Известия вузов. Математика
2018, №11, с. 33–50
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С.Н. МИШИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. Рассматривается общий метод решения уравнений, левая часть которых представлена рядом по степеням линейного непрерывного оператора, действующего в локально выпуклом пространстве. Найденные решения представляются операторными рядами по степеням того же оператора, что и левая часть уравнения. Исследование проводится с помощью характеристик (порядка и типа) оператора, а также операторных характеристик (операторного порядка и операторного типа) вектора относительно оператора. Также в исследовании применяется сходимость операторных рядов относительно равностепенно непрерывной борнологии.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, порядок и тип оператора, характеристическая функция оператора.

УДК: 517.983

Введение

Рассмотрим в отделимом квазиполном локально выпуклом пространстве $\mathbf{H}$ уравнение вида

$$B(x) = y, \quad y \in \mathbf{H}, \tag{1}$$

где оператор B является суммой поточечно сходящегося (по топологии пространства $\mathbf{H}$) ряда

$$B = E - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^n, \quad \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C},$$

A — линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}$, E — тождественный оператор. Очевидно, сумма ряда (если этот ряд сходится)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n(y), \tag{2}$$

где

$$c_0 = 1, \quad c_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{n-i}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

является решением уравнения (1). Для описаний условий сходимости ряда (2) применяются характеристики (порядок и тип) оператора и операторные характеристики (операторный порядок и операторный тип) вектора.

Поступила 06.09.2017

Рассматриваемые уравнения являются широким обобщением линейных неоднородных дифференциальных уравнений конечного и бесконечного порядка, изучаемых многими математиками на протяжении XX века (см., например, [1]–[12]), а также некоторых интегральных уравнений. Рассмотренный метод дополняет известные методы решения этих уравнений. В частности, возможно решение интегральных уравнений Вольтерры 2 рода с разностным ядром в случае невозможности применения преобразования Лапласа (пример 6).

1. Порядок и тип оператора и последовательности операторов. Операторный порядок и тип вектора

Непустое множество $\mathbf{X}$ называется борнологическим множеством, если в нем выделено семейство подмножеств $\mathfrak{B}$, называемых ограниченными, на которое накладываются следующие условия: объединение любых двух ограниченных множеств ограничено; любое подмножество ограниченного множества ограничено; любое одноточечное множество ограничено. Семейство $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$ называется базой борнологии, если всякое ограниченное множество содержится в некотором множестве из $\mathfrak{B}_0$. Отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ называется ограниченным, если оно переводит ограниченные множества в ограниченные. Алгебра $\mathbf{X}$ называется борнологической алгеброй, если операции сложения, умножения на число и произведение элементов ограничены. Например, алгебра $\mathbf{Lec}(\mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих в локально выпуклом пространстве $\mathbf{H}$, в которой за ограниченные множества принимаются всевозможные равностепенно непрерывные семейства операторов, является борнологической, а соответствующая борнология называется равностепенно непрерывной.

Борнологическая алгебра $\mathbf{X}$ называется выпуклой, если ее борнология обладает базой, состоящей из выпуклых уравновешенных множеств (дисков). Диск M в борнологической алгебре $\mathbf{X}$ называется наполняющим, если подпространство $\mathbf{X}_M$, порожденное этим диском, является банаховым. Отделимая борнологическая алгебра называется полной, если ее борнология обладает базой, состоящей из наполняющих дисков ([13], гл. 2–4).

Пусть $\mathbf{H}$ — локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел и пусть $\mathbb{P} = \{\|\cdot\|_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ — мультинорма, определяющая топологию на $\mathbf{H}$ (т. е. система полунорм, для которой равенство $\|x\|_p = 0$ при $x \neq 0$ нарушается хотя бы для одного p). $\mathbf{H}$ называется квазиполным, если в нем каждая ограниченная обобщенная последовательность Коши сходится ([14], с. 363). Если $\mathbf{H}$ — квазиполное пространство, то алгебра $\mathbf{Lec}(\mathbf{H})$ является полной выпуклой борнологической алгеброй ([13], с. 91). Всюду в работе предполагается, что $\mathbf{H}$ — отделимое квазиполное локально выпуклое пространство.

Последовательность $\mathfrak{A} = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ операторов из $\mathbf{Lec}(\mathbf{H})$ называется имеющей порядок [15], [16], если найдется последовательность положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что для каждого p, для каждого $x \in \mathbf{H}$ и для каждого натурального n справедлива оценка

$$\|c_n A_n(x)\|_p \leq C_p \|x\|_q, \quad C_p > 0, \quad q = q(p),$$

т. е. семейство операторов $\{c_n A_n\}$ будет равностепенно непрерывным.

Число $\beta_p(\mathfrak{A}) = \inf\limits_q \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\theta(p,q,n)}{n\ln n}$, где $\theta(p,q,n) = \sup\limits_{\|x\|_q\neq 0} \left\{ \frac{\|A_n(x)\|_p}{\|x\|_q} \right\}$ называется p-порядком последовательности $\mathfrak{A} = \{A_n\}$. Число $\alpha_p(\mathfrak{A}) = \inf\limits_q \varlimsup\limits_{n\to\infty} n^{-\beta_p(\mathfrak{A})} \sqrt[n]{\theta(p,q,n)}$ называется p-типом последовательности $\mathfrak{A}$ при p-порядке $\beta_p(\mathfrak{A}) \neq \pm\infty$. Порядком последовательности $\mathfrak{A}$ называется число $\beta(\mathfrak{A}) = \sup\limits_{p\in\mathcal{P}}\{\beta_p(\mathfrak{A})\}$. Типом последовательности $\mathfrak{A}$ при порядке $\beta(\mathfrak{A}) \neq \pm\infty$

называется число

$$\alpha(\mathfrak{A}) = \begin{cases} \sup\limits_{p\in\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}} \{\alpha_p(\mathfrak{A})\}, & \mathcal{P}_{\mathfrak{A}} \neq \varnothing; \\ 0, & \mathcal{P}_{\mathfrak{A}} = \varnothing, \end{cases}$$

где $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}} = \{p \in \mathcal{P} : \beta_p(\mathfrak{A}) = \beta(\mathfrak{A})\}$. Другими словами, порядком $\beta(\mathfrak{A})$ последовательности $\mathfrak{A}$ является точная нижняя грань чисел $b \in \mathbb{R}$ таких, что семейство операторов $\left\{\frac{A_n}{n^{bn}}\right\}$ равностепенно непрерывно. Аналогично, типом $\alpha(\mathfrak{A})$ последовательности $\mathfrak{A}$ при порядке $\beta(\mathfrak{A}) \neq \pm\infty$ является точная нижняя грань чисел $a > 0$ таких, что семейство операторов $\left\{\frac{A_n}{a^n n^{\beta(\mathfrak{A})n}}\right\}$ равностепенно непрерывно.

Замечание 1. Для каждой последовательности $\mathfrak{A}$ возможен один из четырех случаев.

1) Семейство $\left\{n^{-bn}A_n\right\}$ равностепенно непрерывно для любого $b \in \mathbb{R}$. В этом случае $\beta(\mathfrak{A}) = -\infty$.

2) Семейство $\left\{n^{-bn}A_n\right\}$ равностепенно непрерывно не для любого b, а лишь для некоторых. В этом случае последовательность $\mathfrak{A}$ имеет конечный порядок и для нее определяется тип, который может быть как конечным, так и бесконечным.

3) Семейство $\left\{n^{-bn}A_n\right\}$ не является равностепенно непрерывным ни для какого $b \in \mathbb{R}$, но найдется последовательность $\{c_n\}$ положительных чисел (стремящаяся к нулю быстрее, чем $\{n^{-bn}\}$) такая, что семейство $\{c_n A_n\}$ равностепенно непрерывно. В этом случае $\beta(\mathfrak{A}) = +\infty$.

4) Не существует никакой последовательности положительных чисел $\{c_n\}$ такой, что семейство $\{c_n A_n\}$ равностепенно непрерывно. В этом случае последовательность $\mathfrak{A}$ считается не имеющей никакого порядка (ни конечного, ни бесконечного).

Пусть x — фиксированный вектор из $\mathbf{H}$. Операторным p-порядком вектора x относительно последовательности $\mathfrak{A}$ называется число [15], [16] $\beta_p(x,\mathfrak{A}) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\|A_n(x)\|_p}{n\ln n}$. Если операторный p-порядок вектора конечен, то для него определяется операторный p-тип при этом p-порядке: $\alpha_p(x,\mathfrak{A}) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} n^{-\beta_p(x,\mathfrak{A})} \sqrt[n]{\|A_n(x)\|_p}$.

Операторным порядком вектора x относительно последовательности $\mathfrak{A}$ называется число $\beta(x,\mathfrak{A}) = \sup\limits_{p\in\mathcal{P}}\{\beta_p(x,\mathfrak{A})\}$, а операторным типом при операторном порядке $\beta(x,\mathfrak{A}) \neq \pm\infty$ — число

$$\alpha(x,\mathfrak{A}) = \begin{cases} \sup\limits_{p\in\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}(x)} \{\alpha_p(x,\mathfrak{A})\}, & \mathcal{P}_{\mathfrak{A}}(x) \neq \varnothing; \\ 0, & \mathcal{P}_{\mathfrak{A}}(x) = \varnothing, \end{cases}$$

где $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}(x) = \{p \in \mathcal{P} : \beta_p(x,\mathfrak{A}) = \beta(x,\mathfrak{A})\}$.

Из определения p-порядка последовательности операторов и операторного p-порядка вектора для каждого p следует оценка

$$\sup_{x\in\mathbf{H}}\{\beta_p(x,\mathfrak{A})\} \leq \beta_p(\mathfrak{A}). \tag{4}$$

Зафиксируем произвольное $p \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathbf{H}_p = \{x \in \mathbf{H} : \beta_p(x,\mathfrak{A}) = \beta_p(\mathfrak{A})\}$. Из определения p-типа последовательности операторов и операторного p-типа вектора следует оценка

$$\sup_{x\in\mathbf{H}_p}\{\alpha_p(x,\mathfrak{A})\} \leq \alpha_p(\mathfrak{A}), \tag{5}$$

если множество $\mathbf{H}_p$ не пусто. В (4) и (5), вообще говоря, могут быть как строгие равенства, так и строгие неравенства.

Порядком и типом (p-порядком и p-типом) *оператора* $A \in \mathbf{Lec}(\mathbf{H})$ называются соответственно порядок и тип (p-порядок и p-тип) последовательности $A_n = A^n$. Аналогично, операторным порядком и операторным типом (p-порядком и p-типом) вектора x относительно оператора A называются соответственно операторный порядок и операторный тип (p-порядок и p-тип) этого вектора относительно последовательности $A_n = A^n$.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbf{H} = \mathcal{H}[\rho,\sigma]$, $\sigma < \infty$, *— пространство целых функций, порядок роста которых не превосходит* ρ, *а при порядке* ρ *тип не превосходит* σ, *с топологией, определяемой системой норм*

$$\|F\|_\varepsilon = \sup_{p>0}\left\{\max_{|z|\le p}|F(z)|e^{-(\sigma+\varepsilon)p^\rho}\right\}, \quad F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma], \quad \varepsilon>0. \tag{6}$$

Оператор дифференцирования $\frac{d}{dz} : \mathcal{H}[\rho,\sigma] \to \mathcal{H}[\rho,\sigma]$ *имеет при каждом* ε *следующие характеристики*:

1) $\beta_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{\rho-1}{\rho}$,

2) $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = e^{-1}(\rho e\sigma)^{1/\rho}$, *если* $\rho\le 1$, *и* $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = e^{-1}(\rho e\sigma\Omega_\varepsilon)^{1/\rho}$, *если* $\rho>1$. *Здесь*

$$\Omega_\varepsilon = \left(1-\left(\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{1-\rho}.$$

Доказательство. Пусть функция $F(z)\in\mathcal{H}[\rho,\sigma]$ имеет характеристики роста $\rho(F)$ и $\sigma(F)$ ([17], с. 8). Аналогично скалярному случаю определяются характеристики роста целой вектор-функции $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n t^n : \mathbb{C}\to\mathbf{H}$ и доказываются формулы для их вычисления:

$$\rho_p(f) = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{-\ln\|x_n\|_p}, \quad (\rho_p(f)e\sigma_p(f))^{\frac{1}{\rho_p(f)}} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho_p(f)}}\sqrt[n]{\|x_n\|_p}. \tag{7}$$

Найдем характеристики роста вектор-функции $f(t) = F(t+z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(z)}{n!}t^n : \mathbb{C}\to\mathcal{H}[\rho,\sigma]$. Так как $\|f(t)\|_\varepsilon = \sup\limits_{p>0}\left\{\max\limits_{|z|\le p}|F(z+t)|e^{-(\sigma+\varepsilon)p^\rho}\right\}\ge|F(t)|$ для всех ε и t, то рост функции f не может быть меньше, чем рост функции F. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и произвольное $r>0$. Тогда $\max\limits_{|t|\le r}\|f(t)\|_\varepsilon = \max\limits_{|t|\le r}\left\{\sup\limits_{p>0}\left\{\max\limits_{|z|\le p}|F(t+z)e^{-(\sigma+\varepsilon)p^\rho}\right\}\right\}$. Из определения порядка и типа целой функции следует (при каждом фиксированном t) ([17], с. 9)

$$\max_{|z|\le p}|F(t+z)| < C_\delta\exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(p+|t|)^{\rho(F)}\right\}, \quad p,\delta>0,$$

поэтому $\max\limits_{|t|\le r}\|f(t)\|_\varepsilon \le C_\delta\sup\limits_{p>0}\psi(p)$, где $\psi(p) = \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(p+r)^{\rho(F)} - (\sigma+\varepsilon)p^\rho\right\}$. Возьмем произвольное $0<\delta<\varepsilon$. Очевидно, $\psi(0) = e^{(\sigma(F)+\delta)r^{\rho(F)}}$, $\psi(\infty)=0$. Найдем точки $p\in(0,+\infty)$, где $\psi'(p)=0$. Из равенства $\psi'(p) = \psi(p)\left((\sigma(F)+\delta)\rho(F)(p+r)^{\rho(F)-1} - (\sigma+\varepsilon)\rho p^{\rho-1}\right)$ получаем уравнение

$$\frac{(p+r)^{\rho(F)-1}}{p^{\rho-1}} = \frac{(\sigma+\varepsilon)\rho}{(\sigma(F)+\delta)\rho(F)}. \tag{8}$$

Если $\rho(F)=\rho=1$, то уравнение (8) не имеет решений при любом r (так как левая часть равна единице, в то время как правая больше единицы), а если $\rho(F)=1$, $\rho>1$, то оно имеет единственное решение, не зависящее от r. В обоих случаях получаем оценку

$$\max_{|t|\le r}\|f(t)\|_\varepsilon \le \exp\left\{(\sigma(F)+\delta_1)r^{\rho(F)}\right\}, \; r>r_0(\delta_1) \tag{9}$$

при достаточно малых δ_1, поэтому $\rho_\varepsilon(\varphi)=\rho(F)$, $\sigma_\varepsilon(\varphi)=\sigma(F)$ для каждого ε. Далее будем полагать $\rho(F)\neq 1$. Обозначим $\zeta=\frac{\rho-1}{\rho(F)-1}$, $\omega=\left(\frac{\rho(\sigma+\varepsilon)}{\rho(F)(\sigma(F)+\delta)}\right)^{\frac{1}{\rho(F)-1}}$ и запишем уравнение (8) в виде

$$r=\omega p^\zeta-p. \tag{10}$$

Для решения уравнения (10) рассмотрим несколько случаев.

1. $\rho(F)<\rho$.

a) $\rho\le 1$, $\rho(F)<1$. Здесь $0\le\zeta<1$, уравнение (10) при больших r не имеет решений на промежутке $(0,+\infty)$, так как правая часть ограничена сверху на этом промежутке. Таким образом, $\rho_\varepsilon(\varphi)=\rho(F)$, $\sigma_\varepsilon(\varphi)=\sigma(F)$ для каждого ε.

b) $\rho>1$, $\rho(F)<1$. Здесь $\zeta<0$, уравнение (10) имеет при больших r на промежутке $(0,+\infty)$ единственное решение $p_r\to 0$ при $r\to\infty$, так как правая часть строго убывает на $(0,+\infty)$ и $\lim\limits_{p\to 0}(\omega p^\zeta-p)=+\infty$. Таким образом, в этом случае также справедлива оценка (9) при достаточно малых δ_1, поэтому $\rho_\varepsilon(\varphi)=\rho(F)$, $\sigma_\varepsilon(\varphi)=\sigma(F)$ для каждого ε.

c) $\rho>1$, $\rho(F)>1$. Здесь $\zeta>1$, уравнение (10) имеет при больших r единственное решение $p_r\to\infty$ при $r\to\infty$, так как правая часть ограничена на промежутке $\left(0,(\omega\zeta)^{\frac{1}{1-\zeta}}\right]$, строго возрастает на $\left[(\omega\zeta)^{\frac{1}{1-\zeta}},+\infty\right)$ и $\lim\limits_{p\to+\infty}(\omega p^\zeta-p)=+\infty$. Найдем оценку для p_r. Из (10) следует $\omega p_r^\zeta>r$ для всех r, следовательно, $p_r>(r/\omega)^{\frac{1}{\zeta}}$. Учитывая, что $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{p_r^\zeta-\frac{p_r}{\omega}}{p_r^\zeta}=\lim\limits_{r\to\infty}\left(1-\frac{1}{\omega}p_r^{1-\zeta}\right)=1$, получаем $(1-\varepsilon_1)p_r^\zeta<p_r^\zeta-\frac{p_r}{\omega}<(1+\varepsilon_1)p_r^\zeta$ для каждого $\varepsilon_1>0$ и для каждого $r>r_0(\varepsilon_1)$, т. е. $r=\omega p_r^\zeta-p_r=\left(p_r^\zeta-\frac{p_r}{\omega}\right)\omega>\omega(1-\varepsilon_1)p_r^\zeta$. Из последнего неравенства следует $p_r<\left(\frac{r}{\omega(1-\varepsilon_1)}\right)^{\frac{1}{\zeta}}$ для всех $\varepsilon_1>0$ и для всех $r>r_0(\varepsilon_1)$. Таким образом, получаем оценку $\left(\frac{r}{\omega}\right)^{\frac{1}{\zeta}}<p_r<\left(\frac{r}{\omega(1-\varepsilon_1)}\right)^{\frac{1}{\zeta}}$, из которой следует оценка (9) при достаточно малых δ_1, поэтому $\rho_\varepsilon(\varphi)=\rho(F)$, $\sigma_\varepsilon(\varphi)=\sigma(F)$ для каждого ε.

2. $\rho(F)=\rho$. Уравнение (10) запишется в виде

$$r=(\omega-1)p. \tag{11}$$

a) $\rho<1$. Тогда $\omega<1$ и уравнение (11) не имеет решений на промежутке $(0,+\infty)$. Здесь $\rho_\varepsilon(f)=\rho(F)=\rho$, $\sigma_\varepsilon(\varphi)=\sigma(F)$ для каждого ε.

b) $\rho>1$. Здесь уравнение (11) имеет на промежутке $(0,+\infty)$ единственное решение $p_r=\frac{r}{\omega-1}$ и $\psi(p_r)=\exp\left\{(\sigma(F)+\delta)r^\rho\left(\left(1+\frac{1}{\omega-1}\right)^\rho-\omega\left(\frac{1}{\omega-1}\right)^\rho\right)\right\}$.

Обозначим $R=\left(1+\frac{1}{\omega-1}\right)^\rho-\omega\left(\frac{1}{\omega-1}\right)^\rho$. После преобразований получим

$$R=\omega(\omega-1)^{1-\rho}=\Omega_\varepsilon(F)+\delta_1,\quad \delta_1=\delta_1(\delta,\varepsilon),$$

где $\Omega_\varepsilon(F)=\left(1-\left(\frac{\sigma(F)}{\sigma+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{1-\rho}$. Таким образом, при достаточно малых δ_2

$$\max_{|t|\le r}\|f(t)\|_\varepsilon\le\exp\left\{(\sigma(F)\Omega_\varepsilon(F)+\delta_2)r^\rho\right\},\quad r>r_0(\delta_2). \tag{12}$$

Покажем, что $\sigma_\varepsilon(f)=\sigma(F)\Omega_\varepsilon(F)$, $\rho_\varepsilon(f)=\rho$ для каждого ε. По определению порядка и типа целой функции ([17], с. 9) для каждого $\delta>0$ найдется последовательность $p_k\to\infty$

такая, что $\max\limits_{|z|\le p_k}|F(z+t)|>\exp\left\{(\sigma(F)-\delta)(p_k+|t|)^{\rho}\right\}$, поэтому

$$\max_{|t|\le r}\|f(t)\|_{\varepsilon}\ge\exp\left\{(\sigma(F)-\delta)(p_k+r)^{\rho}-(\sigma+\varepsilon)p_k^{\rho}\right\}.$$

Возьмем последовательность $\{r_k\}$ такую, что для каждого k, $r_k=p_k(\omega-1)$. Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=\infty$, т.е. для каждого $\delta_2>0$ найдется последовательность $p_k\to\infty$ такая, что

$$\max_{|t|\le r_k}\|\varphi(t)\|_{\varepsilon}>\exp\left\{(\sigma(F)\Omega_{\varepsilon}(F)-\delta_2)r_k^{\rho}\right\}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует $\rho_{\varepsilon}(f)=\rho$, $\sigma_{\varepsilon}(f)=\sigma(F)\Omega_{\varepsilon}(F)$ для каждого ε.

Таким образом, если $\rho(F)=\rho>1$, то $\rho_{\varepsilon}(f)=\rho=\rho(F)$, $\sigma_{\varepsilon}(f)=\sigma(F)\Omega_{\varepsilon}(F)$ для каждого ε. Во всех остальных случаях $\rho_{\varepsilon}(f)=\rho(F)$, $\sigma_{\varepsilon}(f)=\sigma(F)$.

Из (7) для $x_n=\frac{F^{(n)}(z)}{n!}$ получаем, что операторные ε-порядки функции $F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma]$ относительно оператора дифференцирования равны $\frac{\rho(F)-1}{\rho(F)}$ для всех $\varepsilon>0$, а операторные ε-типы равны $e^{-1}\left(\rho e\sigma(F)\Omega_{\varepsilon}(F)\right)^{1/\rho}$, если $\rho(F)=\rho>1$ и $e^{-1}\left(\rho(F)e\sigma(F)\right)^{1/\rho(F)}$ во всех остальных случаях. В силу неравенства (4) ε-порядки оператора $\frac{d}{dz}:\mathcal{H}[\rho,\sigma]\to\mathcal{H}[\rho,\sigma]$ не могут быть ниже $\frac{\rho-1}{\rho}$, так как существуют функции из пространства $\mathcal{H}[\rho,\sigma]$, имеющие операторные ε-порядки, равные $\frac{\rho-1}{\rho}$ (таковыми являются функции, для которых $\rho(F)=\rho$). Покажем, что ε-порядки оператора $\frac{d}{dz}:\mathcal{H}[\rho,\sigma]\to\mathcal{H}[\rho,\sigma]$ не могут быть выше $\frac{\rho-1}{\rho}$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и выберем произвольные $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ и $\delta>0$. Обозначим $\Omega_{\varepsilon,\varepsilon_1}=\left(1-\left(\frac{\sigma+\varepsilon_1}{\sigma+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{1-\rho}$. Из интегральной формулы Коши следует для каждого натурального n и для каждого $q>0$

$$\max_{|z|\le p}|F^{(n)}(z)|\le\frac{p+q}{q^{n+1}}n!\max_{|z|\le p+q}|F(z)|;\quad F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma].$$

Возьмем $q=(Rn)^{1/\rho}$, где

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho(\sigma+\varepsilon_1+\delta)}, & 0<\rho\le 1;\\ \frac{1}{\rho(\sigma+\varepsilon_1)(\Omega_{\varepsilon,\varepsilon_1}+\delta)}, & \rho>1.\end{cases}$$

Тогда для всех $F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma]$, для всех $\delta>0$ и для всех $n>n_0(\delta)$

$$\max_{|z|\le p}|F^{(n)}(z)|\le\frac{n!}{(Rn)^{n/\rho}}\frac{p+(Rn)^{1/\rho}}{(Rn)^{1/\rho}}\max_{|z|\le p+(Rn)^{1/\rho}}|F(z)|\le$$
$$\le e^{(-1+\delta)n}R^{-n/\rho}n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\frac{p+(Rn)^{1/\rho}}{(Rn)^{1/\rho}}\max_{|z|\le p+(Rn)^{1/\rho}}|F(z)|,$$

следовательно, для всех $F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma]$, для всех $0<\varepsilon_1<\varepsilon$, для всех $\delta>0$ и для всех $n>n_0(\delta)$

$$\|F^{(n)}(z)\|_{\varepsilon}=\sup_{p>0}\left\{\max_{|z|\le p}|F^{(n)}(z)|e^{-(\sigma+\varepsilon)p^{\rho}}\right\}\le e^{(-1+\delta)n}R^{-n/\rho}n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\sup_{p>0}\left\{\frac{p+(Rn)^{1/\rho}}{(Rn)^{1/\rho}}\times\right.$$
$$\left.\times\max_{|z|\le p+(Rn)^{1/\rho}}|F(z)|e^{-(\sigma+\varepsilon)p^{\rho}}\right\}\le e^{(-1+\delta)n}R^{-n/\rho}n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\sup_{p>0}\left\{\psi(p)+\frac{p\psi(p)}{(Rn)^{1/\rho}}\right\}\|F\|_{\varepsilon_1}.$$

Здесь $\psi(p)=\exp\left\{(\sigma+\varepsilon_1)(p+(Rn)^{1/\rho})^{\rho}-(\sigma+\varepsilon)p^{\rho}\right\}$. При любом фиксированном n имеем $\psi(0)=e^{(\sigma+\varepsilon_1)Rn}$, $\psi(\infty)=0$. Найдем точки $p\in(0,+\infty)$, где $\psi'(p)=0$, а также точки, где

$(p\psi(p))' = 0$. Из равенства $\psi'(p) = \psi(p)\left((\sigma+\varepsilon_1)(p+(Rn)^{1/\rho})^{\rho-1}\rho - (\sigma+\varepsilon)p^{\rho-1}\rho\right)$ получаем уравнение

$$\left(1+\frac{(Rn)^{1/\rho}}{p}\right)^{\rho-1} = \frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon_1}. \tag{14}$$

Если $\rho \le 1$, то уравнение (14) при любом n не имеет решений на промежутке $(0,+\infty)$, так как в этом случае левая часть не превосходит единицы, в то время как правая больше единицы. Если $\rho > 1$, то уравнение (14) при каждом n имеет единственное решение $p_n = (Rn)^{\frac{1}{\rho}}\left(\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}-1\right)^{-1}$. Из равенства

$$(p\psi(p))' = \psi(p) + p\psi'(p) = \psi(p)\left(1+(\sigma+\varepsilon_1)(p+(Rn)^{1/\rho})^{\rho-1}p\rho - (\sigma+\varepsilon)p^{\rho}\rho\right)$$

получаем уравнение

$$(\sigma+\varepsilon)\rho p^{\rho} - (\sigma+\varepsilon_1)\rho p(p+(Rn)^{1/\rho})^{\rho-1} = 1. \tag{15}$$

На промежутке $\left(0;((\sigma+\varepsilon)\rho)^{-\frac{1}{\rho}}\right]$ уравнение (15) при любом n не имеет решений, так как на этом промежутке левая часть меньше единицы. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать это уравнение только на промежутке $\left(((\sigma+\varepsilon)\rho)^{-\frac{1}{\rho}};+\infty\right)$. Если $\rho = 1$, то уравнение (15) имеет единственное решение $p_0 = \frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_1}$, не завиящее от n. Для $\rho \ne 1$ уравнение (15) равносильно

$$p\left(\left(1-\frac{1}{(\sigma+\varepsilon)\rho p^{\rho}}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}-1\right) = (Rn)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{16}$$

Пусть $\rho < 1$. В этом случае левая часть уравнения (16) строго убывает на промежутке $\left(((\sigma+\varepsilon)\rho)^{-\frac{1}{\rho}};\xi\right)$ при некотором ξ, ограничена сверху на промежутке $[\xi,+\infty)$ и стремится к $+\infty$ при $p \to ((\sigma+\varepsilon)\rho)^{-\frac{1}{\rho}}$, поэтому при больших n оно имеет единственное решение p_n, стремящееся к $((\sigma+\varepsilon)\rho)^{-\frac{1}{\rho}}$ при $n\to\infty$, т.е. последовательность $\{p_n\}$ ограничена.

Пусть $\rho > 1$. В этом случае левая часть уравнения (16) строго возрастает на промежутке $(\zeta,+\infty)$ при некотором ζ, ограничена сверху на промежутке $\left(((\sigma+\varepsilon)\rho)^{-\frac{1}{\rho}},\zeta\right]$ и стремится к $+\infty$ при $p\to+\infty$, поэтому при больших n это уравнение имеет единственное решение p_n, стремящееся к $+\infty$ при $n\to\infty$. Найдем оценку для p_n. Из (15) следует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\sigma+\varepsilon_1}{\sigma+\varepsilon}\right)\left(1+\frac{(Rn)^{1/\rho}}{p_n}\right)^{\rho-1}\right) = 1$, поэтому для всех $n > n_0(\delta,\varepsilon,\varepsilon_1)$

$$(1-\delta)(Rn)^{1/\rho}\left(\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}-1\right)^{-1} < p_n < (1+\delta)(Rn)^{1/\rho}\left(\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\sigma+\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}-1\right)^{-1}.$$

Таким образом, получаем два случая.

1) Если $\rho \le 1$, то $\sup\limits_{p>0}\left\{\psi(p)+\frac{p\psi(p)}{(Rn)^{1/\rho}}\right\} \le e^{(\sigma+\varepsilon_1+\delta)Rn}$ для всех $\delta > 0$ и для всех $n > n_0(\delta,\varepsilon,\varepsilon_1)$, следовательно, для всех $F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma]$, для всех $\delta>0$ и для всех $n > n_0(\delta,\varepsilon,\varepsilon_1)$

$$\|F^{(n)}(z)\|_{\varepsilon} < e^{-n}e^{(\sigma+\varepsilon_1+\delta)Rn}R^{-n/\rho}n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\|F\|_{\varepsilon_1} < e^{\frac{1-\rho}{\rho}n}(\rho(\sigma+\varepsilon_1+\delta))^{n/\rho}n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\|F\|_{\varepsilon_1}. \tag{17}$$

Последнее означает, что оператор дифференцирования в пространстве $\mathcal{H}[\rho,\sigma]$ имеет ε-порядки не выше $\frac{\rho-1}{\rho}$. Таким образом, $\beta_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{\rho-1}{\rho}$ для всех ε. Более того, из (17) следует $\alpha_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right) \le e^{-1}(\rho e\sigma)^{1/\rho}$ для всех ε, но поскольку в пространстве $\mathcal{H}[\rho,\sigma]$ имеются функции, у которых операторные ε-типы при операторных ε-порядках $\frac{\rho-1}{\rho}$ равны $e^{-1}(\rho e\sigma)^{1/\rho}$ (таковыми являются функции, для которых $\rho(F)=\rho$, $\sigma(F)=\sigma$), то согласно неравенству (5) получаем $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right)=e^{-1}(\rho e\sigma)^{1/\rho}$ для всех ε.

2) Если $\rho>1$, то $\sup\limits_{p>0}\left\{\psi(p)+\frac{p\psi(p)}{(Rn)^{1/\rho}}\right\}\le e^{(\sigma+\varepsilon_1)R(\Omega_{\varepsilon,\varepsilon_1}+\delta)n}$ для всех $\delta>0$ и для всех $n>n_0(\delta,\varepsilon,\varepsilon_1)$, следовательно, для всех $F\in\mathcal{H}[\rho,\sigma]$, для всех $\delta>0$ и для всех $n>n_0(\delta,\varepsilon,\varepsilon_1)$

$$\|F^{(n)}(z)\|_\varepsilon<e^{-n}e^{(\sigma+\varepsilon_1)(\Omega_{\varepsilon,\varepsilon_1}+\delta)Rn}R^{-\frac{n}{\rho}}n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\|F\|_{\varepsilon_1}<\left(e^{-1}(\rho e(\sigma+\varepsilon_1)(\Omega_{\varepsilon,\varepsilon_1}+\delta))^{\frac{1}{\rho}}\right)^n n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}\|F\|_{\varepsilon_1}.$$

Здесь аналогично случаю 1) получаем $\beta_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right)=\frac{\rho-1}{\rho}$, $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right)=e^{-1}(\rho e\sigma\Omega_\varepsilon)^{1/\rho}$ для всех ε. $\square$

Замечание 2. В утверждении 1 предполагалось, что $\sigma<\infty$. Но по аналогичной схеме можно доказать, что полученный результат имеет место и для $\sigma=\infty$, т.е. оператор $\frac{d}{dz}:\mathcal{H}[\rho,\infty]\to\mathcal{H}[\rho,\infty]$ имеет характеристики $\beta_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right)=\frac{\rho-1}{\rho}$, $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right)=\infty$ для всех $\varepsilon>0$.

Оператор A называется *оператором класса* $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a)$, если либо $\beta_p(A)<b$, либо $\beta_p(A)=b$, но тогда $\alpha_p(A)<a$. Оператор A называется *оператором класса* $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$, если либо $\beta_p(A)<b$, либо $\beta_p(A)=b$, но тогда $\alpha_p(A)\le a$ [15], [18]. Здесь a может равняться как нулю, так и бесконечности, однако условие $\beta_p(A)=b$, $\alpha_p(A)<0$ не может быть выполнено (p-тип не может быть отрицательным, так как по определению является точной нижней гранью множества неотрицательных чисел), поэтому $A\in\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,0)$ тогда и только тогда, когда $\beta_p(A)<b$ при каждом p.

Оператор A называется *оператором класса* $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a)$, если либо $\beta(A)<b$, либо $\beta(A)=b$, но тогда $\alpha(A)<a$. Оператор A называется *оператором класса* $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$, если либо $\beta(A)<b$, либо $\beta(A)=b$, но тогда $\alpha(A)\le a$. Здесь a также может равняться как нулю, так и бесконечности ($A\in\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,0)$ тогда и только тогда, когда $\beta(A)<b$). Классы $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[0,\infty)$ и $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[0,\infty)$ представляют собой известные классы регулярных [19] и квазирегулярных [20] операторов. Аналогично определяются последовательности операторов классов $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a)$, $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$, $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a)$ и $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$.

Вектор x называется *вектором класса* $\mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[b,a)$, если либо $\beta_p(x,A)<b$, либо $\beta_p(x,A)=b$, но тогда $\alpha_p(x,A)<a$. Вектор x называется *вектором класса* $\mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[b,a]$, если либо $\beta_p(x,A)<b$, либо $\beta_p(x,A)=b$, но тогда $\alpha_p(x,A)\le a$. Вектор x называется *вектором класса* $\mathfrak{H}^A[b,a)$, если либо $\beta(x,A)<b$, либо $\beta(x,A)=b$, но тогда $\alpha(x,A)<a$. Вектор x называется *вектором класса* $\mathfrak{H}^A[b,a]$, если либо $\beta(x,A)<b$, либо $\beta(x,A)=b$, но тогда $\alpha(x,A)\le a$ [15]. Так же, как и в случае классов операторов, a может равняться как нулю, так и бесконечности ($x\in\mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[b,0)$ тогда и только тогда, когда $\beta_p(x,A)<b$ при каждом p; $x\in\mathfrak{H}^A[b,0)$ тогда и только тогда, когда $\beta(x,A)<b$). Классы $\mathfrak{H}^A[1,\infty)$, $\mathfrak{H}^A[1,0]$ и $\mathfrak{H}^A[0,\infty)$ представляют собой известные классы аналитических [21], целых [22] и целых векторов экспоненциального типа [23], обобщенные на случай произвольных локально выпуклых пространств.

Аналогично определяются векторы классов $\mathfrak{H}^{\mathfrak{A}}_{\mathbb{P}}[b,a)$, $\mathfrak{H}^{\mathfrak{A}}_{\mathbb{P}}[b,a]$, $\mathfrak{H}^{\mathfrak{A}}[b,a)$ и $\mathfrak{H}^{\mathfrak{A}}[b,a]$.

Утверждение 2. *Классы операторов (последовательностей операторов)* $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$ *и* $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть оператор A принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$. Докажем, что он принадлежит и классу $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$. Предположим, что $A\notin\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$. Тогда найдется $p_0\in\mathcal{P}$ такое, что либо $\beta_{p_0}(A)>b$, либо $\beta_{p_0}(A)=b$, $\alpha_{p_0}(A)>a$. В случае $\beta_{p_0}(A)>b$ получаем $\beta(A)>b$, так как $\beta(A)\ge\beta_p(A)$, для каждого $p\in\mathcal{P}$, а в случае $\beta_{p_0}(A)=b$, $\alpha_{p_0}(A)>a$ получаем либо $\beta(A)>b$, либо $\beta(A)=b$, но тогда $p_0\in\mathcal{P}_A$ и, следовательно, $\alpha(A)>a$, так как $\alpha(A)\ge\alpha_p(A)$ для каждого $p\in\mathcal{P}_A$. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что $A\in\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$.

Пусть теперь $A \in \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$. Покажем, что $A \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$. Предположим, что $A \notin \mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a]$. Тогда либо $\beta(A) > b$, либо $\beta(A) = b$, $\alpha(A) > a$. В случае $\beta(A) > b$ найдется $p_0 \in \mathcal{P}$ такое, что $\beta_{p_0}(A) > b$. В случае $\beta(A) = b$, $\alpha(A) > a$ множество $\mathcal{P}_A$ не пусто (иначе по определению $\alpha(A)$ равнялось бы нулю) и найдется $p_0 \in \mathcal{P}_A$ такое, что $\beta_{p_0}(A) = b$, $\alpha_{p_0}(A) > a$. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что $A \in \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a]$. □

Замечание 3. Совпадение классов $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a)$ и $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a)$, вообще говоря, не имеет места (справедливо лишь вложение $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[b,a) \subset \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[b,a)$), так как существуют операторы и последовательности операторов, у которых все p-порядки равны b (соответственно порядок также равен b), все p-типы меньше a, но тип равен a.

Аналогично, классы векторов $\mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[b,a]$ и $\mathfrak{H}^A[b,a]$ совпадают, а для классов $\mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[b,a)$ и $\mathfrak{H}^A[b,a)$ справедливо вложение $\mathfrak{H}^A[b,a) \subset \mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[b,a)$.

Замечание 4. Автором [18] показано, что принадлежность последовательности $\{A_n\}$ классу $\mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[0,1)$ является достаточным условием сходимости операторного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ в $\mathbf{Lec}(\mathbf{H})$, что автоматически влечет поточеную сходимость этого ряда и непрерывность его суммы. В силу вложения $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[0,1) \subset \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[0,1)$ принадлежность последовательности $\{A_n\}$ классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}[0,1)$ также является достаточным условием сходимости операторного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ в $\mathbf{Lec}(\mathbf{H})$. Это в дальнейшем используется нами для обоснования сходимости векторных рядов, представляющих решение уравнения (1).

Замечание 5. Прямое вычисление характеристик операторов (последовательностей операторов) непосредственно по определению в пространствах с более сложной структурой, чем счетно-нормируемые, практически нереализуемо из-за отсутствия явного вида полунорм или их сложной структуры. Однако для подобных пространств существуют косвенные способы нахождения характеристик операторов (последовательностей операторов), минуя определение. Один из таких способов рассмотрен в работе [24].

2. Достаточные условия существования и единственности решения уравнения (1)

Пусть
$$\gamma_c := \varliminf_{n\to\infty} \frac{-\ln|c_n|}{n\ln n}, \tag{18}$$
$$\varkappa_c := \varliminf_{n\to\infty} \frac{n^{-\gamma_c}}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{19}$$
($\varkappa_c$ определяется только в случае $\gamma_c \neq \pm\infty$). Числа γ_c и $\varkappa_c$ характеризуют рост или убывание последовательности $\{c_n\}$. Обозначим через γ_λ и $\varkappa_\lambda$ соответствующие характеристики последовательности $\{\lambda_n\}$.

Теорема 1. *Если $y \in \mathfrak{H}^A_{\mathbb{P}}[\gamma_c, \varkappa_c)$, то ряд* (2) *сходится и его сумма является решением уравнения* (1).

Доказательство. Оценим общий член ряда (2). Пусть $\varkappa_c > 0$. Из (19) и определения операторных характеристик (операторного p-порядка и операторного p-типа) вектора для всех $\varepsilon > 0$, всех p и всех $n > n_0(p,y,\varepsilon)$ вытекает
$$\|c_n A^n(y)\|_p \le \left(\frac{1}{\varkappa_c} + \varepsilon\right)^n n^{-\gamma_c n}(\alpha_p(y,A)+\varepsilon)^n n^{\beta_p(y,A)n}.$$

В условиях теоремы для каждого p найдется $\xi_p < 1$ такое, что

$$\left(\frac{1}{\varkappa_c}+\varepsilon\right)^n n^{-\gamma_c n}(\alpha_p(y,A)+\varepsilon)^n n^{\beta_p(y,A)n} \le \xi_p^n, \quad n > n_0(p,y,\varepsilon),$$

поэтому ряд (2) сходится и его сумма является решением уравнения (1).

Пусть $\varkappa_c = 0$. Из (18) и определения операторного p-порядка вектора следует

$$\|c_n A^n(y)\|_p \le C_p n^{(-\gamma_c+\varepsilon)n} n^{(\beta_p(y,A)+\varepsilon)n}, \quad \varepsilon > 0, \quad n > n_0(p,y,\varepsilon).$$

В условиях теоремы для каждого p найдется $\xi_p < 1$ такое, что

$$n^{(-\gamma_c+\varepsilon)n} n^{(\beta_p(y,A)+\varepsilon)n} \le \xi_p^n, \quad n > n_0(p,y,\varepsilon),$$

поэтому и в этом случае ряд (2) сходится и его сумма является решением уравнения (1). □

Теорема 2. *Если $A \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}}^{\mathbb{P}}[\gamma_c, \varkappa_c)$, то ряд* (2) *сходится для всех $y \in \mathbf{H}$ и его сумма является единственным решением уравнения* (1). *Это решение непрерывно зависит от y.*

Доказательство. Пусть $\varkappa_c > 0$. Из (19) и определения характеристик (p-порядка и p-типа) оператора получим оценку для общего члена ряда (2):

$$\|c_n A^n(y)\|_p \le \left(\frac{1}{\varkappa_c}+\varepsilon\right)^n n^{-\gamma_c n}(\alpha_p(A)+\varepsilon)^n n^{\beta_p(A)n}\|y\|_q, \quad \varepsilon > 0,\ n > n_0(p,\varepsilon), \quad q = q(p,\varepsilon).$$

Пусть $\varkappa_c = 0$. Из (18) и определения p-порядка оператора следует

$$\|c_n A^n(y)\|_p \le n^{(-\gamma_c+\varepsilon)n} n^{(\beta_p(A)+\varepsilon)n}\|y\|_q, \quad \varepsilon > 0, \quad n > n_0(p,\varepsilon), \quad q = q(p,\varepsilon).$$

В обоих случаях (в силу произвольности $\varepsilon > 0$) последовательность $\{c_n A^n\}$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}}^{\mathbb{P}}[0,1)$, поэтому [18] операторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ сходится в $\mathbf{Lec}(\mathbf{H})$ к оператору $S \in \mathbf{Lec}(\mathbf{H})$, значит, ряд (2) сходится при всех $y \in \mathbf{H}$ и его сумма $S(y)$ является решением уравнения (1), непрерывно зависящим от y. Оператор $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ является правым обратным к B. Так как операторы A и B коммутируют, то коммутируют и операторы B и S, а следовательно, оператор S является также и левым обратным к B. Таким образом, $S = B^{-1}$ и $x = S(y)$ — единственное решение уравнения (1). □

Для вычисления чисел γ_c и $\varkappa_c$ удобно отдельно рассмотреть случаи, когда ряд

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n t^n \tag{20}$$

сходится в какой-либо окрестности нуля и когда он расходится в любой окрестности нуля.

3. Случай $B = \varphi(A)$

Пусть ряд (20) сходится в какой-либо окрестности нуля к аналитической в этой окрестности функции $\varphi(t)$. Функция $\varphi(t)$ называется характеристической функцией оператора B. Оператор B будем в этом случае обозначать $\varphi(A)$. При этом ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \tag{21}$$

где c_n вычисляются по формулам (3), является разложением функции $\psi(t) = 1/\varphi(t)$ и он также сходится в некоторой окрестности нуля, так как $\varphi(0) = 1$.

Пусть $z_\psi \ne \infty$ — ближайшая к нулю особая точка функции $\psi(t)$.

Теорема 3. *Если* $y \in \mathfrak{H}^{A}_{\mathbb{P}}[0,|z_\psi|)$, *то уравнение* (1) *имеет решение, которое представляется рядом* (2).

Доказательство. Радиус сходимости ряда (21) равен $R = |z_\psi| = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. Таким образом, последовательность $\{c_n\}$ имеет характеристики роста $\gamma_c = 0$, $\varkappa_c = |z_\psi|$. По теореме 1 ряд (2) сходится и его сумма является решением уравнения (1). □

Теорема 4. *Если* $A \in \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}[0,|z_\psi|)$, *то для всех* $y \in \mathbf{H}$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение, которое представляется рядом* (2) *и непрерывно зависит от* y.

Справедливость следует из теоремы 2.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$F(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F^{(n)}(z) = F_0(z) \tag{22}$$

(пространство $\mathbf{H}$ выбирается в зависимости от правой части F_0). Известно ([1], c. 382), что если характеристическая функция $\varphi(t)$ уравнения (22) аналитическая в нуле и $z_\psi \neq \infty$ — ближайшая к нулю особая точка функции $\psi(t) = 1/\varphi(t)$, то для всех $F_0 \in \mathcal{H}[1,\sigma]$, $\sigma < |z_\psi|$ (здесь $\mathcal{H}[1,\sigma]$ — пространство всех целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ), уравнение (22) имеет единственное (принадлежащее $\mathcal{H}[1,\sigma]$) решение. Этот факт следует из теоремы 4 как частный случай. Действительно, возьмем в качестве $\mathbf{H}$ пространство $\mathcal{H}[1,\sigma]$, $\sigma < |z_\psi|$, с естественной топологией, определяемой системой норм (6) (при $\rho = 1$). Оператор дифференцирования $\frac{d}{dz} : \mathcal{H}[1,\sigma] \to \mathcal{H}[1,\sigma]$ имеет ε-порядки $\beta_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = 0$ и ε-типы $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = \sigma < |z_\psi|$ (утверждение 1). По теореме 4 для всех $F_0 \in \mathcal{H}[1,\sigma]$ уравнение (22) имеет единственное (принадлежащее $\mathcal{H}[1,\sigma]$) решение. Это решение представляется в виде

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_0^{(n)}(z), \tag{23}$$

где c_n вычисляются по формулам (3), и непрерывно зависит от F_0. В частности, если $F_0 \equiv 0$, то уравнение (22) имеет только нулевое решение в классе $\mathcal{H}[1,\sigma]$, $\sigma < |z_\psi|$.

Пример 2. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}[1,\sigma)$ всех целых функций экспоненциального типа, меньшего σ, функциональное уравнение

$$F(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n F(z+n) = F_0(z), \quad F_0(z) \in \mathcal{H}[1,\sigma), \tag{24}$$

где $\varphi(t) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n t^n$ — аналитическая в круге $|z| < R$, $R > e^\sigma$, функция, не имеющая нулей в этом круге. Пространство $\mathcal{H}[1,\sigma)$ представляет собой индуктивный предел ([14], c. 402; [25], c. 118) пространств $\mathcal{H}[1,\sigma_1]$, $\sigma_1 < \sigma$. Оператор $T : \mathcal{H}[1,\sigma)^* \to \mathbf{H}_\sigma$, действующий по правилу $T(l) = l(e^{\lambda z})$, $l \in \mathcal{H}[1,\sigma)^*$, устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\mathcal{H}[1,\sigma)^*$ и пространством $\mathbf{H}_\sigma$ всех функций, аналитических в круге $|z| < \sigma$ с топологией равномерной сходимости на компактах, определяемой системой норм $\|F(z)\|_p = \max\limits_{|z|\le p} |F(z)|$, $p < \sigma$ [26]. В силу рефлексивности пространства $\mathcal{H}[1,\sigma)$ [27] оператор $\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)$, порожденный целой функцией $\varphi(\xi)$, имеет такой же порядок в пространстве $\mathcal{H}[1,\sigma)$, как и сопряженный к нему оператор $\left(\varphi\left(\frac{d}{dz}\right)\right)^*$ в пространстве $\mathcal{H}[1,\sigma)^*$, который в свою очередь согласно свойству инвариантности имеет такой же порядок, как и оператор умножения на функцию $\varphi(\xi)$ в пространстве $\mathbf{H}_\sigma$ [24]. Оператор $A(F)(z) = F(z+1)$ порождается целой функцией $\varphi(\xi) = e^\xi$. Оператор умножения на такую функцию имеет в пространстве $\mathbf{H}_\sigma$ нулевой порядок и тип e^σ, так как для всех n, p и для всех $F \in \mathbf{H}_\sigma$

$$\|e^{n\xi}F(\xi)\|_p \le e^{np}\|F(\xi)\|_p \tag{25}$$

и при этом для $F(\xi) \equiv 1$ в (25) имеет место точное равенство. Таким образом, оператор $A(F)(z) = F(z+1)$ имеет нулевой порядок и тип e^σ в пространстве $\mathcal{H}[1,\sigma)$. Условия теоремы 4 выполнены, следовательно для всех $F_0 \in \mathcal{H}[1,\sigma)$ уравнение (24) имеет единственное (принадлежащее $\mathcal{H}[1,\sigma)$) решение. Это решение представляется в виде $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n F_0(z+n)$, где c_n вычисляются по формулам (3), и непрерывно зависит от F_0.

Замечание 6. Если функция $\varphi(t)$ целая и не имеет нулей, то $\varphi(t) = e^{h(t)}$, где $h(t)$ — целая функция ([17], с. 26). В этом случае характеристики роста функции $\varphi(t)$ конечны тогда и только тогда, когда $h(t)$ — многочлен ([17], с. 27). При этом, очевидно, они связаны с числами γ_λ и $\varkappa_\lambda$ соотношениями $\rho_\varphi = 1/\gamma_\lambda$, $\rho_\varphi e\sigma_\varphi = \varkappa_\lambda^{-\rho_\varphi}$. В этом случае $\psi(t) = e^{-h(t)}$ — целая функция без нулей и ее характеристики роста будут такими же как и у $\varphi(t)$. Поэтому если $A \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}}^{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{\rho_\varphi}, (\rho_\varphi e\sigma_\varphi)^{-\frac{1}{\rho_\varphi}}\right)$, то уравнение (1) имеет единственное решение для всех $y \in \mathbf{H}$, которое представляется рядом (2) и непрерывно зависит от y.

Пример 3. Пусть $\mathcal{H}[\rho,\sigma)$ — пространство всех целых функций, у которых порядок роста не выше ρ, а при порядке ρ тип меньше σ. Это пространство есть индуктивный предел пространств $\mathcal{H}[\rho,\sigma_1]$, $\sigma_1 < \sigma$. Рассмотрим в нем функциональное уравнение

$$F(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D_f^n F(z) = F_0(z), \quad F_0(z) \in \mathcal{H}[\rho,\sigma). \tag{26}$$

В (26) λ_n — тейлоровские коэффициенты функции $\varphi(t) = e^{h(t)}$, где $h(t) = \sum\limits_{n=1}^{k} \xi_n t^n$ — многочлен степени k, D_f — оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева [3], порожденный функцией $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \ne 0$ для всех n) порядка роста $\frac{k\rho}{k+\rho} < \rho_0 < \rho$ и типа σ_0, для которой выполняется равенство $(\rho_0 e\sigma_0)^{\frac{1}{\rho_0}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho_0}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Оператор D_f каждой целой функции $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ставит в соответствие функцию $D_f F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} z^n$. Функция $\varphi(t)$ имеет порядок роста $\rho_\varphi = k$ и тип $\sigma_\varphi = |\xi_k|$ ([17], с. 9).

Оператор $T : \mathcal{H}[\rho,\sigma)^* \to \mathcal{H}[R,\omega]$, действующий по правилу $T(l) = l(f(\lambda z))$, $l \in \mathcal{H}[\rho,\sigma)^*$ устанавливает топологический изоморфизм между пространством $\mathcal{H}[\rho,\sigma)^*$ и пространством $\mathcal{H}[R,\omega]$, где числа ρ, σ, R и ω связаны соотношениями $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho_0}$, $(\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}(R\omega)^{\frac{1}{R}} = (\rho_0\sigma_0)^{\frac{1}{\rho_0}}$ [26]. При этом оператору D_f^* в пространстве $\mathcal{H}[\rho,\sigma)^*$ соответствует оператор умножения на λ в $\mathcal{H}[R,\omega]$. В силу рефлексивности пространства $\mathcal{H}[\rho,\sigma)$ [27], оператор D_f имеет такой же порядок в пространстве $\mathcal{H}[\rho,\sigma)$, как и сопряженный к нему оператор D_f^* в пространстве $\mathcal{H}[\rho,\sigma)^*$, который в свою очередь согласно свойству инвариантности имеет такой же порядок, как и оператор умножения на λ в пространстве $\mathcal{H}[R,\omega]$ [24]. Оператор умножения на λ имеет в пространстве $\mathcal{H}[R,\omega]$ порядок $1/R$ и бесконечный тип (доказывается по такой же схеме, как и утверждение 1). Таким образом, оператор D_f имеет в пространстве $\mathcal{H}[\rho,\sigma)$

порядок $\frac{\rho-\rho_0}{\rho\rho_0}$ и бесконечный тип. Так как $\frac{\rho-\rho_0}{\rho\rho_0} < \frac{1}{k}$, то условие $D_f \in \mathfrak{L}^{\mathbb{P}}_{\mathbf{H}}\left[\frac{1}{\rho_\varphi}, (\rho_\varphi e\sigma_\varphi)^{-\frac{1}{\rho_\varphi}}\right)$ выполнено, поэтому уравнение (26) для всех $F_0 \in \mathcal{H}[\rho,\sigma)$ имеет единственное (принадлежащее $\mathcal{H}[\rho,\sigma)$) решение. Это решение представляется рядом $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n D_f^n F_0(z)$, где c_n — тейлоровские коэффициенты функции $\psi(t) = e^{-h(t)}$, и непрерывно зависит от F_0.

4. Отсутствие характеристической функции оператора B

Рассмотрим случай, когда ряд (20) расходится всюду, кроме нуля, т. е. когда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\lambda_n|} = +\infty$. Отметим, что в этом случае обязан расходиться всюду (кроме нуля) и ряд (21) (если бы ряд (21) сходился в окрестности нуля к функции $\psi(t)$, то ряд (20) представлял бы разложение функции $\varphi(t) = 1/\psi(t)$ и должен был сходиться в окрестности нуля, так как $\psi(0) = 1$). Запишем формулы (3) в виде $c_n = \lambda_1 c_{n-1} + \lambda_2 c_{n-2} + \dots + \lambda_n c_0$.

Лемма 1. *Пусть ряд* (20) *расходится всюду, кроме нуля. Тогда для всякого* $b > 0$ *справедливо равенство* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{n!^b}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!^b}}$.

Доказательство. Положим $a := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{n!^b}}$, $d := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!^b}}$ и покажем, что $d = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon_2 > 0$, обозначим $d_n = \frac{|c_n|}{(a+\varepsilon_2)^n n!^b}$ и покажем, что $\omega = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} d_n < \infty$. Пусть $\omega = \infty$. Тогда найдется подпоследовательность $d_{n_k} \to \infty$ такая, что $d_{n_k} = \max\limits_{n\le n_k}\{d_n\}$. Возьмем произвольное $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. По определению верхнего предела $|\lambda_n| \le (a+\varepsilon_1)^n n!^b$ при $n > n_0(\varepsilon_1)$. Выберем k_1 такое, что $n_k > n_0$ при $k > k_1$. Тогда для $k > k_1$ имеем

$$d_{n_k} \le \frac{|\lambda_1|}{(a+\varepsilon_2) n_k!^b} \frac{|c_{n_k-1}|}{(a+\varepsilon_2)^{n_k-1}} \frac{(n_k-1)!^b}{(n_k-1)!^b} + \frac{|\lambda_2|}{(a+\varepsilon_2)^2 n_k!^b} \frac{|c_{n_k-2}|}{(a+\varepsilon_2)^{n_k-2}} \frac{(n_k-2)!^b}{(n_k-2)!^b} + \dots +$$
$$+ \frac{|\lambda_{n_k}|}{(a+\varepsilon_2)^{n_k} n_k!^b}|c_0| \le \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)\binom{n_k}{1}^{-b} d_{n_k-1} + \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^2 \binom{n_k}{2}^{-b} d_{n_k-2} + \dots +$$
$$+ \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^{n_k} \binom{n_k}{n_k}^{-b} d_0 \le d_{n_k}\left(\binom{n_k}{1}^{-b}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right) + \binom{n_k}{2}^{-b}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^2 + \dots +\right.$$
$$\left. + \binom{n_k}{n_k-1}^{-b}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^{n_k-1} + \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^{n_k}\right).$$

Выберем произвольное $\varepsilon_1 < \delta < \varepsilon_2$. Так как $\left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^{n_k} n_k^b < \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\delta}\right)^{n_k}$, $k > k_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta)$, то для $k > k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ получаем

$$d_{n_k} \le \frac{d_{n_k}}{n_k^b}\left(\left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right) + \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\varepsilon_2}\right)^{n_k-1} + \left(\frac{a+\varepsilon_1}{a+\delta}\right)^{n_k}\right) \le C\frac{d_{n_k}}{n_k^b},$$

где $C = C(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta)$. Значит, $\frac{C}{n_k^b} \ge 1$ для всех $k > k_0$, что невозможно. Итак, последовательность $\{d_n\}$ ограничена, следовательно, $d_n = \frac{|c_n|}{(a+\varepsilon_2)^n n!^b} \le M_{\varepsilon_2}$ для каждого n, т. е. $|c_n| \le M_{\varepsilon_2}(a+\varepsilon_2)^n n!^b$. Таким образом, для каждого $\varepsilon_2 > 0$ $d = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!^b}} \le a + \varepsilon_2$. В силу произвольности ε_2 $d \le a$. Аналогично из равенства $\lambda_n = \lambda_0 c_n - \lambda_1 c_{n-1} - \dots - \lambda_{n-1} c_1$ следует $a \le d$. $\square$

Замечание 7. При доказательстве леммы 1 предполагалось, что a конечно. Однако лемма справедлива и для бесконечного a, так как в этом случае бесконечно и d. Действительно, если d конечно, то в силу неравенства $a \le d$ конечным должно быть и a.

Лемма 2. *Пусть ряд* (20) *расходится всюду, кроме нуля. Тогда* $\gamma_\lambda = \gamma_c$, $\varkappa_\lambda = \varkappa_c$.

Доказательство. Из расходимости ряда (20) всюду следует $\gamma_\lambda \le 0$, причем при $\gamma_\lambda = 0$, обязательно $\varkappa_\lambda = 0$. Из определения числа γ_λ для всех $\varepsilon > 0$ найдется n_ε такое, что для всех $n > n_\varepsilon$

$$|\lambda_n| \le n!^{-\gamma_\lambda+\varepsilon}. \tag{27}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (27) следует, что число $a_\varepsilon = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{n!^{-\gamma_\lambda+\varepsilon}}}$, а следовательно, равное ему по лемме 1 число $d_\varepsilon = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!^{-\gamma_\lambda+\varepsilon}}}$ не превосходят единицы. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется n'_δ такое, что для всех $n > n'_\delta$

$$|c_n| \le (d_\varepsilon + \delta)^n n!^{-\gamma_\lambda+\varepsilon}. \tag{28}$$

Из (28) следует $\gamma_c \ge \gamma_\lambda - \varepsilon$. В силу произвольности ε $\gamma_c \ge \gamma_\lambda$.

С другой стороны, из определения числа γ_c для всех $\varepsilon > 0$ найдется n_ε такое, что для всех $n > n_\varepsilon$

$$|c_n| \le n!^{-\gamma_c+\varepsilon}. \tag{29}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (29) следует, что число $\widetilde{d}_\varepsilon = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!^{-\gamma_c+\varepsilon}}}$, а следовательно, равное ему по лемме 1 число $\widetilde{a}_\varepsilon = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{n!^{-\gamma_c+\varepsilon}}}$, не превосходят единицы. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется n'_δ такое, что для всех $n > n'_\delta$

$$|\lambda_n| \le (\widetilde{a}_\varepsilon + \delta)^n n!^{-\gamma_c+\varepsilon}. \tag{30}$$

Из (30) следует $\gamma_\lambda \ge \gamma_c - \varepsilon$. В силу произвольности ε $\gamma_\lambda \ge \gamma_c$.

В случае $\gamma_\lambda = 0$, $\varkappa_\lambda = 0$ по доказанному выше $\gamma_c = 0$, а из расходимости ряда (21) следует $\varkappa_c = 0 = \varkappa_\lambda$. В случае $\gamma_\lambda < 0$ имеем

$$\varkappa_c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^{-\gamma_c n}}{|c_n|}} = \frac{e^{-\gamma_c}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|c_n|}{n!^{-\gamma_c}}}} = \frac{e^{-\gamma_c}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{n!^{-\gamma_c}}}} = \frac{e^{-\gamma_\lambda}}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{n!^{-\gamma_\lambda}}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^{-\gamma_\lambda n}}{|\lambda_n|}} = \varkappa_\lambda.$$

□

Теорема 5. *Если* $y \in \mathfrak{H}_{\mathbb{P}}^{A}[\gamma_\lambda, \varkappa_\lambda)$, *то ряд* (2) *сходится, и его сумма является решением уравнения* (1).

Теорема 6. *Если* $A \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}}^{\mathbb{P}}[\gamma_\lambda, \varkappa_\lambda)$, *то ряд* (2) *сходится для всех* $y \in \mathbf{H}$, *и его сумма является единственным решением уравнения* (1), *которое непрерывно зависит от* y.

Справедливость теорем следует из теорем 1, 2 и леммы 2.

Пример 4. Рассмотрим дифференциальное уравнение бесконечного порядка (22) с быстро растущими коэффициентами. Из теоремы 6 следует, что если последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет характеристики роста $\gamma_\lambda < 0$ и $\varkappa_\lambda$, то для всех $F_0 \in \mathcal{H}\left[\frac{1}{1-\gamma_\lambda}, \sigma\right]$, $\sigma < \sigma_0$, где $\sigma_0 = (1-\gamma_\lambda)(e^{\gamma_\lambda}\varkappa_\lambda)^{\frac{1}{\gamma_\lambda - 1}}$, уравнение (22) имеет единственное решение, принадлежащее тому же классу $\mathcal{H}\left[\frac{1}{1-\gamma_\lambda}, \sigma\right]$, которое представляется рядом (23), где c_n вычисляются по формулам (3). Решение (23) непрерывно зависит от F_0.

Действительно, возьмем в качестве $\mathbf{H}$ пространство $\mathcal{H}[\rho,\sigma]$, $\rho = \frac{1}{1-\gamma_\lambda} < 1$, $\sigma < \sigma_0$, с естественной топологией, определяемой системой норм (6). Оператор дифференцирования $\frac{d}{dz} : \mathcal{H}[\rho,\sigma] \to \mathcal{H}[\rho,\sigma]$ имеет ε-порядки $\beta_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = \frac{\rho-1}{\rho} = \gamma_\lambda$ и ε-типы $\alpha_\varepsilon\left(\frac{d}{dz}\right) = e^{-1}(\rho e\sigma)^{1/\rho} = e^{-\gamma_\lambda}(\rho\sigma)^{1-\gamma_\lambda} < \varkappa_\lambda$ (утверждение 1). По теореме 6 для всех $F_0 \in \mathcal{H}\left[\frac{1}{1-\gamma_\lambda},\sigma\right]$, уравнение (22) имеет единственное решение, представимое в виде (23) и непрерывно зависящее от F_0.

5. Об одном виде интегральных уравнений

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$F(z) - \int_0^z \frac{K_1(z-\xi)}{(z-\xi)^{1-\alpha}} F(\xi)d\xi = F_0(z), \quad \alpha > 0, \tag{31}$$

где

$$K_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\lambda_{n+1}|}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}} \le \frac{1}{R^\alpha}, \tag{32}$$

а правая часть F_0 — непрерывная на полуинтервале $[0,R)$ функция (случай $R = +\infty$ не исключается) $F_0 \in \mathbf{C}[0,R)$. На пространстве $\mathbf{C}[0,R)$ зададим топологию равномерной сходимости на компактах мультинормой $\|F\|_p = \max\limits_{t\le p} |F(t)|$, $0 < p < R$. Запишем уравнение (31) в виде

$$F(z) - \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(z-\xi)^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)}\right) F(\xi)d\xi = F_0(z),$$

или

$$F - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n J_\alpha^n(F) = F_0, \quad J_\alpha(F) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-\xi)^{\alpha-1} F(\xi)d\xi. \tag{33}$$

Покажем, что характеристики оператора $J_\alpha : \mathbf{C}[0,R) \to \mathbf{C}[0,R)$ равны $\beta_p(J_\alpha) = -\alpha$, $\alpha_p(J_\alpha) = \left(\frac{ep}{\alpha}\right)^\alpha$. Действительно, из равенства $J_\alpha J_\beta = J_{\alpha+\beta}$ ([28], с. 42) для каждого $\varepsilon > 0$, каждого $p < R$ и каждого n имеем (с учетом формулы Стирлинга для $\Gamma-$функции)

$$\|J_\alpha^n(F)\|_p = \max_{t\le p} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha n-1} F(t)dt \right| \le$$
$$\le \frac{p^{\alpha n}}{\alpha n\Gamma(\alpha n)} \max_{t\le p} |F(t)| \le C\left(\left(\frac{ep}{\alpha}\right)^\alpha + \varepsilon\right)^n n^{-\alpha n} \|F\|_p, \; C = C(\varepsilon). \tag{34}$$

Кроме того, для $F(t) \equiv 1$ имеет место оценка снизу

$$\|J_\alpha^n(1)\|_p = \frac{p^{\alpha n}}{\alpha n\Gamma(\alpha n)} > \left(\left(\frac{ep}{\alpha}\right)^\alpha - \varepsilon\right)^n n^{-\alpha n}, \quad n > n_0(\varepsilon). \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует $\beta_p(J_\alpha) = -\alpha$, $\alpha_p(J_\alpha) = \left(\frac{ep}{\alpha}\right)^\alpha$ для всех p.

Таким образом, выполняются все требования либо теоремы 4 (если ряд (20) сходится в какой-либо окрестности нуля), либо теоремы 6 (если ряд (20) расходится в любой окрестности нуля), поэтому уравнение (33) (а следовательно, и (31)) имеет единственное решение для всех $F_0 \in \mathbf{C}[0,R)$, которое записывается в виде

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_\alpha^n(F_0), \tag{36}$$

где c_n вычисляются по формулам (3). Преобразуем равенство (36):

$$F(z)=F_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^z\frac{(z-\xi)^{\alpha n-1}}{\Gamma(\alpha n)}F(\xi)d\xi=F_0(z)+\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\frac{(z-\xi)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}\right)\frac{F_0(\xi)}{(z-\xi)^{1-\alpha}}d\xi.$$

Таким образом,

$$F(z)=F_0(z)-\int_0^z\frac{K_2(z-\xi)}{(z-\xi)^{1-\alpha}}F_0(\xi)d\xi, \tag{37}$$

где

$$K_2(t)=-\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}. \tag{38}$$

Если ряд (20) расходится всюду, кроме нуля, то рост последовательностей $\{c_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ по лемме 2 одинаков и ряд (38) сходится там же, где и ряд (32). Если ряд (20) сходится в какой-либо окрестности нуля к аналитической функции $\varphi(t)$, то функция $\widetilde{K}_1(u)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda_{n+1}\frac{u^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}$ целая. Из оценок

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\Gamma(\alpha n)-\ln|\lambda_n|}\le\frac{1}{\alpha},\quad \varlimsup_{n\to\infty}n^{\alpha}\sqrt[n]{\frac{|\lambda_n|}{\Gamma(\alpha n)}}<\infty$$

следует, что функция $\widetilde{K}_1(u)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}\left[\frac{1}{\alpha},\infty\right)$ всех целых функций, порядок роста которых не превосходит $\frac{1}{\alpha}$, а тип при порядке $\frac{1}{\alpha}$ конечен. Функция $\psi(t)=1/\varphi(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nt^n$ также аналитическая в некоторой окрестности нуля и, следовательно, функция $\widetilde{K}_2(u)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{n+1}\frac{u^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha)}$ принадлежит пространству $\mathcal{H}\left[\frac{1}{\alpha},\infty\right)$. Пусть

$$\gamma_1(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{u^n}=1-\varphi\left(\frac{1}{u}\right),\quad \gamma_2(u)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{u^n}=1-\psi\left(\frac{1}{u}\right).$$

Функции $\gamma_1(u)$ и $\gamma_2(u)$ в окрестности бесконечности связаны тождеством $\frac{1}{\gamma_1(u)}+\frac{1}{\gamma_2(u)}\equiv 1$.

Частный случай. Пусть $\alpha=1$. Если ряд (20) сходится в окрестности нуля, то $K_1(t)$ и $K_2(t)$ будут целыми функциями экспоненциального типа, а функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ — ассоциированными функциями по Борелю соответственно с $K_1(t)$ и $K_2(t)$ ([17], с. 42). Если ряд (20) расходится в любой окрестности нуля, то функции $K_1(t)$ и $K_2(t)$ будут аналитическими в некоторой окрестности нуля (возможно целыми, но не экспоненциального типа). Если функция K_1 имеет вид $K_1(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{n}a_{kl}t^le^{\lambda_kt}$, $a_{kl},\lambda_k\in\mathbb{R}$, то решение интегрального уравнения (31) сводится к решению некоторого алгебраического уравнения и некоторой системы линейных уравнений. Действительно, в этом случае $\gamma_1(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{a_{kl}l!}{(t-\lambda_k)^{l+1}}$, $\gamma_2(t)=\frac{P(t)}{Q(t)}$, где $P(t)$ и $Q(t)$ — некоторые многочлены. Таким образом, $\gamma_2(t)$ — рациональная дробь, которая представляется в виде суммы элементарных дробей $\gamma_2(t)=\sum\limits_{i=0}^{N-1}\sum\limits_{j=0}^{\nu_i-1}\frac{b_{ij}}{(t-\mu_i)^{j+1}}$, где μ_i — нули многочлена $Q(t)$, ν_i — кратность нуля μ_i, N — количество различных нулей многочлена $Q(t)$, а числа b_{ij} находятся методом неопределенных коэффициентов из соответствующей системы линейных уравнений. Следовательно, $K_2(t)=\sum\limits_{i=0}^{N-1}\sum\limits_{j=0}^{\nu_i-1}\frac{b_{ij}}{j!}t^je^{\mu_it}$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$F(z) + \int_0^z \frac{\ln(1-(z-\xi)^\alpha)F(\xi)}{(z-\xi)} d\xi = F_0(z), \quad \alpha > 0, \quad F_0 \in \mathbf{C}[0;1). \tag{39}$$

Имеем

$$K_1(t) = -\frac{\ln(1-t^\alpha)}{t^\alpha}, \quad \lambda_n = \frac{\Gamma(\alpha n)}{n},$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha m)}{m} c_{n-m}, \quad n = 1, 2, \ldots \; .$$

Решение уравнения (39) записывается в виде (37), где $K_2(t)$ находится по формуле (38).

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$F(z) - \int_0^z (z-\xi) e^{(z-\xi)^2} F(\xi) d\xi = F_0(z), \quad F_0 \in \mathbf{C}[0;+\infty). \tag{40}$$

Имеем

$$K_1(t) = e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}, \quad \alpha = 2, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!},$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{(2m-1)!}{(m-1)!} c_{n-m}, \quad n = 1, 2, \ldots \; .$$

Решение уравнения (40) записывается в виде (37), где $K_2(t)$ находится по формуле (38).

Литература

[1] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей* (ГИТТЛ, М., 1952).

[2] Гельфонд А.О. *Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций*, Тр. МИАН СССР **38**, 42–67 (1951).

[3] Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье*, Матем. сб. **29** (3), 477–507 (1951).

[4] Демченко Т.И. *Исследование разрешимости уравнений бесконечного порядка в обобщенных производных Гельфонда–Леонтьева в некотором классе целых функций*, Лит. матем. сб. **7** (4), 611–618 (1967).

[5] Демченко Т.И. *О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений бесконечного порядка в обобщенных производных*, Изв. вузов. Матем., №8, 35–42 (1973).

[6] Коробейник Ю.Ф. *О разрешимости в комплексной области некоторых общих классов линейных операторных уравнений* (Ростов-на-Дону, 2005).

[7] Коробейник Ю.Ф. *Об одном классе уравнений бесконечного порядка в обобощенных производных*, Лит. матем. сб. **4** (4), 495–515 (1964).

[8] Коробейник Ю.Ф. *Об уравнениях бесконечного порядка в обобощенных производных*, Сиб. матем. журн. **5** (6), 1259–1281 (1964).

[9] Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент* (Наука, М., 1981).

[10] Леонтьев А.Ф. *Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и их применения*, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, **II** (Ленинград, 1964), 648–660.

[11] Фролов Ю.Н. *О неоднородных уравнениях бесконечного порядка в обобщенных производных*, Вестн. МГУ, №4, 3–13 (1960).

[12] Фролов Ю.Н. *О решениях уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных*, Тр. МИАН СССР **64**, 294–315 (1961).

[13] Радыно Я.В. *Линейные уравнения и борнология* (Изд-во БГУ, Минск, 1982).

[14] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах* (Физматгиз, М., 1959).

[15] Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения* (ОГУ, Орел, 2009).

[16] Мишин С.Н. *Однородные дифференциально-операторные уравнения в локально выпуклых пространствах*, Изв. вузов. Матем., №1, 26–43 (2017).

[17] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент* (Наука, М., 1983).
[18] Мишин С.Н. *Связь характеристик последовательности операторов с борнологической сходимостью*, Вестн. РУДН. Сер.: Матем., информатика, физ., №4, 26–34 (2010).
[19] Радыно Я.В. *Линейные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах.* I. *Регулярные операторы и их свойства*, Дифференц. уравнения **13** (8), 1402–1410 (1977).
[20] Кондаков В.П., Рунов Л.В., Ковальчук В.Е. *Борнологии и естественное расширение классов регулярных элементов в алгебрах операторов*, Владикавказск. матем. журн. **8** (3), 29–39 (2006).
[21] Нельсон Э. *Аналитические векторы*, В сб. переводов "Матем." **6** (3), 89–131 (1962).
[22] Goodman R. *Analytic and entire vectors for representations of Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **143**, 55–76 (1969).
[23] Радыно Я.В. *Пространство векторов экспоненциального типа*, ДАН БССР **27** (9), 791–793 (1983).
[24] Мишин С.Н. *Инвариантность порядка и типа последовательности операторов*, Матем. заметки **100** (3), 399–409 (2016).
[25] Робертсон А., Робертсон В. *Топологические векторные пространства* (Мир, М., 1967).
[26] Красичков И.Ф. *О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций*, Изв. АН СССР, сер. матем. **31** (1), 37–60 (1967).
[27] Красичков И.Ф. *Полнота в пространствах комплекснозначных функций, описываемых поведением модуля*, Матем. сб. **68** (1), 26–57 (1965).
[28] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).

Сергей Николаевич Мишин

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева,
ул. Комсомольская, д. 95, г. Орел, 302026, Россия,

e-mail: sergeymishin@rambler.ru

S.N. Mishin

On a class of operator equations in locally convex spaces

Abstract. We consider a general method of solving equations whose left-hand side is a series by powers of a linear continuous operator acting in a locally convex space. Obtained solutions are given by operator series by powers of the same operator as the left-hand side of the equation. Research is realized by means of characteristics (of order and type) of operator as well as operator characteristics (of operator order and operator type) of vector relatively of an operator. In research we also use a convergence of operator series on equicontinuous bornology.

Keywords: locally convex space, order and type of an operator, characteristic function of an operator.

Sergei Nikolaevich Mishin

Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya str., Oryol, 302026 Russia,

e-mail: sergeymishin@rambler.ru