ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
44.04.01 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКО - МАТЕМЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ»

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ НА ТЕМУ

«СОЗДАНИЕ ПРОЦЕДУР ОСНАЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Работа завершена:
студент группы 05-314
«_____»_________ 2015 г. _________________________________ Садыкова Э.Х.
Работа допущена к защите в ГАК:

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
«_____»_________ 2015 г. _________________________________ Игнатьев Ю.Г.

Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук,
профессор
«_____»_________ 2015 г. _________________________________ Ю.Г. Игнатьев

Казань 2015 год

Оглавление

Введение **3**

I Линейные дифференциальные уравнения **4**
I.1 Основные сведения о линейном дифференциальном уравнении 4
I.2 Методы решений линейных дифференциальных уравнений 13

II Графическое представление линейных ОДУ в Maple **23**

III Решение линейных дифференциальных уравнений в Maple **30**

Заключение **43**

Литература **45**

Введение

Одним из самых распространенных способов изучения химических, физических, экономических, биологических и социальных явлений математическими методами является моделирование этих явлений и процессов дифференциальными уравнениями и их системами. Простейшие модели явлений и процессов описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и даже более узким их классом – обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями. Можно сказать, что линейные дифференциальные уравнения и их системы являются достаточно адекватной математической моделью процессов, либо слабо нарушающих состояние системы, в которой они протекают, либо протекающих в течение малого по сравнению с характерным масштабом системы времени. Оснащенная динамическая визуализация представляет возможность наиболее полно изучить свойства линейных дифференциальных уравнений. Поэтому основной задачей работы является создание собственной библиотеки оснащенной динамической визуализации решений ЛДУ.

Цель работы

Создание библиотеки программных процедур в системе компьютерной математики Maple автоматизированного решения задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка и автоматизированного вывода решений линейных дифференциальных уравнений и фазовых траекторий в формате оснащенной графики.

Актуальность работы

Практическая ценность работы, а также и теоретическая, состоит в том, что результаты носят общий характер и могут быть использоваться при численном и аналитическом исследовании различных задач матфизики, связанных с исследованием и решением линейных дифференциальных уравнений.

Квалификационная работа состоит из Введения, трех глав, Заключения и Списка литературы. Первая глава посвящена обзору теории линейных дифференциальных уравнений. Вторая глава посвящена описанию основных команд пакета Maple. В третьей главе представлена обучающая Maple-программа по исследованию свойств ЛДУ и их графическому отображению. В заключении кратко сформулированы основные результаты. Текст квалификационной работы набран при помощи издательской системы LaTeX.

Глава I

Линейные дифференциальные уравнения

I.1 Основные сведения о линейном дифференциальном уравнении

I.1.1 Определения и общие свойства

Дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее независимые переменные, искомую функцию и её производные. При этом независимые переменные всегда предполагаются вещественными, а рассматриваемые функции (если не оговорено противное) – вещественными и однозначными. Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется порядком уравнения. Если независимая переменная только одна то уравнение называется обыкновенным. В противном случае оно называет уравнением с частными производными.

Пример 1. Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{I.1}$$

есть ОДУ n-го порядка. Здесь y – искомая функция от независимой переменной x; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – производные ох y по x, а F – заданная функция от своих аргументов. Если F – полином относительно $y', y'', \dots, y^{(n)}$, то наивысшая степень старшей производной называется степенью уравнения.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривают главным образом уравнения, разрешенные относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{I.2}$$

Определение OI.1. *Если при этом функция f зависят от $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ линейно, то уравнение можно записать в виде*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{I.3}$$

Такое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением.

В OI.1 $y = y(x)$ — искомая функция, $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y'$ — её производные, а $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$(коэффициенты) и $f(x)$ (свободный член) — заданные функции.

В уравнение I.3 искомая функция y и её производные входят в 1-й степени, т. е. линейно, поэтому оно называется линейным. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение I.3 называется однородным, в противном случае — неоднородным.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{I.4}$$

Такое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

Удобно записывать уравнения I.3 и I.4 в операторной форме: $L[y] = f(x)$ и $L[y] = 0$, соответственно, где величину $L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$ можно рассматривать как результат действия линейного дифференциального оператора L на функцию $y = y(x)$.

Отметим общие свойства ЛДУ:

1) Уравнение остается линейным при замене независимой переменной.
2) Уравнение остается линейным при линейном преобразовании зависимой переменной.

I.1.2 Общая теория линейного однородного уравнения

Запишем ЛОДУ при x, изменяющемся на отрезке $a \leq x \leq b$ в виде:

$$y^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y^{(n-i)} \tag{I.5}$$

Если коэффициенты $p_i(x)$ непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$, то в окрестности любых начальных значений

$$y(x_0) = y_0, \quad y_0'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где x_0-любая точка интервала $a < x < b$, удовлетворяются условия теоремы существования и единственности. Действительно правая часть уравнения I.5 непрерывна по совокупности всех аргументов и существуют ограниченные по модулю частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = -p_{n-k}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, (n-1))$, так как функции $p_{n-k}(x)$ непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$ и, следовательно, ограничены по модулю.

Заметим, что линейность и однородность уравнения сохраняется при любом преобразовании независимого переменного $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$-произвольная n раз дифференцируемая функция, производная которой $\varphi'(t) \neq 0$ на рассматриваемом отрезке изменения t.

Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{[\varphi'(t)]^2} - \frac{dy}{dt}\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Производная любого порядка $\frac{d^ky}{dx^k}$ является однородной функцией производных $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dt^k}$, и следовательно, при постановке в уравнение I.4 его линейность и однородность сохраняются.

Рассмотрим линейное уравнение без правой части:

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad \text{(I.6)}$$

Через L[y] мы будем сокращенно обозначать результат применения к функции y совокупности операций (дифференцирование, умножение на функции $p_{i(x)}$ и сложение), указываемых левой частью уравнения I.6, и будем называть L[y] линейным дифференциальным выражением или линейным дифференциальным оператором. Линейный оператор обладает следующими двумя важными свойствами:

1)
$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \qquad \text{(I.7)}$$

где y_1 и y_2 - любые функции, имеющие n непрерывных производных. В самом деле, раскрывая значения символа оператора, имеем:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' +$$

$$+p_n(y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \ldots + p_ny_1) + (y_2^{(n)} + p_1y_2^{(n-1)} + \ldots + p_ny_2) = L[y_1] + L[y_2].$$

Оператор от суммы равен сумме операторов слагаемых. Это свойство доказано для суммы двух слагаемых, но оно, очевидно, распространяется на сумму любого числа слагаемых.

2)
$$L[Cy] = CL[y], \qquad \text{(I.8)}$$

где y — любая n раз дифференцируемая функция, а C — постоянная, т. е. *постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора.* Доказательство легко проводится подобно тому как в предыдущем случае.

Следствием свойств 1) и 2) является

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_iy_i\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} c_iL[y_i],$$

где c_i-постоянные.

На основании свойств линейного оператора, выражаемых тождествами I.7 и I.8, легко получаются следующие теоремы о решениях однородного линейного уравнения.

Теорема TI.1. *Если y_1 является решением линейного однородного уравнения $L[y] = 0$, то и cy_1, где с-произвольная постоянная, является решением того же уравнения.*

Доказательство.
Дано $L[y_1] = 0$. Надо доказать, что $L[cy_1] = 0$.
Пользуясь свойством 2) оператора L, получим

$$L[Cy_1] = CL[y_1] = 0.$$

Теорема TI.2. *Сумма y_1+y_2 решений y_1 и y_2 линейного однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением того же уравнения.*

Доказательство.
Дано $L[y_1] = 0$ и $L[y_2] = 0$. Надо доказать, что $L[y_1 + y_2] = 0$.
Пользуясь свойством 1) оператора L, получим

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0.$$

Следствие теорем TI.1 и TI.2. Линейная комбинация с произвольными коэффициентами $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i y_i$ решений $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линейного однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением того же уравнения.

Теорема TI.3. *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на отрезке $a \le x \le b$, то на том же отрезке определитель называемый определителем Вронского, тождественно равен нулю.*

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Определителем Вронского $W(x; y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ называется определитель, первая строка которого образована функциями $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ из $C_{n-1}[a, b]$, а последующие строки образованы производными от функций предыдущей строки. Определитель Вронского применяется для решения дифференциальных уравнений, например для того, чтобы узнать, являются ли найденные решения ЛОДУ (либо системы уравнений) линейно независимыми. Это помогает в поиске его общего решения.

Теорема TI.4. *Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ с непрерывными на отрезке $a \le x \le b$ коэффициентами $p_i(x)$, то определитель Вронского не может обращаться в нуль в любой точке отрезка на отрезке $a \le x \le b$.*

I.1.3 Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение вида:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{I.9}$$

где $f \neq 0$. Однородное линейное уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю, называется, как указано выше, однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению I.9. Очевидно, уравнения I.9 и I.6 не имеют общих решений.

Теорема TI.5. *Если известно какое-нибудь частное решение Y неоднородного уравнения I.9, то общее его решение есть сумма этого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения*

.

I.1.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное уравнение первого порядка в стандартной записи имеет вид:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

1) В линейное уравнение входит первая производная y'.
2) В линейное уравнение входит произведение $p(x)y$, где y – функция, а $p(x)$ – выражение, зависящее только от x.
3) В линейное уравнение входит выражение $q(x)$, тоже зависящее только от x. В частности, может быть константой.

– Как уже отмечалось, выражение $q(x)$ может быть некоторой константой k (числом), в этом случае линейное уравнение принимает вид: $y' + p(x)y = k$.

– Выражение $p(x)$ тоже может быть некоторой константой k, тогда линейное уравнение принимает вид: $y' + ky = q(x)$. В простейших случаях константа равна $+1$ или -1, соответственно, линейное уравнение записывается еще проще: $y' + y = q(x)$ или $y' - y = q(x)$.

– Рядом с производной может находиться множитель $r(x)$, зависящий только от x: $r(x)y' + p(x)y = q(x)$ – это тоже линейное уравнение.

I.1.5 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ постоянны, т.е. не зависят от x, то это уравнение называют уравнением с постоянными коэффициентами и записывают его так:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$ будем называть линейным неоднородным уравнением.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$, которое получается из линейного однородного уравнения заменой функции y единицей, а y' и y'' – соответствующими степенями k , называется характеристическим уравнением.

I.1.6 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \tag{I.10}$$

где $a_i = const(i = 1, 2, ..., n)$, f - известная функция, называется линейным дифференциальным уравнением n - го порядка с постоянными коэффициентами. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение I.10 называется однородным, в противном случае – неоднородным.

I.1.7 Системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система n линейных уравнений первого порядка, записанная в нормальном виде имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \tag{I.11}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

или в векторной форме

$$\frac{dX}{dt} = AX + F, \tag{I.12}$$

где X есть n-мерный вектор с координатами $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), F$ есть n-мерный вектор с координатами $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$, которые удобно в дальнейшем рассматривать как одностолбцовые матрицы:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix},$$

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{Vmatrix}.$$

По правилу умножения матриц: строки первого множителя умножаются на столбец второго, следовательно,

$$AX = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{matrix} \right\|, \quad AX + F = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + f_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + f_n \end{matrix} \right\|.$$

Равенство матриц означает равенство всех их элементов, следовательно, одно матричное уравнение (I.12) или

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + f_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + f_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + f_n \end{matrix} \right\|$$

эквивалентно системе I.11.

Если функции $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ в I.11 непрерывны на отрезке $a \leq t \leq b$, то в достаточно малой окрестности каждой точки $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, где $a \leq t_0 \leq b$, выполнены условия теоремы существования и единственности и, следовательно, через каждую точку проходят единственная интегральная кривая системы I.11.

Действительно, в рассматривамом случае правые части системы I.11 непрерывны, и их частные производные по любому x_j ограничены, так как эти частные производные равны непрерывным на отрезке $a \leq t \leq b$ коэффициентам $a_{ij}(t)$.

Определим *линейный оператор* L равенством

$$L|X| = \frac{dX}{dt} - AX,$$

тогда уравнение (I.12) можно записать в виде

$$L|X| = F. \tag{I.13}$$

Если все $f_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ или, что то же самое, матрица $F = 0$, то система I.11 называется *линейной однородной.* В краткой записи линейная однородная система имеет вид

$$L|X| = 0. \tag{I.14}$$

Оператор L обладает следующими двумя свойствами:

1) $L[cX] = cL[X]$, где с-произвольная постоянная.
2) $L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2$.

I.1.8 Специальные функции. Функции Бесселя. Функции Эйри.

Специальные функции — это функции, встречающиеся в различных приложениях математики (чаще всего — в задачах матфизики), которые не выражаются через элементарные функции. Специальные функции представляются в виде рядов или интегралов.

Специальные функции возникают обычно в следующих случаях:

- «неберущиеся» интегралы;
- решения трансцендентных уравнений, не выражающиеся в элементарных функциях;
- решения дифференциальных уравнений, не выражающиеся в элементарных функциях;
- ряды, не сходящиеся к элементарным функциям;
- математическое выражение свойств чисел;
- необходимость задания функции с необычными свойствами.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цилиндрическими функциями называются решения ЛДУ второго порядка

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \big(1 - \frac{v^2}{z^2}\big)u = 0, \tag{I.15}$$

где z — комплексное переменное, v — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Понятие «цилиндрические функции» обязано своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение I.15 встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрической области.

Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе под названием функций Бесселя, и иногда это наименование присваивается всему классу цилиндрических функций.

Наиболее часто встречающиеся цилиндрические функции:

- Функции Бесселя
  - первого рода, ограниченные
  - второго рода (называемые также «функции Неймана»), неограниченные в нуле
- Функции Ганкеля первого и второго рода — комплексные линейные комбинации функций Бесселя и Неймана
- Модифицированные функции Бесселя — функции Бесселя от комплексного аргумента, неограниченные монотонные
- Функция Бурже — обобщение интегрального представления функции Бесселя

Функции Бесселя

Модифицированные функции Бесселя

С функциями Бесселя тесно связаны две часто встречающиеся в приложениях функции $I_v(z)$ и $K_v(z)$, которые для z, принадлежащего плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и произвольного v, могут быть определены при помощи формул:

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(K+v+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi,$$

$$K_v(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-v}(z) - I_v(z)}{\sin v\pi}, \quad |\arg z| < \pi, \quad v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

и при целом $v = n$:

$$K_n(z) = \lim_{v \to n} K_v(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$I_v(z)$ и $K_v(z)$ представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ и целые функции v.

Функции Эйри

С цилиндрическими функциями связаны функции Эйри, которые представляют собой решения дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' - zu = 0. \tag{I.16}$$

Функции Эйри играют важную роль в теории асимптотических представлений различных специальных функций, являющихся интегралами ЛДУ. В частности, с их помощью оказывается возможным получить асимптотические представления для цилиндрических функций при больших по модулю значениях аргумента z и индекса v, справедливые в широкой области изменения переменных.

Функции Эйри находят также разнообразные применения в матфизике, к примеру в теории дифракции радиоволн у земной поверхности.

Общий интеграл уравнения I.16 может быть выражен через модифицированные цилиндрические функции порядка $v = \pm\frac{1}{3}$. В частности, линейно независимыми решениями уравнения являются функции Эйри первого и второго рода:

$$u = u_1 = Ai(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{3}\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3}\right) - I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right] \equiv \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3}\right),$$

$$u = u_1 = Bi(z) = \left(\frac{z}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(\left[I_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + I_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right], \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}. \tag{I.17}$$

I.2 Методы решений линейных дифференциальных уравнений

Изучение линейных дифференциальных уравнений составляет отдельное теоретическое направление потому, что они обладают рядом свойств, позволяющих глубже их изучить. Основное свойство состоит в том, что все решения линейного уравнения или системы выражаются через конечное число решений.

I.2.1 Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Существует два способа решения этого уравнения:

1)метод интегрирующего множителя;
2)метод вариации постоянной.

Для начала рассмотрим первый метод решения ЛДУ первого порядка (с помощью интегрирующего множителя).

Умножим обе части исходного уравнения на интегрирующий множитель $e^{\int p(x)dx}$:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \tag{I.18}$$

Далее заметим, что производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int p(x)dx\right)' = p(x)$$

По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$\left(e^{\int p(x)dx}\right)' = e^{\int p(x)dx}\left(\int p(x)dx\right)' = e^{\int p(x)dx}p(x) = p(x)e^{\int p(x)dx}$$

По правилу дифференцирования произведения получим:

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = y'e^{\int p(x)dx} + y\left(e^{\int p(x)dx}\right)' = y'e^{\int p(x)dx} + yp(x)e^{\int p(x)dx}$$

Подставляем в I.18:

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Далее интегрируем:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

Умножаем на $e^{-\int p(x)dx}$. Получаем общее решение ЛДУ первого порядка:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Рассмотрим решение линейного дифференциального уравнения первого порядка вторым методом.

Метод вариации постоянной (Лагранжа)

Метод вариации постоянных (или метод Лагранжа) используется для построения общего решения неоднородного уравнения, когда известно общее решение ассоциированного с ним однородного уравнения.

Для начала ищем решение однородного уравнения:

$$y' + p(x)y = 0$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

Разделяем переменные – умножаем на dx, делим на y:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = C$$

Интеграл по y – табличный:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

Тогда

$$\ln|y| = C - \int p(x)dx$$

Теперь потенцируем:

$$|y| = e^C e^{-\int p(x)dx}$$

Заменим постоянную e^C на C и уберем знак модуля, что сводится к умножению на постоянную ± 1, которую включим в C:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{I.19}$$

Теперь считаем, что постоянная C является функцией от x:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Находим производную:

$$\left(\int p(x)dx\right) = p(x)$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$(e^{-\int p(x)dx}) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(-\int p(x)dx\right) = -e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x)$$

По правилу дифференцирования произведения получаем:

$$y' = C'e^{-\int p(x)dx} + C\left(e^{-\int p(x)dx}\right) = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - Cp(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)Ce^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

Два члена сокращаются. Отсюда получаем:

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Интегрируем:

$$C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$$

Где $C1$ - постоянная интегрирования. Подставляем в I.19:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right] \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Заменяем константу C1 на C. В результате получаем общее решение ЛДУ первого порядка:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

Пример решения линейного дифференциального уравнения первого порядка с помощью интегрирующего множителя

Пример П.1. $xy' + 3y = x^2$

Разделяемм обе части исходного уравнения на x:

$$y' + \frac{3}{x}y = x$$

Таким образом

$$p(x) = \frac{3}{x}$$

$$\int p(x)dx = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ln|x| = \ln|x|^3$$

Интегрирующий множитель:

$$\mathrm{e}^{\int \mathrm{p(x)dx}} = \mathrm{e}^{\ln|\mathrm{x}|^3} = |\mathrm{x}|^3$$

Знак модуля можно опустить, так как интегрирующий множитель можно умножать на любую константу (в том числе на ± 1).

Умножим (i) на x^3:

$$y'x^3 + 3yx^2 = x^4$$

Выделим производную.

$$y'x^3 + 3yx^2 = y'x^3 + y(x^3)' = (yx^3)' = x^4$$

$$(yx^3)' = x^4$$

Интегрируем, применив таблицу интегралов:

$$yx^3 = \int x^4 dx + C = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

Делим на x^3

$$y = \frac{C}{x^3} + \frac{1}{5}x^2$$

Пример решения линейного дифференциального уравнения первого порядка методом вариации постоянной

Рассмотрим пример ПІ.1

Решаем однородное уравнение:

$$xy' + 3y = 0$$

Разделяем переменные:

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Умножим на $\dfrac{dx}{dy}$:

$$\frac{dy}{y} + 3\frac{dx}{x} = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} + 3\int \frac{dx}{x} = C$$

Интегралы табличные:

$$\ln|y| + 3\ln|x| = C$$

Потенцируем:

$$|y| \cdot |x^3| = \mathrm{e}^{\mathrm{C}}$$

Заменим постоянную e^C на C и убираем знаки модуля:

$$y \cdot x^3 = C$$

Отсюда:

$$y = \frac{C}{x^3}$$

Заменим константу C на функцию от x:

$$C \to u(x)$$

$$y = \frac{u}{x^3}$$

И находим производную:

$$y' = \left(u\frac{1}{x^3}\right)' = u'\frac{1}{x^3} + u(x^{-3})' = \frac{u'}{x^3} + u(-3x^{-4}) = \frac{u'}{x^3} - \frac{3u}{x^4}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$xy' + 3y = x^2$

$x\left(\frac{u'}{x^3} - \frac{3u}{x^4}\right) + \frac{3u}{x^3} = x^2;$

Или:

$\frac{u'}{x^2} = x^2;$

$\frac{du}{dx} = x^4.$

Интегрируем:

$u = \int x^4 dx + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

Решение уравнения:

$y = \frac{u}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{C}{x^3}\right) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{C}{x^3}$

I.2.2 Решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

Если в ЛОДУ

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{I.20}$$

все коэффициенты a_i постоянны, то его частные решения могут быть найдены в виде $y = e^{kx}$, где k – постоянная. Действительно, подставляя в уравнение I.20 $y = e^{kx}$ и $y^{(p)} = k^p e^{kx} p = 1, 2, \ldots, n$), будем иметь:

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + ... + a_n e^{kx} = 0$$

Сокращая на необращающийся в нуль множитель e^{kx}, получим так называемое *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{I.21}$$

Это уравнение n-й степени определяет те значения k, при которых $y = e^{kx}$ является решением исходного ЛОДУ с постоянными коэффициентами I.20. Если все корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения различны, то, тем самым, найдено n линейно независимых решений $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^k n^x$ уравнения I.20. Следовательно,

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^k n^x$$

где c_i – произвольные константы, является общим решением исходного уравнения I.20. Этот метод интегрирования линейных уравнений с постоянными коэффициентами впервые был предложен Эйлером.

Пример ПI.2. *y”-3y’+2y=0*

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 3k + 2 = 0$, его корни $k_1 = 1, \quad k_2 = 2$. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$.

I.2.3 Решение линейных неоднородных уравнений

Теорема ТI.6. *Теорема существования и единственности решения уравнения*

$$y' = f(x, y) \tag{I.22}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пусть в замкнутой области $R(|x - x_0| \leq a,|y - y_0| \leq b)$ функции f и f'_y непрерывны. Тогда на некотором отрезке $x_0 — -d \leq x \leq x_0 + d$ существует единственное решение уравнения I.22 удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При этом можно взять $d = \min\left(a; \dfrac{b}{m}\right)$, где и b указаны выше, а m — любое такое, что $|f| \leq m$ в R.

Последовательные приближения, определяемые формулами

$$y_0(x) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{k-1}(s))ds, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

равномерно сходятся к решению на указанном отрезке.

Замечание. Для существования решения достаточно только непрерывности $f(x, y)$ в области R, но при этом решение может не быть единственным.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{I.23}$$

Если при $a \leq x \leq b$ в уравнении I.23 все коэффициенты $p_i(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны, то оно имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)},$$

где $y_0^{(k)}$-любые действительные числа, $k = (0, 1, \ldots, n - 1)$, а x_0-любая точка интервала $a < x < b$.

Действительно, правая часть уравнения

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_n(x)y + f(x)$$

в окрестности рассматриваемых начальных значений удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности:

1)правая часть непрерывна по всем аргументам;

2)имеет ограниченные частные производные по всем $y^{(k)}$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, так как эти производные равны непрерывным по предположению на отрезке $a \le x \le b$ коэффициентам $-p_{n-k}(x)$.

Еще раз отметим, что на начальные значения $y_0^{(k)}$ не налагается никаких ограничений.

Из двух основных свойств линейного оператора

$$L[cy] = cL[y]$$

.

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1 + y_2] + L[y_1 + y_2]$$

где с — постоянная, непосредственно следует:

1) Сумма $\tilde{y} + y_1$, решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ и решения y_1 соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением неоднородного уравнения I.23.

2) Если y_i является решением уравнения $L[y] = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i y_i$ является решением уравнения

$$L[y] = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x),$$

где a_i — постоянные.

Доказательство.

$$L[\sum_{i=1}^{m} a_i y_i] \equiv \sum_{i=1}^{m} L[a_i y_i] \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i L[y_i], \tag{I.24}$$

но $L[y_i] \equiv f_i(x)$, следовательно,

$$L[\sum_{i=1}^{m} a_i y_i] \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x).$$

Это свойство, называемое часто *принципом суперпозиции (или принципом наложения)*, очевидно, остается справедливым и при $m \to \infty$, если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x)$ сходится и допускает n-кратное почленное дифференцирование, так как в этом случае возможен предельный переход в тождествах I.24.

3) Если уравнение $L[y] = U(x) + iV(x)$, где все коэффициенты $p_i(x)$ и функции $U(x)$ и $V(x)$ действительны, имеет решение $y = u(x) + iv(x)$, то действительная часть решения $u(x)$ и мнимая часть $v(x)$ являются соответственно решениями уравнений

$$L[y] = U(x), \quad L[y] = V(x).$$

Теорема TI.7.
Общее решение на отрезке $a \leq x \leq b$ уравнения $L[y] = f(x)$ с непрерывными на том же отрезке коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения y неоднородного уравнения.

Пример ПI.3. *y"+y=x.*

Одно частное решение этого уравнения $y = x$, очевидно общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = c_1 cosx + c_2 sinx + x$$

I.2.4 Решение линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

При решении линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами во многих случаях без проблем удается подобрать частные решения и таким образом свести задачу к интегрированию соответствующего однородного уравнения.

Пусть, например, правая часть является многочленом степени s, и следовательно, уравнение имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \tag{I.25}$$

где все a_j и A_i – постоянные. Если $a_n \neq 0$, то существует частное решение уравнения I.25, имеющее тоже вид многочлена степени s. Действительно, подставляя

$$y = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s$$

в уравнение I.25 и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получаем для определения коэффициентов B_i всегда разрешимую, если $a_n \neq 0$ систему линейных уравнений:

$$a_n B_0 = A_0, \quad B_0 = \frac{A_0}{a_n}, \quad a_n B_1 + s a_{n-1} B_0 = A_1,$$

откуда определяется B_1,

$$a_n B_2 + (s-1) a_{n-1} B_1 + s(s-1) a_{n-2} B_0 = A_2,$$

откуда определяется B_2,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n B_s + \ldots = A_s,$$

откуда определяется B_s.

Итак, если $a_n \neq 0$, то существует частное решение, имеющее вид многочлена, степень которого равна степени многочлена, стоящего в правой части.

I.2.5 Решение линейных уравнений с переменными коэффициентами

Если известно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0,$$

то его порядок можно понизить на единицу (не нарушая линейности уравнения). Для этого в уравнение надо поставить $y = y_1 z$ и затем понизить порядок заменой $z' = u$. Чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, у которого известно одно частное решение y_1, можно понизить порядок уравнения указанным выше способом. Однако удобнее воспользоваться формулой Остроградского-Лиувилля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

где y_1 и y_2 – любые два решения данного уравнения.

ЛНДУ второго порядка с переменными коэффициентами имеет вид $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ где $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$.

Общее решение неоднородного уравнения: сумма общего решения $y_0(x)$ ассоциированного однородного уравнения и частного решения $Y(x)$ неоднородного уравнения.

Для построения общего решения неоднородного уравнения чаще всего используют следующий подход:

- Сначала путем подбора находят частное решение однородного уравнения.
- Затем по формуле Лиувилля-Остроградского получают общее решение однородного уравнения.
- Далее методом вариации постоянных (методом Лагранжа) определяют общее решение неоднородного уравнения.

Глава II

Методы решения линейных дифференциальных уравнений и их графическое представление в Maple

В этой главе рассматриваются методы решения линейных дифференциальных уравнений и их графическое представление в Maple.

Системы класса Maple созданы корпорацией Waterloo Maple, Inc. (Канада) как системы компьютерной алгебры (СКА) с расширенными возможностями в области символьных (аналитических) вычислений.

Maple — это типичная интегрированная программная система. Она включает в себя:

- мощнейший язык программирования (он же язык для интерактивного общения пользователя с системой);
- понятный редактор для подготовки и редактирования документов и программ;
- современный многооконный пользовательский интерфейс с возможностью работы в диалоговом режиме;
- мощную справочную систему со многими тысячами примеров;
- словарь математических терминов и понятий с алфавитным принципом организации;
- ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений;
- численный и символьный программные процессоры;
- систему диагностики;
- библиотеки встроенных и доп. функций;
- пакеты расширения как встроенные, так и сторонних производителей;
- средства поддержки некоторых языков программирования и интеграции с широко распространенными программами.

Основные средства решения дифференциальных уравнений

Maple позволяет вычислять производные по одной или нескольким переменным следующим образом:

```
diff(a, x1, x2, ..., xn)
Diff(a, x1, x2, ..., xn)
```

Здесь a — функция f(x1, x2, ... xn) ряда переменных, по которым производится дифференцирование. Функция Diff является инертной формой вычисляемой функции diff (отложенная команда) и может использоваться для воспроизведения математической записи взятия производной. в документах. Функция diff вычисляет частные производные для выражения a по переменным x1, x2, ..., xn. К примеру diff(f(x),x) вычисляет первую производную функции ($f(x)$) по переменной x. При n, большем 1, вычисления производных выполняются рекурсивно, например, diff(f(x),x,y) эквивалентно diff(diff (f(x),x),y). При формировании производных высокого порядка полезен оператор последовательности $, позволяющий легче и нагляднее задать производную. К примеру, вместо записи diff(f(x),x,x,x) удобнее записать diff (f (x) ,x$3).

Команда solve

Команда solve () одна из самых полезных команд системы Maple. Она позволяет решать уравнения и системы уравнений, неравенства и системы неравенств. Она всегда пытается найти замкнутое решение в аналитической форме. Ее синтаксис прост и легко запоминается:

solve(eqn, var) или solve(eqnl,eqn2,...,varl,var2,...)

где eqn — уравнение, содержащее функцию ряда переменных, var — переменная, по которой ищется решение. Если при записи eqn не используются знак равенства или знаки отношения, считается, что solve ищет корни уравнения eqn=0. Если eqn полином, то solve вычисляет все корни полинома — как действительные, так и комплексные. Если переменная не задана, относительно которой нужно решать уравнение или систему уравнений, то Maple выдаст все решения относительно всех неопределенных переменных в исходных уравнениях.

Функция solve старается дать решение в аналитическом виде. Это не означает, что ее нельзя использовать для получения корней уравнений в численном виде. Просто для этого придется использовать функции evalf или convert. Когда Maple не может найти ни одного решения, то команда solve () возвращает пустую последовательность null. Это означает, что либо решения не существует, либо Maple не удалось его найти.

Команда dsolve

Для решения ОДУ и их систем можно использовать команду dsolve() или функции пакета DEtools, которые позволяют строить численное решение дифференциальных уравнений и отображать их в графическом виде, включая построение фазового портрета систем дифференциальных уравнений.

Для решения системы простых дифференциальных уравнений (задача Коши) используется функция dsolve в разных формах записи:

```
>dsolve(ODE)
 dsolve(ODE, y(x), extra-args)
 dsolve((ODE, ICs), y(x), extra-args)
 dsolve({sysODE, ICs}, {funcs}, extra-args)
```

Здесь ODE — одно обыкновенное дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений первого порядка с указанием начальных условий, y(x) — функция одной переменной, ICs — выражение, задающее начальные условия, sysODE — множество дифференциальных уравнений, $funcs$ — множество неопределенных функций, $extra - argument$ — опция, задающая тип решения. Параметр $extra - argument$ задает класс решаемых уравнений. Отметим основные значения этого параметра:

- exact — аналитическое решение (принято по умолчанию);
- explicit — решение в явном виде;
- system — решение системы дифференциальных уравнений;
- ICs — решение системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями;
- formal series — решение в форме степенного многочлена;
- integral transform — решение на основе интегральных преобразований Лапласа, Фурье и др.;
- series — решение в виде ряда с порядком, указываемым значением переменной Order;
- numeric — решение в численном виде.

Вычисление интегралов

Интегрирование выражений по заданной переменной осуществляется командой int(), которая также имеет отложенную форму Int().

Интегральное исчисление возникло в следствии необходимости вычисления площадей, объемов и центров тяжести различных фигур. Если задана некоторая функция $f(x)$, то определенный интеграл вида $\int_b^a f(x)dx$ дает значение площади, ограниченной пределами интегрирования a и b, кривой $f(x)$ и осью абсцисс X. Под площадью понимают ее алгебраическое значение, то есть разность между площадью над осью X и под ней. В этом случае ясно, что определенный интеграл может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Если $f(x)dx$ есть дифференциал функции $F(x)$, то

$$f(x)dx = dF(x).$$

Функцией $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$. Наиболее общий вид первообразной функции $f(x)$ называют неопределенным интегралом и обозначают как

$$\int f(x)dx.$$

Соответственно определенный интеграл определяется как:

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a).$$

В состав этого выражения включена некоторая постоянная интегрирования С, подчеркивающая, что для одной и той же $f(x)$ существует масса первообразных, описываемых одной и той же линией, но смещенных по вертикали на произвольную постоянную. Например, для $f(x) = \sin(x)$ имеем

$$\int \sin(x)dx = -\sin(x) + C.$$

Следует отметить, что Maple обычно стремиться вычислить определенный интеграл в аналитическом виде, даже если он представляется числом. Если нужно найти заведомо численное значение определенного интеграла, можно воспользоваться численными методами вычисления.

Для вычисления неопределенных и определенных интегралов Maple предоставляет следующие функции:

int(f, x);   int(f, x=a..b);   int(f,x=a..b,continuous);

Здесь f — подынтегральная функция, x — переменная, по которой выполняются вычисления, a и b — нижний и верхний пределы интегрирования, continuous — необязательное дополнительное условие.

Maple старается найти аналитическое значение интеграла с заданной подынтегральной функцией. Если это не удается (например, для «не берущихся» интегралов), то возвращается исходная запись интеграла. В подобных случаях можно вычислить значение определенного интеграла численным способом с помощью команды evalf ().

Для решения задачи Коши в параметры dsolve включаются начальные условия, а при решении краевых задач — краевые условия. Если Maple способна найти решение при числе начальных или краевых условий меньшего порядка системы, то в решении будут появляться неопределенные константы вида C1, C2 и т. д. Они же могут быть при аналитическом решении системы, когда начальные условия не заданы. Если решение найдено в неявном виде, то в нем появится параметр T. По умолчанию функция dsolve автоматически выбирает наиболее подходящий метод решения дифференциальных уравнений. Однако в параметрах функции dsolve в квадратных скобках можно указать предпочтительный метод решения дифференциальных уравнений. Допустимы следующие методы: $quadrature, linear, Bernoulli, separable, inverselinear, homogeneous,$
$Chini, linsym, exact, Abel, potsym.$

Производные при записи дифференциальных уравнений могут задаваться функцией diff или оператором D. Выражение sysODE должно иметь структуру множества и содержать помимо самой системы уравнений их начальные условия.

Для графического представления результатов решения дифференциальных уравнений может использоваться функция odeplot из пакета plots. Эта функция используется в следующем виде: odeplot(s,vars,r,o) где s — запись (в выходной форме) дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, решаемых численно функцией dsolve, vars — переменные, r — параметр, задающий пределы решения (например, a..b) и o — необязательные дополнительные опции.

Команды Maple, необходимые для дальнейших вычислений

Внутренняя структура объектов Maple.

Каждое алгебраическое выражение хранится системой Maple в виде древовидной структуры, обеспечивая тем самым доступ к любому ее члену или подвыражению, а также позволяя выполнять над ними разнообразные символьные преобразования. В представлении этой структуры каждый объект Maple делится на подобъекты первого уровня, которые, в свою очередь, также делятся на подобъекты и т.д.

Команды, позволяющие выделять части объектов:

- rhs(уравн) – Выделение правой части уравнения (или конца диапазона);
- lhs(уравн) – Выделение левой части уравнения (или начала диапазона).

Подстановка и преобразование типов

- subs(подстановка, ВЫРАЖЕНИЕ) – Синтаксическая подстановка одного выражения вместо другого в ВЫРАЖЕНИЕ.

Заметим, что Maple автоматически производит сокращение дробей. Над обыкновенными дробями можно выполнять все основные арифметические операции. Если при задании дроби ее знаменатель сокращается, то такая «дробь» трактуется программой Maple как целое число. Для преобразования обыкновенной дроби в десятичную служит команда evalf( ). Во многих случаях аналитические решения даже простых ДУ оказываются весьма сложными, например, содержат специальные математические функции. При этом нередко полезна подмена такого решения другим, тоже аналитическим, но приближенным решением. Наиболее распространенным приближенным решением в этом случае может быть замена реального решения полиномом той или иной степени. При этом порядок полинома задается значением системной переменной Order, а для получения такого решения функция dsolve должна иметь параметр series. Нетрудно заметить, что точное аналитическое решение весьма сложно и содержит специальные функции Бесселя и гамма-функции.

Двумерная графика

Благодаря графическим функциям Maple пользователь без какой-либо специальной подготовки может построить типовые графики. Для этого нужно лишь указать функцию, график которой мы хотим построить, и задать пределы изменения независимых переменных. Однако с помощью дополнительных необязательных опций можно существенно изменить вид графиков — например, настроить стиль и цвет и толщину линий, вывести титульную надпись (label), изменить вид координатных осей и т. д.

В Maple введены функции быстрого построения графиков. Так, функция smart- plot(f) предназначена для создания двумерных графиков. Параметр f может задаваться в виде одиночного выражения или набора выражений, разделяемых запятыми. Задание управляющих параметров в этих графических функциях не предусмотрено; таким образом, их можно считать первичными или черновыми. Для функции построения двумерного графика по умолчанию задан диапазон изменения аргумента −8..8.

Для построения двумерных графиков служит функция plot. Она задается в виде:

plot(f, h, v) plot(f, h, v, опции)

где f — функция, график которой мы собираемся построить, h — переменная с указанием области ее изменения (горизонт), v — необязательная переменная с указанием области изменения (вертикаль),
опции — параметр или набор параметров, задающих стиль построения графика (толщину и цвет кривых, тип кривых, метки на них и т. д.).

Самыми простыми формами задания этой функции являются следующие:

- plot(f,xmin..xmax) — построение графика функции f, заданной только своим именем в интервале изменения x от xmin до xmax;
- plot(f(x),x=xmin..xmax) — построение графика функции $f(x)$ в интервале изменения x от xmin до xmax.

Возможны следующие дополнительные параметры:

- axes — для определения типов координат (axes=NORMAL — обычные оси координат (по умолчанию), axes=BOXES — график заключается в рамку осями-шкалами, axes=FRAME — оси в виде перекрещенных линий, axes=NONE — оси не выводятся);
- axesfont — задание шрифтов для подписи делений на координатных осях;
- color — задает цвет кривых;
- coords — задание типа координатной системы;
- font— задание шрифта в виде [семейство, стиль, размер);
- labels — задание надписей по координатным осям в виде [X,Y], где X и Y – надписи по осям x и y графика;
- legend — задает отображение легенды (обозначения кривых);

- linestyle — задание стиля линий (1 — сплошная, 2 — точками, 3 — пунктиром и 4 — штрихпунктиром);
- numpoints — задает минимальное количество точек на графике (по умолчанию numpoints=49);
- sample — задает список параметров для предварительного представления кривых;
- scaling — задает масштаб графика: CONSTRAINED (сжатый) или UNCONSTRAINED (несжатый — по умолчанию);
- size — задает размер шрифта в пунктах;
- style — задает стиль построения графика (POINT — точечный, LINE — линиями);
- title — задает построение заголовка графика (title=«string», где string — строка);
- titlefont — определяет шрифт для заголовка;
- thickness — определяет толщину линий графиков (0, 1, 2, 3, значение по умолчанию — 0);
- view=[A, B] — определяет максимальные и минимальные координаты, в пределах которых график будет отображаться на экране, A = [xmin..xmax], B=[ymin..ymax] (по умолчанию отображается вся кривая);
- xtickmarks — задает минимальное число отметок по горизонтальной оси x;
- ytickmarks — задает минимальное число отметок по вертикальной оси y.

Глава III

Решение линейных дифференциальных уравнений в Maple

Продемонстрируем решение П.2 на стр. 19 $y'' - 3y' + 2y = 0$ в Maple . Для этого используем функцию dsolve.

```
>prim1:=diff(y(x),x$2)-3*diff(y(x),x)+2*y(x)=0;
>dsolve(prim1,y(x));

prim1 := diff(y(x), `$`(x, 2))-3*(diff(y(x), x))+2*y(x) = 0
y(x) = _C1*exp(2*x)+_C2*exp(x)
```

Действительно, характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 3k + 2 = 0$.

Его корни $k_1 = 1, k_2 = 2$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Решим П.3 на стр. 21 $y'' + y = x$ с помощью Maple. Ранее мы получили общее решение соответствующего однородного уравнения $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ и частное решение этого уравнения $y = x$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$

```
>prim2:=diff(y(x),x$2)+y(x)=x;
>dsolve(prim2,y(x));

prim2 := diff(y(x), `$`(x, 2))+y(x) = x
y(x) = sin(x)*_C2+cos(x)*_C1+x
```

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка: (то есть известная функция является функцией одной переменной и ее производная входит в уравнение не выше второго порядка)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

где y'', y' входят в уравнение линейным образом.

Решение ЛДУ находится на основе теоремы, что если найдено общее решение однородного и частное решение неоднородного уравнения, то решение линейного дифференциального уравнения – это их сумма.

То есть
$$y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0 = 0$$

$y_0(x, C_1, C_2)$-общее решение
$y_1(x)$-частное решение
$y(x) = y_0(x) + y_1(x)$

Напишем процедуру «Eq2» для решения дифференциального уравнения «d2»:
$$d2 := \frac{d^2}{dt^2}Z(t) + t^2\left(\frac{d}{dt}Z(t)\right) + tZ(t) = tsin(t) \tag{III.1}$$

Для этого создадим библиотеку

```
Diffeq:=table():
```

Для процедуры нам потребуются локальные переменные X, Y, P, Q, F, где X-независимая переменная, $Y(x)$ – искомая функция, $P(X)$ и $Q(X)$ – коэффициенты ЛДУ, F – заданная функция от своих аргументов.

```
Diffeq[Eq2]:=proc(x,y,p,q,f) local X,Y,P,Q,F:
Y:=(X)->subs(x=X,y):
P:=(X)->subs(x=X,p):
Q:=(X)->subs(x=X,q):
F:=(X)->subs(x=X,f):
diff(Y(x),x$2)+P(x)*diff(Y(x),x)+Q(x)*Y(x)=F(x):
end proc:
d2:=Diffeq[Eq2](t,Z(t),t^2,t,t*sin(t));
```

Решим это уравнение, используя процедуру dsolve:

```
zz:=dsolve(d2,Z(t));
```

Получим решение в виде:

$$\begin{aligned} Z(t) = {} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\mathrm{t}^3}\sqrt{\mathrm{t}}\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\mathrm{t}^3\right)\_\mathrm{C2} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\mathrm{t}^3}\sqrt{\mathrm{t}}\mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\mathrm{t}^3\right)\_\mathrm{C1} + \\ & \frac{1}{3}\sqrt{t}\Bigg(\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}t^3\right)\left(\int t^{\frac{3}{2}} BesselK\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}t^3\right)\sin(t)e^{\frac{1}{6}t^3}dt\right) - \\ & \mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}t^3\right)\left(\int t^{\frac{3}{2}} BesselI\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}t^3\right)\sin(t)\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\mathrm{t}^3}\mathrm{dt}\right)\Bigg)\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\mathrm{t}^3} \end{aligned} \tag{III.2}$$

Решение уравнения выражается через функции Бесселя (подробнее они описаны на стр. 11).

В $Z1$ заменим t в правой части zz

```
Z1:=(T,C1,C2)->subs({_C1=C1,_C2=C2,t=T},rhs(zz));
Z1(tau,1,2);
```

Получим:

$$2\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\tau^3}\sqrt{\tau}\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\tau^3\right)+\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\tau^3}\sqrt{\tau}\mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\tau^3\right)+ \frac{1}{3}\sqrt{\tau}\left(BesselI\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\tau^3\right)\left(\int\tau^{\frac{3}{2}}BesselK\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\tau^3\right)\sin(\tau)e^{\frac{1}{6}\tau^3}d\tau\right)- \mathrm{BesselK}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\tau^3\right)\left(\int\tau^{\frac{3}{2}}BesselI\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\tau^3\right)\sin(\tau)\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\tau^3}\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\tau^3} \qquad (\mathrm{III.3})$$

Присвоим τ значение $=1$.

```
evalf(Z1(1,1,2));
Error, (in evalf/int) invalid arguments
```

Выдается ошибка, так как интеграл неопределенный, не получается вычислить. Для того, чтобы вычислить значение неопределенного интеграла нужно решить задачу Коши. (Программа для решения задачи Коши представлена ниже).

```
int(BesselK(1/6,x^3/6)*x^(3/2)*sin(x)*exp(x^3/6),x=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty BesselK(\frac{1}{6},\frac{1}{6}x^3)x^{\frac{3}{2}}\sin(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\mathrm{x}^3}\mathrm{dx} \qquad (\mathrm{III.4})$$

Вычислим значение интеграла

```
evalf(int(BesselK(1/6,x^3/6)*x^(3/2)*sin(x)*exp(x^3/6),x=0..1));
```

0.8305161776 Зададим начальные условия

```
Inits:=Z(0)=1,D(Z)(0)=2;
```

Обозначим через zzz уравнение с начальными условиями. И произведем замену:

```
zzz:=dsolve({d2,Inits},Z(t));
Z2:=(T)->evalf(subs(t=T,rhs(zzz)));
```

Присвоим T значение $=1$. В результате вычислений получим $Z2(1) = 2.625923102$

Напишем процедуру Solve для нахождения приближенного решения на отрезке $[t_0, t_1]$

```
Solve:=proc(t,tt,N,c) local F,T,t0,t1,dt,i,ti,FF:
F:=(T)->evalf(subs(t=T,Z2(t))):
t0:=tt[1]:t1:=tt[2]:dt:=(t1-t0)/N:
ti:=(i)->t0+dt*i:
FF:=(i)->evalf(F(ti(i)),4):
FF(N-18):
end proc:
Solve(t,[0,10],36,red);
plot(Z2(t),t=0..10);
plot(BesselK(1/6,x^3/6)*x^(3/2)*sin(x)*exp(x^3/6),x=0..8*Pi);
```

где t – независимая переменная, tt – отрезок от t_0 до t_1, N – количество частот, c – цвет, F – сама функция, T – переменная, i – i-тая ячейка отрезка, t_i – значение t в точке i. Теперь построим график для

$$\int_0^\infty BesselK(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}x^3)x^{\frac{3}{2}}\sin(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{6}x^3}\mathrm{dx} \tag{III.5}$$

```
Solve(t,[0,10],36,red);
plot(Z2(t),t=0..10);
plot(BesselK(1/6,x^3/6)*x^(3/2)*sin(x)*exp(x^3/6),x=0..8*Pi);
```

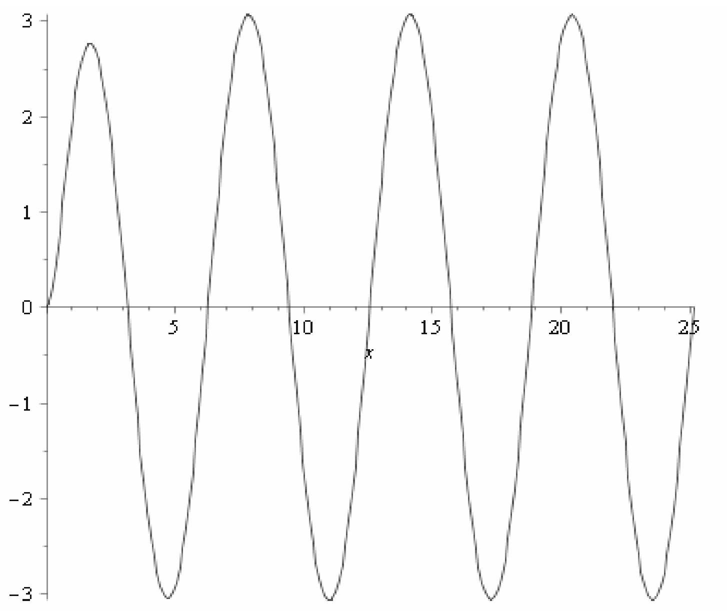


График практически сразу выходит на режим колебаний с постоянной амплитудой.

Запишем конкретное уравнение D2:

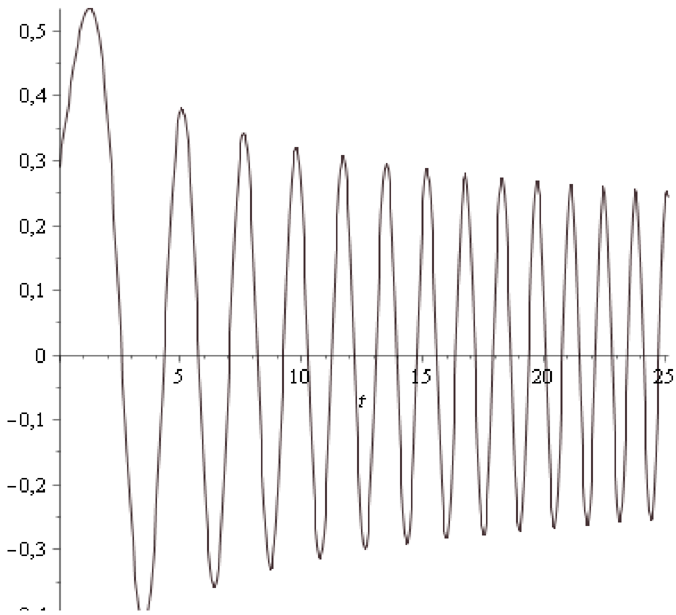
$$D2 := \frac{d^2}{dt^2}Z(t) + \frac{d}{dt}Z(t) + tZ(t) = t^2 sin(t) \tag{III.6}$$

Решение данного уравнения выражается через функции Эйри (о них подробнее написано на стр. 12)

$$zz1 := Z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{t}}\mathrm{AiryAi}\left(\frac{1}{4} - \mathrm{t}\right)\_\mathrm{C2} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{t}}\mathrm{AiryBi}\left(\frac{1}{4} - \mathrm{t}\right)\_\mathrm{C1} + \pi\left(\mathrm{AiryAi}\left(\frac{1}{4} - t\right)\left(\int \mathrm{AiryBi}\left(\frac{1}{4} - t\right)t^2 \sin(t)e^{\frac{1}{2}t}dt\right) - \left(\int \mathrm{AiryAi}\left(\frac{1}{4} - t\right)t^2 \sin(t)e^{\frac{1}{2}t}dt\right)\mathrm{AiryBi}\left(\frac{1}{4} - t\right)\right)e^{-\frac{1}{2}t} \tag{III.7}$$

Построим график:

```
plot(AiryAi(1/4-t),t=0..8*Pi);
```



На графике видно,что колебания постепенно затухают.

Для решения задачи Коши запишем:

```
ZZZ:=dsolve({D2,Inits},Z(t));
```

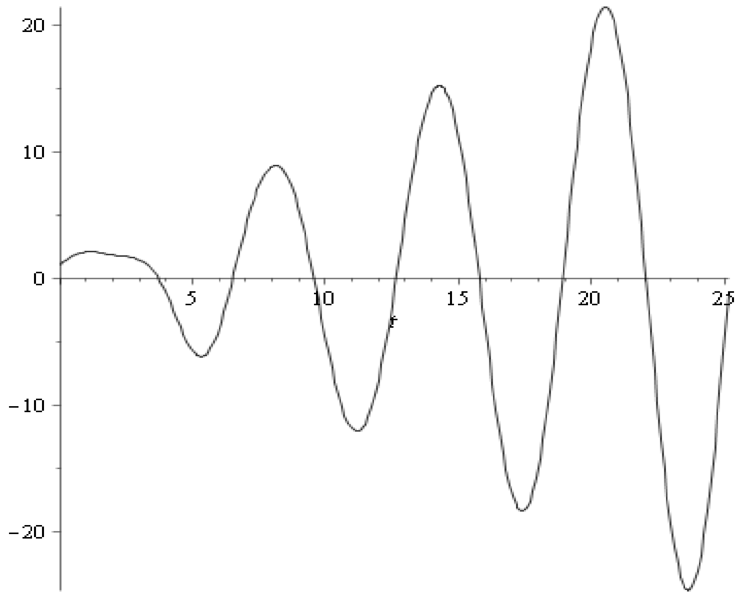
Решение уравнения D2 выводится в неявном виде, поэтому производим замену и вычисляем значение при t=1:

```
Z3:=(T)->evalf(subs(t=T,rhs(ZZZ)));
Z3(1);
```

Результат = 2.073578022.

Построим график на отрезке от $[0..8\pi]$

```
plot(Z3(t),t=0..8*Pi);
```



Амплитуда колебаний увеличивается.

Запишем уравнение d3 с коэффициентом трения=0.1 (Z(t) – собственная частота):

$$d3 := \frac{d^2}{dt^2}Z(t) + 0.1\left(\frac{d}{dt}Z(t)\right) + tZ(t) = t\sin(t)\mathrm{e}^{-0.2\mathrm{t}} \tag{III.8}$$

Зададим начальные условия:

```
Inits1:=Z(0)=0,D(Z)(0)=0;
```

Для решения задачи Коши запишем:

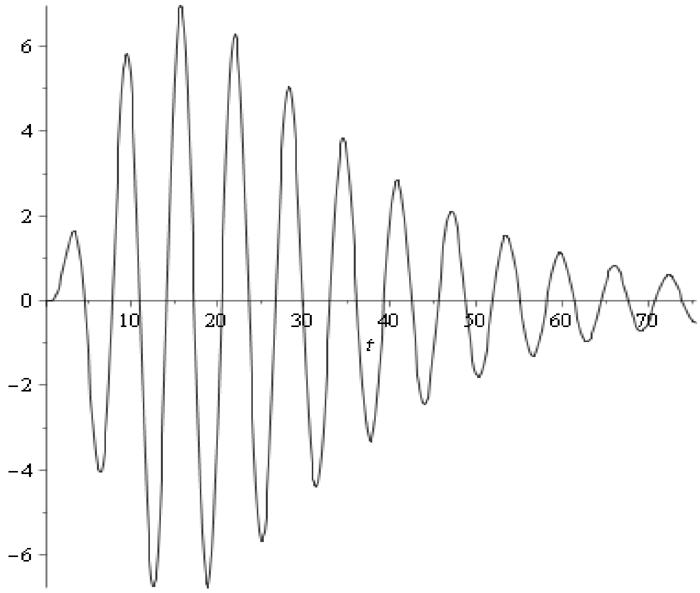
```
zzz:=dsolve({d3,Inits1},Z(t));
```

Получим:

$$Z(t) = \frac{33125}{1698277}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}\mathrm{t}}\sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\mathrm{t}\right)\sqrt{399} - \frac{285625}{12769}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}\mathrm{t}}\cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\mathrm{t}\right) + \frac{1}{12769}\Big((2825t - 4500)\sin(t) + (42375t + 285625)\cos(t)\Big)\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\mathrm{t}} \tag{III.9}$$

Произведем замену и построим график:

```
XX:=(T)->subs(t=T,rhs(zzz));
XX(tau);
plot(XX(t),t=0..24*Pi);
```



Амплитуда колебаний сначала увеличивается, но в дальнейшем постепенно затухает, так как в уравнении присутствует коэффициент трения =0.1.

Запишем уравнение d4, где k – коэффициент трения.

```
d4:=proc(k,omega0,Z,f,t) local U,F,T:
U:=(T)->subs(t=T,Z(t)):
F:=(T)->subs(t=T,f):
Eq2(t,U(t),k,omega0,F(t)):
end proc:
d4(0.1,1,xi,exp(-tau),tau);
```

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi(\tau) + 0.1\left(\frac{d}{d\tau}\xi(\tau)\right) + \xi(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau} \tag{III.10}$$

Напишем процедуру для решения уравнения с постоянными коэффициентами:

```
Init:=proc(t,Z,t0,Z0,dZ0) local U,T,dU:
U:=(T)->subs(t=T,Z(t)):
dU:=(T)->subs(U=Z,D(U)(T)):
U(t0)=Z0,dU(t0)=dZ0:
end proc:

Init(tau,x,1,0,1);
```

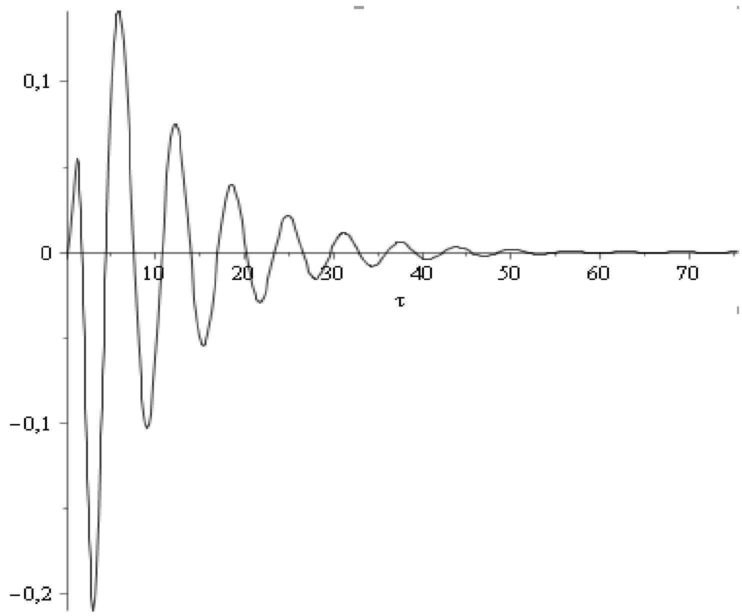
Можно решать задачу Коши:

```
SS:=proc(k,omega0,Z,f,t,t0,tau,Z0,dZ0) local T,K,Omega0,z0,dz0,SSS,SSSS:
SSS:=(T)->subs(t=T,rhs(dsolve({d4(k,omega0,Z,f,t),Init(t,Z,t0,Z0,dZ0)},Z(t)))):
SSSS:=(K,Omega0,T)->subs({k=K,omega0=Omega0},SSS(T)):
simplify(subs(T=tau,SSSS(k,omega0,T))):
end proc:
evalf(SS(0.2,1,Z,exp(-t)*t*cos(2*t),t,1,0,0,0));
```

В результате вычислений получаем: 0.02214344337.

Построим график:

```
plot(SS(0.2,1,Z,exp(-t)*t*cos(2*t),t,0,tau,0,0),tau=0..24*Pi);
```



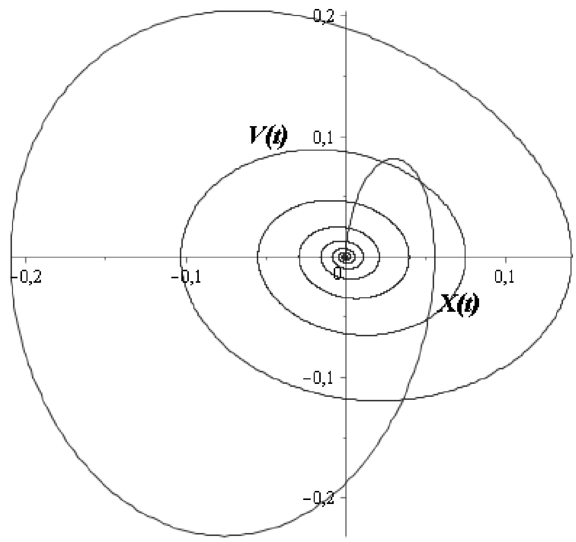

```
X:=(tau)->SS(0.2,1,Z,exp(-t)*t*cos(2*t),t,0,tau,0,0);
X(1);
```

$$-\frac{1}{118815}\left(2623\sin\left(\frac{3}{10}\sqrt{11}\right)\sqrt{11}e^{\frac{9}{10}} - 29241\cos\left(\frac{3}{10}\sqrt{11}\right)e^{\frac{9}{10}}) + 43926\cos(2) + 25518\sin(2)\right)e^{-1} \tag{III.11}$$

```
V:=(tau)->subs(T=tau,diff(X(T),T));
V(1);
```

$$-\frac{1453}{7921}e^{-1}\cos(2) + \frac{5956}{7921}e^{-1}\sin(2) - \frac{1702}{23763}e^{-\frac{1}{10}}\sin\left(\frac{3}{10}\sqrt{11}\right)\sqrt{11} - \frac{772}{7921}e^{-\frac{1}{10}}\cos\left(\frac{3}{10}\sqrt{11}\right) \tag{III.12}$$

```
plot([X(t),V(t),t=0..24*Pi],numpoints=5000,
caption="Фазовая диаграмма колебаний",labels=['X(t)','V(t)'],
labelfont=[TIMES,BOLD,14],captionfont=[TIMES,BOLD,14]);
```



Фазовая диаграмма колебаний

Напишем программу точного решения задачи Коши:

```
Diffeq[Eq2](x,y,p,q,f)
```

– запись линейного дифференциального уравнения вида:

$$d2 := \frac{d^2}{dx^2}y(x) + p(x)\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + q(x)y(x) = f(x) \qquad \text{(III.13)}$$

$$d2 := \frac{d^2}{dt^2}Z(t) + t^2\left(\frac{d}{dt}Z(t)\right) + tZ(t) = tsin(t) \qquad \text{(III.14)}$$

Напишем процедуру для задания дифференциального уравнения:
P – коэффицент трения
Q – собственная частота колебаний
F – внешняя сила

```
Diffeq[Eq2]:=proc(x,y,p,q,f) local X,Y,P,Q,F:
Y:=(X)->subs(x=X,y):P:=(X)->subs(x=X,p):
Q:=(X)->subs(x=X,q):F:=(X)->subs(x=X,f):
diff(Y(x),x$2)+P(x)*diff(Y(x),x)+Q(x)*Y(x)=F(x):
end proc:
```

Напишем программную процедуру для задания начальных условий: IC – начальные условия (Initial Conditions). Сюда входят: начальный момент времени, начальное значение координат, начальное значение скорости :

```
Diffeq[Inits]:=proc(x,y,ic) local X,Y,x0,y0,dy0:
Y:=(X)->subs(x=X,y(t)):
x0:=ic[1]:y0:=ic[2]:dy0:=ic[3]:
Y(x0)=y0,subs(Y=y,D(Y)(x0)=dy0):
end proc:
```

Решение ЛДУ Eq2 относительно неизвестной функции $z(t)$:

```
Diffeq[DSolve]:=proc(x1,x,y,p,q,f,ic) local
X,Y,P,Q,F,x0,y0,dy0,EQ,IC,SS,XX,VV:
Y:=(X)->subs(x=X,y(x)):P:=(X)->subs(x=X,p):
Q:=(X)->subs(x=X,q):F:=(X)->subs(x=X,f):
x0:=ic[1]:y0:=ic[2]:dy0:=ic[3]:
Y(x0)=y0,D(Y)(x0)=dy0:
EQ:=(X)->diff(Y(X),X$2)+P(X)*diff(Y(X),X)+Q(X)*Y(X)=F(X):
IC:=Y(x0)=y0,subs(Y=y,D(Y)(x0)=dy0):
SS:=dsolve({EQ(X),IC},Y(X)):
XX:=(x1)->subs(x=x1,simplify(subs(X=x,rhs(SS)))):
VV:=(x1)->subs(X=x1,diff(XX(X),X)):
[XX(x1),VV(x1)]:
end proc:
```

Для наглядности используем различные выводы решения дифференциальных уравнений. Напишем команду для построения графика амплитуды колебаний:

```
Diffeq[GraphicX]:=(x1,x,y,p,q,f,ic,T)->
plot(Diffeq[DSolve](x1,x,y,p,q,f,ic)[1],x1=ic[1]..T,color=blue,numpoints=2000,
title=‘График амплитуды колебаний Y(t)‘,labels=[t,y],caption=convert,
([F=f,P=p,Q=q,IC=ic],string),titlefont=[TIMES,BOLD,14],
labelfont=[TIMES,BOLD,14],captionfont=[TIMES,ROMAN,14]):
```

Напишем команду для построения графика скорости колебаний:

```
Diffeq[GraphicV]:=(x1,x,y,p,q,f,ic,T)->
plot(Diffeq[DSolve](x1,x,y,p,q,f,ic)[2],x1=ic[1]..T,color=blue,
numpoints=2000,title=‘График скорости колебаний V(t)‘,
labels=[t,y],caption=convert([F=f,P=p,Q=q,IC=ic],string),
titlefont=[TIMES,BOLD,14],labelfont=[TIMES,BOLD,14],
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]):
```

Напишем команду для построения фазовой диаграммы колебаний:

```
Diffeq[GraphicXV]:=(x1,x,y,p,q,f,ic,T)->
plot([Diffeq[DSolve](x1,x,y,p,q,f,ic)[1],
Diffeq[DSolve](x1,x,y,p,q,f,ic)[2],x1=ic[1]..T],
color=blue,numpoints=2000,title=‘Фазовая диаграмма колебаний )‘,
labels=[t,y],caption=convert([F=f,P=p,Q=q,IC=ic],string),
titlefont=[TIMES,BOLD,14],labelfont=[TIMES,BOLD,14],
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]):
```

Теперь надо записать эту библиотеку под своим именем на диск с помощью команды save:

```
save(Diffeq,‘Libr.m‘);
```

После всего этого надо убедиться в том, что библиотечный файл записан. После этого можно сразу и считать его. Для этого вначале следует командой restart устранить ранее введенные определения процедур. После этого командой read надо загрузить библиотечный файл. Если все выполнено пунктуально, то команда with должна показать наличие в вашей библиотеке списка процедур.

Приведем пример ввода и исполнения программы решения дифференциального уравнения.

Протестируем наши команды, для этого откроем файл test.mw:

```
restart:
read "Libr.m":
with(Diffeq);
```

[DSolve, Eq2, GraphicV, GraphicX, GraphicXV, Inits]

```
Diffeq[Eq2](t,Z(t),t^2,t,t*sin(t));
```

$$d2 := \frac{d^2}{dt^2}Z(t) + t^2\left(\frac{d}{dt}Z(t)\right) + tZ(t) = tsin(t) \tag{III.15}$$

Задаем начальные условия:

```
Diffeq[Inits](t,Z,[1,0,2]);
```

$$Z(1) = 0, (D(Z))(1) = 2$$

Вызываем процедуру Dsolve:

```
Diffeq[DSolve](1,t,xi,1,1,sin(t),[0,0,0]);
```

Получим решение:

$$\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cos(\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \cos(1), -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} + \sin(1)$$

```
Diffeq[DSolve](tau,t,xi,1,1,sin(t),[0,0,0]);
```

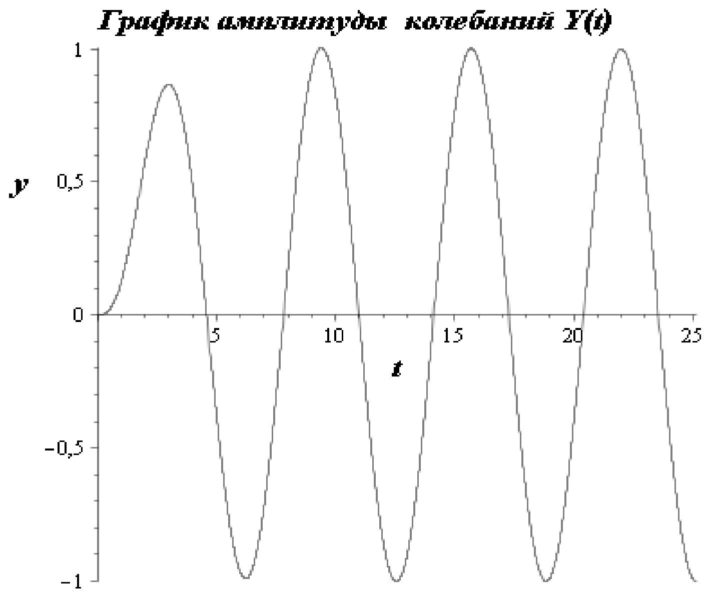
Получим решение:

$$\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\tau\right)\sqrt{3} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\cos(\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\tau\right) - \cos(\tau), -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\tau\right)\sqrt{3} + \sin(\tau)$$

Для наглядности используем различные выводы решения дифференциальных уравнений:

Вызываем процедуру GraphicX для построения графика амплитуды колебаний. Начальные условия (начальный момент времени, начальное значение координат, начальное значение скорости) зададим равные нулю.

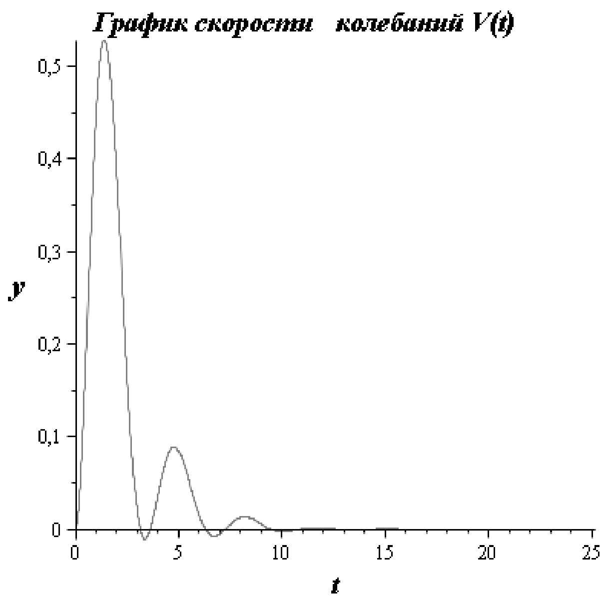
```
Diffeq[GraphicX](t,x,y,1,1,sin(t),[0,0,0],8*Pi);
```



Практически сразу график переходит на режим колебаний с постоянной амплитудой.

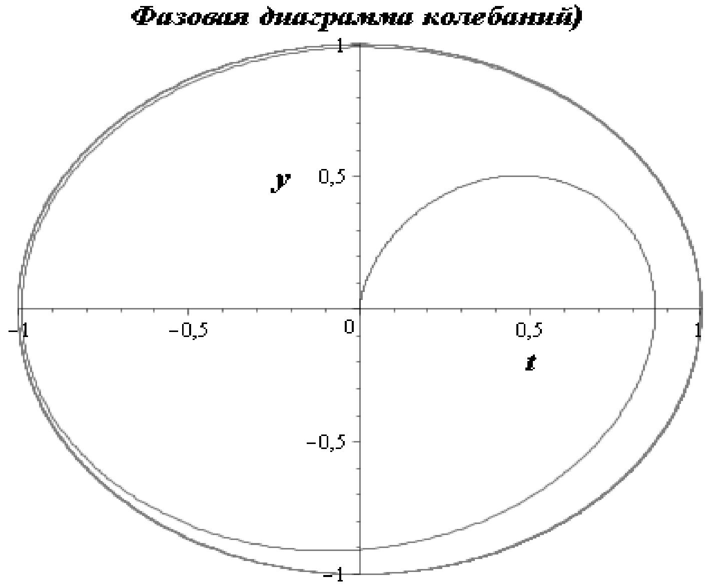
Вызываем процедуру GraphicV для построения графика скорости колебаний. :

```
Diffeq[GraphicV](t,x,y,1,1,sin(t),[0,0,0],8*Pi);
```



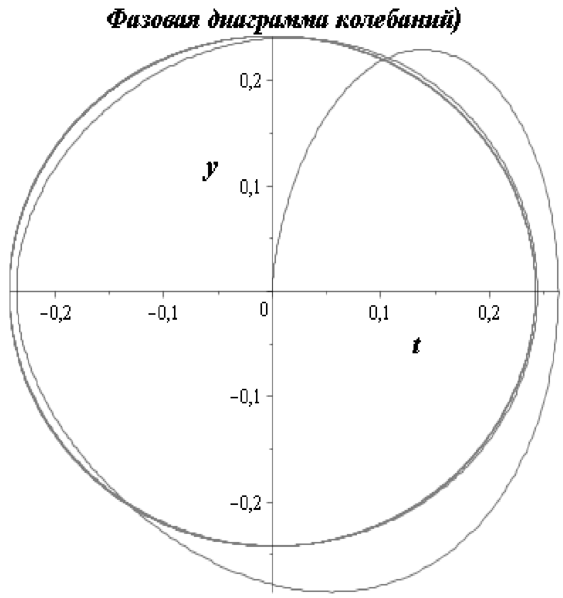
Вызываем процедуру GraphicXV для построения фазовой диаграммы колебаний. Для начала зададим значение = 1 для собственной частоты колебаний:

```
Diffeq[GraphicXV](t,x,y,1,1,sin(t),[0,0,0],8*Pi);
```



На графике мы наблюдаем резкое приближение к окружности, всё ближе и ближе к предельному циклу.

Пробуем увеличить собственную частоту колебаний до значения = 5:



И можем наблюдать как колебания сначала «выскакивают» за предельный цикл, но в результате трения возвращаются на предельный цикл.

Для изучения свойств исследуемой динамической системы приведем пример исполнения программной процедуры оснащенной динамической визуализации фазовых траекторий, которые были рассмотрены и продемонстрированы в рамках Международной научной-практической конференции «Информационные технологии в образовании и науке» (ИТОН – 2014) в работе [11].

Напомним, что означает термин «оснащенная динамическая визуализация». Под этим термином мы понимаем визуализацию математической модели, которая меняет свои свойства во времени в графической форме. При это изменяется не только графическая, но и числовая информация, а также имеется возможность изменять пользователем параметры модели. Динамическое оснащение кривой может быть разных типов: графическое, текстовое и цифровое.

Порядок создания динамической модели:

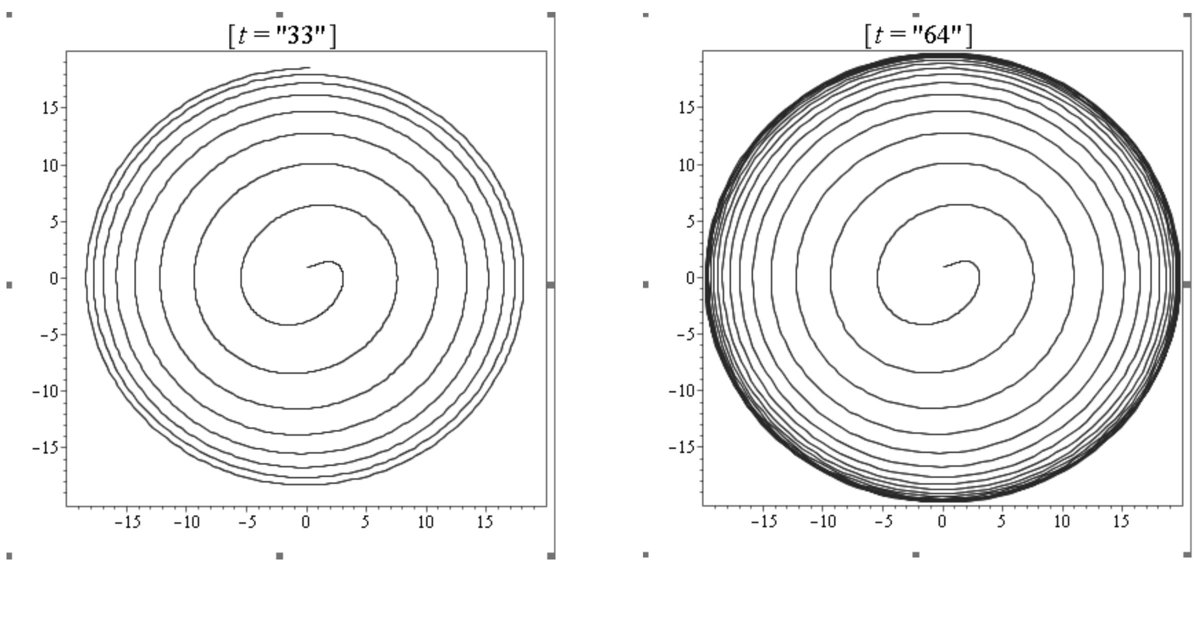
1. Для начала с помощью стандартных процедур СКМ Maple в пакете создаются графические объекты. Они могут быть и статическими, так и сложными, анимационными графическими объектами.

2. Далее графические объекты объединяются в i-тый кадр анимации, $frame_i$, с помощью встроенной процедуры $plots[display](a_i1, a_i2, ..., a_ini)$, с присвоением имени $A[i]$.

3. Все кадры анимации объединяются в анимационную последовательность с помощью той же процедуры, но с добавочной опцией: plots[display]([A[1],A[2],.. ,A[n]], insequence=true):

Для наглядности продемонстрируем анимацию фазовой траектории системы [x(t),v(t)], описывающая уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}Z(t) + 0.1\left(\frac{d}{dt}Z(t)\right) + Z(t) = sin(2t) \tag{III.16}$$



Заключение

Таким образом в работе решены следующие задачи:

1. Составлен обзор по теории линейных дифференциальных уравнений;

2. Изучены и представлены команды пакета Maple, ответственные за задание функций, вычисление интегралов, решения задач Коши и пр.;

3. Создана библиотека программных процедур в системе компьютерной математики Maple решений линейных дифференциальных уравнений.

   Таким образом, задачи, поставленные в данной квалификационной работе, выполнены полностью.

Литература

[1] Л.Э.Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*, Москва, Наука, 1969.

[2] Н.Н.Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, Москва, ГИФМЛ, 1963, 359 с.

[3] И.Е. Медведкова , *Программные математические комплексы. Практикум: учебное пособие* – ВГУИТ, 2014. 68 с./ Л.А. Коробова

[4] Матросов В.Л., *Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными.* ВЛАДОС. 2011. 376 с. /Асланов Р.М.

[5] Лакерник А.Р., *Высшая математика. Краткий курс.* Логос. 2011. 522 с.

[6] Г.М.Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Москва, ФИЗМАТЛИТ, – 2001. том 1 – 616 с.

[7] А.Ф.Филлипов, *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*, Ижевск, НИЦ«Регулярная и хаотическая динамика», – 2000.

[8] В.П. Дьяконов: *Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании* – Москва, СОЛОН-Пресс, 2006.

[9] В.А. Треногин: *Обыкновенные дифференциальные уравнения* – ФИЗМАТЛИТ, 2014. 312 с.

[10] Ю.Г.Игнатьев *математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики maple* – Казань: Казанский университет, 2014, - 298 с

[11] Э.Х.Садыкова *Процедуры оснащенной динамической визуализации решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений* //Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. /Материалы конференции и труды семинара. Под общей редакцией Ю.Г. Игнатьева, Казань: Изд-во «Фолиан», 2014, с. 286-287

[1]

[1]© *Оформление: LaTeX - стиль BIBLIO профессора Ю.Г. Игнатьева*

Заключительный лист

Подпись автора работы ____________________
Дата _______________

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

____

Заведующий кафедрой _______________

Дата_______________

Защищена в ГАК с оценкой "__________"
Дата _______________
Секретарь ГАК _______________