$

где через $\overline{g}$ и $\widetilde{g}$ обозначены матрицы, обратные матрицам $\overline{f} = (\overline{f}^i_j)$ и $\widetilde{f} = (\widetilde{f}^i_j)$ соответственно. Подставляя dy^j в (15) и используя введенные обозначения, получим

$$\underset{1}{\overline{\omega}}^i + \underset{2}{\overline{\omega}}^i = \underset{1}{\omega}^i + \widetilde{f}^i_j(x,y)\widetilde{g}^j_k(\overline{x},y)(dx^k - \overline{f}^k_m(\overline{x},y)d\overline{x}^m).$$

Сравнивая соответствующие базисные формы, в силу (14) приходим к соотношениям (12), где

$$\alpha^i_j = \delta^i_j + \widetilde{f}^i_k(x,y)\widetilde{g}^k_m(\overline{x},y)\overline{g}^m_j(x,y). \tag{17}$$

Напомним, что переменные x, y, $\overline{x}$ связаны соотношением (10).

Найдем дифференциальные следствия уравнений (12) и (15). Дифференцируя внешним образом уравнения (12) с помощью структурных уравнений (7) и (11), после преобразований имеем

$$\widetilde{\nabla}\alpha^i_j \wedge \underset{1}{\omega}^j + \alpha^k_j(\overline{\omega}^i_k - \widetilde{\omega}^i_k) \wedge \underset{1}{\omega}^j = 0. \tag{18}$$

Сложив первые две серии уравнений (7) и (11), получим

$$d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \quad d\underset{3}{\overline{\omega}}^i = \underset{3}{\overline{\omega}}^j \wedge \overline{\omega}^i_j - \overline{a}^i_{jk}\underset{2}{\overline{\omega}}^j \wedge \underset{3}{\overline{\omega}}^k.$$

Отсюда в силу (16)

$$(\overline{\omega}^i_k - \widetilde{\omega}^i_k - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j + \overline{a}^i_{jk}\underset{2}{\overline{\omega}}^j) \wedge \underset{3}{\omega}^k = 0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает, что формы $\widetilde{\nabla}\alpha^i_j$ и $\overline{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^i_j$ являются главными на многообразии $\mathcal{M}$, т. е. можно положить

$$\widetilde{\nabla}\alpha^i_j = \underset{1}{\alpha}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k + \underset{3}{\alpha}^i_{jk}\underset{3}{\omega}^k, \tag{20}$$

$$\overline{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^i_j = \underset{1}{\gamma}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k + \underset{3}{\gamma}^i_{jk}\underset{3}{\omega}^k. \tag{21}$$

Подставим эти разложения в (18) и (19) и воспользуемся равенствами $\underset{2}{\omega}^k = \underset{3}{\omega}^k - \underset{1}{\omega}^k$, $\underset{2}{\overline{\omega}}^k = \underset{3}{\overline{\omega}}^k - \underset{1}{\overline{\omega}}^k$, соотношениями (12) и (16). Приравнивая коэффициенты при базисных формах в полученных равенствах, придем к соотношениям

$$\overline{a}^i_{jk} = a^i_{jk} + \underset{3}{\gamma}^i_{[jk]}, \tag{22}$$

$$\underset{1}{\gamma}^i_{jk} + a^i_{jk} - \overline{a}^i_{mk}\alpha^m_j = 0, \tag{23}$$

$$\underset{3}{\alpha}^i_{jk} + \alpha^m_j \underset{3}{\gamma}^i_{mk} = 0, \tag{24}$$

$$\underset{1}{\alpha}^i_{[jk]} + \alpha^m_{[j}\underset{1}{\gamma}^i_{|m|k]} = 0.$$

Полученные результаты объединяет

Теорема. *Пусть* B_l *— левая три-ткань Бола со структурными уравнениями* (7), (8), CB_l *— соответствующая левая три-ткань Бола, порожденная сердцевиной ткани* B_l, $z = f(x,y)$ *— координатная лупа ткани* B_l. *Вычислим по формулам* (17) *и* (20) *величины* α^i_j *и их ковариантные производные. Тогда структурные уравнения три-ткани* CB_l *приводятся к виду* (11), *причем базисные формы* $\underset{1}{\overline{\omega}}^i$ *и* $\underset{3}{\overline{\omega}}^i$ *находятся из соотношений* (12) *и* (15); *формы* $\overline{\omega}^i_k$ *находятся из соотношений* (21), *тензор кручения ткани* B_l *— из соотношений* (22); *входящие в эти формулы величины* $\underset{3}{\gamma}^i_{jk}$ *и* $\underset{1}{\gamma}^i_{jk}$ *вычисляются по формулам* (24) *и* (23).

4. Проиллюстрируем теорему на примере. Предварительно напомним, что всякая групповая три-ткань (порожденная группой Ли) является тканью Бола. Рассмотрим четырехмерную групповую три-ткань R, определяемую единственной неабелевой двумерной группой Ли

$$z^1 = x^1 + y^1 e^{x^2}, \quad z^2 = x^2 + y^2. \tag{25}$$

Найдем структурные уравнения три-ткани CR, порождаемой сердцевиной ткани R. Для этой ткани уравнения (3) имеют вид

$$c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{a^2 - b^2}, \quad c^2 = 2a^2 - b^2.$$

Переобозначив переменные, получим уравнения (9) и (10):

$$\begin{gathered} z^1 = x^1 + (x^1 - \overline{x}^1)e^{x^2 - \overline{x}^2}, \quad z^2 = 2x^2 - \overline{x}^2, \\ x^1 = \overline{x}^1 + y^1 e^{\overline{x}^2}, \quad x^2 = \overline{x}^2 + y^2. \end{gathered} \tag{26}$$

Продифференцируем (25) и положим

$$\underset{1}{\omega}^1 = dx^1 + e^{x^2}y^1dx^2,\ \underset{1}{\omega}^2 = dx^2,\ \underset{2}{\omega}^1 = e^{x^2}dy^1,\ \underset{2}{\omega}^2 = dy^2. \tag{27}$$

Из (27) находим

$$\overline{f}^i_j(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & e^{x^2}y^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{f}^i_j(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\overline{g}^i_j(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{x^2}y^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g}^i_j(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Отсюда $\widetilde{g}^i_j(\overline{x},y) = \left(\begin{smallmatrix} e^{-\overline{x}^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Заменим переменную $\overline{x}$, пользуясь равенствами (25)

$$\widetilde{g}^i_j(\overline{x}(x,y),y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Далее, учитывая (28)–(30), находим величины α^i_j по формулам (17)

$$\alpha^i_j = \left[\begin{pmatrix} 1 & e^{x^2}y^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -e^{x^2}y^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} &\alpha^1_1 = e^{y^2} + 1, \quad \alpha^1_2 = -e^{x^2+y^2}y^1, \\ &\alpha^2_1 = 0, \qquad\quad\ \ \alpha^2_2 = 2. \end{aligned} \tag{31}$$

Учитывая (30), из (12) и (15) находим

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\overline{\omega}}^1 = (e^{y^2}+1)\underset{1}{\omega}^1 - e^{x^2+y^2}y^1\underset{1}{\omega}^2, \\ &\underset{1}{\overline{\omega}}^2 = 2\underset{1}{\omega}^2, \\ &\underset{2}{\overline{\omega}}^1 = -e^{y^2}\underset{1}{\omega}^1 + e^{y^2+x^2}y^1\underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^1, \\ &\underset{2}{\overline{\omega}}^2 = -\underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Дифференцируя уравнения (32), придем к структурным уравнениям ткани CR

$$\begin{aligned} &d\underset{1}{\overline{\omega}}^1 = \underset{1}{\overline{\omega}}^1 \wedge \overline{\omega}^1_1 + \underset{1}{\overline{\omega}}^2 \wedge \overline{\omega}^1_2, \\ &d\underset{1}{\overline{\omega}}^2 = 0, \\ &d\underset{2}{\overline{\omega}}^1 = \underset{2}{\overline{\omega}}^1 \wedge \overline{\omega}^1_1 + \underset{2}{\overline{\omega}}^2 \wedge \overline{\omega}^1_2 - \overline{a}^1_{12}\underset{2}{\overline{\omega}}^1 \wedge \underset{3}{\overline{\omega}}^2 - \overline{a}^1_{21}\underset{2}{\overline{\omega}}^2 \wedge \underset{3}{\overline{\omega}}^1, \\ &d\underset{2}{\overline{\omega}}^2 = 0, \\ &d\overline{\omega}^1_1 = 0, \\ &d\overline{\omega}^1_2 = \overline{\omega}^1_2 \wedge \overline{\omega}^1_1 - \frac{1}{16}\underset{1}{\overline{\omega}}^1 \wedge \underset{1}{\overline{\omega}}^2, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega}^1_1 = -\frac{1}{2}\underset{1}{\omega}^2 - \frac{e^{y^2}}{e^{y^2}+1}\underset{2}{\omega}^2 = d\Big(-\frac{1}{2}x^2 - \ln(e^{y^2}+1)\Big),\\
&\overline{\omega}^1_2 = -\frac{1+e^{y^2}}{4}\underset{1}{\omega}^1 + \frac{1}{4}y^1 e^{x^2+y^2}\underset{1}{\omega}^2 - \frac{1}{2}\underset{2}{\omega}^1 + \frac{e^{x^2+y^2}y^1}{2(e^{y^2}+1)}\underset{2}{\omega}^2,\\
&\overline{\omega}^2_1 = 0, \quad \overline{\omega}^2_2 = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Структурные уравнения (33) можно получить также с помощью формул (20)–(24). Для этого воспользуемся результатами работы [9], где найдены формы симметрической связности $\widetilde{\Gamma}$ рассматриваемой три-ткани R и ее тензоры кручения a^i_{jk} и кривизны $\widetilde{R}^i_{jkl}$

$$\begin{gathered}
\widetilde{\omega}^1_1 = -\frac{1}{2}dx^2, \quad \widetilde{\omega}^1_2 = -e^{x^2}dy^1 - \frac{1}{2}(dx^1 + e^{x^2}y^1dx^2),\\
\widetilde{\omega}^2_1 = \widetilde{\omega}^2_2 = 0,
\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}
a^1_{12} = 1/2,\\
\widetilde{R}^1_{212} = -1/8,
\end{gathered} \tag{36}$$

остальные компоненты тензоров равны нулю. Дифференцируя величины α^i_j (см. (31)) и пользуясь (35) и (20), находим

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\alpha}^1_{11} = 0, \quad \underset{1}{\alpha}^1_{12} = -e^{y^2}, \quad \underset{3}{\alpha}^1_{11} = 0, \quad \underset{3}{\alpha}^1_{12} = e^{y^2},\\
\underset{1}{\alpha}^1_{21} = \frac{1}{2}(e^{y^2}+1), \quad \underset{1}{\alpha}^1_{22} = \frac{1}{2}y^1e^{x^2+y^2}, \quad \underset{3}{\alpha}^1_{21} = -1, \quad \underset{3}{\alpha}^1_{22} = -y^1e^{x^2+y^2},
\end{gathered}$$

остальные α^i_{jk} равны нулю. Теперь из (24) находим величины $\underset{3}{\gamma}^i_{jk}$:

$$\begin{gathered}
\underset{3}{\gamma}^1_{11} = 0, \quad \underset{3}{\gamma}^1_{12} = -\frac{e^{y^2}}{e^{y^2}+1}, \quad \underset{3}{\gamma}^1_{21} = \frac{1}{2},\\
\underset{3}{\gamma}^1_{22} = \frac{e^{x^2+y^2}y^1}{2(e^{y^2}+1)}, \quad \underset{3}{\gamma}^2_{jk} = 0;
\end{gathered}$$

затем с помощью (22) — величины $\overline{a}^i_{jk}$:

$$\overline{a}^1_{12} = \frac{1-e^{y^2}}{4(1+e^{y^2})}, \quad \overline{a}^2_{12} = 0;$$

наконец, с помощью (23) — величины $\underset{1}{\gamma}^i_{jk}$:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\gamma}^1_{11} = 0, \quad \underset{1}{\gamma}^1_{21} = \frac{1-e^{y^2}}{4} + \frac{e^{y^2}}{e^{y^2}+1}, \quad \underset{1}{\gamma}^1_{12} = -\frac{1}{2},\\
\underset{1}{\gamma}^1_{22} = \frac{1}{4}y^1e^{x^2+y^2} - \frac{e^{x^2+y^2}y^1}{2(e^{y^2}+1)}, \quad \underset{1}{\gamma}^2_{jk} = 0.
\end{gathered}$$

Подставляя найденные значения $\underset{3}{\gamma}^i_{jk}$ и $\underset{1}{\gamma}^i_{jk}$ в (21) и пользуясь (35), придем к равенствам (34).

Формулы (13) с учетом (36) и (31) дают одну ненулевую компоненту тензора $\overline{R}^i_{jkl}$

$$\overline{R}^1_{212} = -1/32,$$

что согласуется с последним уравнением системы (33).

Вывод. В работе показано, как найти структурные уравнения ткани CB_l двумя способами, причем в обоих существенно используются уравнения исходной ткани B_l в локальных координатах. Вопрос о том, как найти структурные уравнения ткани CB_l, используя только структурные уравнения ткани B_l, остается открытым.

Замечание 2. Известно, что отображение $C : B_l \to CB_l$, которое ткани Бола B_l ставит в соответствие ткань Бола CB_l, идемпотентно: $C^2 = C$. В рассмотренном примере это обстоятельство вытекает также из теоремы 2 статьи [3]. Действительно, $\overline{a}^1_{12} = 0$ на поверхностях V, определяемых уравнениями $\underset{1}{\overline{\omega}}{}^i + 2\underset{2}{\overline{\omega}}{}^i = 0$, которые в силу (35) и (30) приводятся к виду $y^2 = 0$, $x^2 + 2\ln y^1 = K$ (K — постоянная). Согласно теореме 2 это означает, что сердцевина три-ткани CR изотопна ее координатной квазигруппе, т. е. три-ткани CR и CCR эквивалентны.

Литература

[1] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О квазигруппах Бола преобразований*, Докл. РАН **401** (2), 166–168 (2005).

[2] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей*, Изв. вузов. Матем., № 5, 56–62 (2005).

[3] Толстихина Г.А., Шелехов А. М. *О три-тканях Бола с IC-свойством*, Изв. вузов. Матем., № 5, 25–35 (2013).

[4] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О структурных уравнениях три-ткани, определяемой сердцевиной левой три-ткани Бола*, Изв. вузов. Матем., № 12, 83–88 (2014).

[5] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения* (ТвГУ, Тверь, 2010).

[6] Акивис М.А. *Дифференциальная геометрия тканей*, Пробл. геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) **15**, 187–213 (1983).

[7] Толстихина Г.А. *Обобщенная левая три-ткань Бола $B_l(\rho, r, r)$ как фактор-ткань левой ткани Бола $B_l(r, r, r)$*, Вестн. Тверск. гос. ун-та. Сер. прикл. матем., вып. 2(21), № 21, 117–134 (2011).

[8] Толстихина Г.А. *Об условиях изотопии координатной квазигруппы и сердцевины левой ткани Бола*, Изв. ПГПУ им. В.Г. Белинского. Сер. физ.-матем. и техн. науки, № 4(26), 255–262 (2011).

[9] Гегамян Г.Д., Толстихина Г.А. *О квазигруппе Бола, определяемой групповой три-тканью*, Избр. тр. междунар. научн. конф. “Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство”, Ереван (Армения), 26–30 сентября 2011 г. (H∧HPrint, Ереван, 2012), с. 86–93.

Г.А. Толстихина

профессор, заведующая кафедрой математики с методикой начального обучения,
Тверской государственный университет,
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия

А.М. Шелехов

профессор, кафедра функционального анализа и геометрии,
Тверской государственный университет,
ул. Желябова, д. 33, г. Тверь, 170100, Россия,

`e-mail:` amshelekhov@rambler.ru

$\boxed{\textit{G.A. Tolstikhina}}$ *and A.M. Shelekhov*

On the structure equations of the three-web defined by the core of a given left Bol three-web

Abstract. We give a solution to the problem stated by M.A. Akivis at 1976: find the structure equations of the 3-web defined by the core of a given Bol 3-web.

Keywords: Bol three-web, core of Bol three-web.

$\boxed{\textit{G.A. Tolstikhina}}$

Professor, Head of the Chair of Mathematics and Primary Education,
Tver State University,
33 Zhelyabov str., Tver, 170100 Russia

A.M. Shelekhov

Professor, Chair of Functional Analysis and Geometry,
Tver State University,
33 Zhelyabov str., Tver, 170100 Russia,

`e-mail:` amshelekhov@rambler.ru