УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 153, кн. 3 Физико-математические науки *2011*

УДК 514.763.7

ЗАМКНУТЫЕ G-СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ТРИ-ТКАНЯМИ

М.А. Акивис, А.М. Шелехов

Аннотация

Вводится понятие тождества порядка k с одной переменной и показывается, что многомерная три-ткань, в координатных лупах которой выполняется такое тождество, обладает замкнутой G-структурой.

Ключевые слова: многомерная три-ткань, замкнутая G–структура, координатная лупа три-ткани, тождество с одной переменной порядка k.

---

1. G-структура на гладком многообразии называется замкнутой класса k [1], если определяющая ее система структурных уравнений является формально вполне интегрируемой, и объекты порядка $k+1$ являются комитантами от объектов предыдущих порядков. Примерами замкнутых G-структур являются группы Ли и симметрические пространства. Поэтому понятие замкнутой G-структуры обобщает понятие группы Ли.

Замкнутые G-структуры часто возникают при рассмотрении гладких бинарных операций, вообще говоря, не ассоциативных, но близких в каком-то смысле к группам Ли (их иногда называют Ли-подобными). Это прежде всего лупы с тождествами, близкими к тождеству ассоциативности. Касательная алгебра таких луп близка к алгебрам Ли.

Нелиевы и неассоциативные алгебры начали изучаться физиками в 30-е годы XX в., видимо, с появлением йордановых алгебр. В 40-е годы Алберт ввел понятие Ли-допустимых алгебр, и с тех пор последние изучались весьма интенсивно, в том числе и для физических приложений. Новый этап в изучении Ли-допустимых алгебр начался в 1967 г., когда Р.М. Сантилли (R.M. Santilli) и др. начали применять так называемые (p,q)-мутации алгебры. Возникло целое направление, деятельность которого отражалась в основном в периодических изданиях "Hadronic Press" и "Hadronic Journal" (работы Р.М. Сантилли, Х.К. Мьюнг (H.C. Myung), С. Окубо (S. Okubo) и др.). Итоги этого периода подведены в обзоре [2].

Алгебраическую теорию квазигрупп и луп начали изучать с 30-х годов XX в. Р. Муфанг (R. Moufang) (1936) и А.К. Сушкевич (1937). Исторически первый пример гладкой неассоциативной операции – это алгебра октав (числа Кэли), открытая Грэвсом. Она, как известно, является альтернативной, то есть в ней выполняется «ослабленная» ассоциативность: левоальтернативность $x(xy)=(xx)y$ и правоальтернативность $x(yy)=(xy)y$. Теория Ли-подобных луп начинается, по-видимому, с работы А.И. Мальцева [3], где он рассмотрел аналитические альтернативные лупы, в которых ассоциативны произведения вида $a^{p_1}b^{q_1}a^{p_2}b^{q_2}a^{p_3}b^{q_3}\ldots$, и в частности лупы Муфанг, то есть лупы с тождеством $(xy)(zx)=x((yz)x)$. Касательная алгебра первых является бинарно-лиевой, то есть любые два вектора в ней порождают подалгебру Ли. Касательные алгебры луп Муфанг (теперь их называют алгебрами Мальцева) характеризуются некоторым кубическим соотношением для

структурного тензора (тождество Сейгла). Указанные лупы, как и группы Ли, своими касательными алгебрами определяются однозначно (локально), при этом для луп Муфанг, как и для групп Ли, имеет место формула Кэмпбелла – Хаусдорфа.

Попытка обобщить результаты А.И. Мальцева была сделана в работах Холмса и Сейгла [4, 5], но вычислительные трудности не дали возможность авторам получить столь же содержательные, как у Мальцева, результаты. Вскоре выяснилось, что достаточно «просто» устроены лишь аналитические лупы Муфанг, но уже следующий по сложности класс луп – левые и правые лупы Бола, определяемые соответственно тождествами $(x(yx))z = x(y(xz))$ и $x((yz)y) = ((xy)z)y$, устроены намного сложнее. Для луп Бола аналог формулы Кэмпбелла – Хаусдорфа не найден до сих пор ввиду его чрезвычайной сложности. Дело в том, что, в отличие от алгебр Ли и Сейгла, касательная алгебра луп Бола определяется двумя операциями – бинарной (коммутатором) и тернарной (ассоциатором), причем эти операции связаны весьма сложными соотношениями.

Гладкие квазигруппы и разного рода нелиевы алгебры исследовали ученики А.И. Мальцева (Е. Кузьмин, Ф. Кердман и др.), также М. Акивис, Л. Сабинин, П. Михеев, М. Киккава, В. Галкин, математики прибалтийской школы Я. Лыхмус, Л. Соргсепп, Е. Паал, физики И. Баталин, А. Нестеров. В Прибалтике проводились конференции, посвященные применению квазигрупп и неассоциативных алгебр в физике (см. [6]).

Как уже было отмечено, каноническое разложение гладких луп Муфанг и Бола вполне определяется с помощью конечного числа постоянных: для первых – коммутатором, для вторых – коммутатором и ассоциатором. Позже были найдены другие классы гладких луп, обладающие аналогичным свойством конечности: операция в них вполне определяется инфинитезимальным объектом – соответствующей касательной алгеброй с конечным числом операций [7].

Согласно работе [1], каждому классу луп отвечает три-ткань с замкнутой G-структурой. Теория многомерных тканей, развитая в трудах В. Бляшке, Г. Бола, С. Черна, М. Акивиса, В. Гольдберга и их учеников, предоставляет наиболее эффективные методы исследования Ли-подобных объектов. Применение метода Картана, развитого в работах российских математиков, позволило существенно продвинуться в изучении общей теории и специальных классов тканей и гладких квазигрупп и луп, описать соответствующие инфинитезимальные объекты, провести классификацию и т. п. В частности, удалось понять, какие тождества определяют классы три-тканей (гладких луп) с замкнутой G-структурой.

2. Пусть $z = f(x, y)$ – гладкая функция, $x, y, z \in X^r$, X^r – гладкое многообразие размерности r. Тогда на $X^r \times X^r$ возникает три-ткань W, образованная слоениями $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$ и $z = f(x, y) = \mathrm{const}$. Бинарная операция $z = f(x, y) = x \cdot y$ называется координатной квазигруппой три-ткани и обозначается q. Обратно, если задана три-ткань, то уравнение, связывающее параметры слоев ткани, проходящих через одну точку, определяет соответствующую координатную квазигруппу.

Три-ткань рассматривается локально, с точностью до локальных диффеоморфизмов параметров на базах слоений: $x \to \alpha(x)$, $y \to \beta(y)$, $z \to \gamma(z)$. В теории квазигрупп тройка локальных диффеоморфизмов (α, β, γ) называется изотопическим преобразованием координатной квазигруппы q. Операция $\circ$:

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v),$$

где $u = R_b(x) = x \cdot b$ и $v = L_a(y) = a \cdot y$ – правый и левый сдвиги в квазигруппе q, есть изотоп квазигруппы q. Он является лупой с единицей $e = a \cdot b$, обозначается как $\ell(a, b)$, $(a, b) \in X^r \times X^r$, и называется координатной лупой три-ткани.

Таким образом, три-ткань можно считать геометрическим эквивалентом множества всех изотопных между собой координатных луп. Отсюда вытекает, что теория тканей с указанным отношением эквивалентности (изотопией) улавливает только те свойства луп, которые инвариантны относительно изотопии. Например, легко проверяется, что тождество коммутативности не инвариантно относительно изотопии луп, но тождество ассоциативности инвариантно. Тождества, инвариантные относительно изотопии, называются универсальными. Таковыми являются также тождества Бола и Муфанг. Но если во *всех* координатных лупах ткани выполняется тождество коммутативности, то (это доказывается просто) все эти лупы будут и ассоциативными, то есть будут абелевыми группами! Точно так же: если во всех координатных лупах ткани выполняется тождество левой альтернативности, то все они будут левыми лупами Бола, и т. д.

Например, координатная квазигруппа q ткани W изотопна группе тогда и только тогда, когда все координатные лупы этой ткани являются группами; q изотопна левой лупе Бола тогда и только тогда, когда все координатные лупы ткани являются левоальтернативными; q изотопна правой лупе Бола тогда и только тогда, когда все координатные лупы являются правоальтернативными; q изотопна лупе Муфанг тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы являются альтернативными.

Все перечисленные ткани обладают замкнутой G-структурой. С другой стороны, соответствующие им лупы с универсальными тождествами обладают свойством конечности. Чтобы это обнаружить, обратимся к структурным уравнениям ткани.

3. Следуя [8] (см. также [9, 10]), обозначим через $\underset{\alpha}{\omega}^i$, $\alpha = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \ldots, r$ линейные формы, которые аннулируются на соответствующих слоениях λ_α ткани W, заданной на многообразии X размерности r. На многообразии X система форм $\{\underset{1}{\omega}^i, \underset{1}{\omega}^i\}$ является независимой, а соотношения между формами $\underset{\alpha}{\omega}^i$ подходящей нормировкой можно привести к виду

$$\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i + \underset{3}{\omega}^i = 0. \tag{1}$$

Будем считать, что дифференциальные уравнения ткани всегда записываются в виде (1), тогда базисные формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ определены с точностью до преобразований $\underset{\alpha}{\tilde{\omega}}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j$, $\det A^i_j \neq 0$, не изменяющих вид уравнений (1).

Условие интегрируемости системы форм $\{\underset{1}{\omega}^i, \underset{1}{\omega}^i\}$ можно записать в виде

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k. \tag{2}$$

Дифференциальное продолжение уравнений (2) приводит к уравнениям

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jk\ell} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell \tag{3}$$

и

$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|\ell|k]} \underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{[jk]\ell} \underset{2}{\omega}^\ell,$$

причем выполняются соотношения $b^i_{[jk\ell]} = 2a^m_{[jk} a^i_{|m|\ell]}$. Величины $a = (a^i_{jk})$ и $b = (b^i_{jk\ell})$ образуют тензоры относительно группы $\mathbf{GL}(r)$ допустимых преобразований адаптированных реперов три-ткани W. Они называются соответственно тензором кручения и тензором кривизны три-ткани W. Тензорные поля кручения и кривизны однозначно определяют три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ [10].

Продолжение уравнений (3) приводит к уравнениям

$$\nabla b^i_{jk\ell} = c^i_{jkr+\ell m}\underset{1}{\omega}^m + c^i_{jkr+\ell r+m}\underset{2}{\omega}^m.$$

При этом величины $\underset{1}{c} = (c^i_{jkr+\ell m})$ и $\underset{2}{c} = (c^i_{jr+k\ell r+m})$ – ковариантные производные тензора кривизны – сами являются тензорами. Они принадлежат дифференциальной окрестности 4-го порядка и связаны с тензорами кривизны и кручения рядом соотношений. Продолжая последние уравнения, мы будем получать новые тензоры, связанные с дифференциальными окрестностями 5-го, 6-го порядков и т. д.

В терминах указанных тензорных полей характеризуются основные классы три-тканей с замкнутой G-структурой [1].

Параллелизуемые три-ткани (координатная квазигруппа изотопна абелевой группе Ли, все координатные лупы – абелевы группы Ли): $a = 0$ и $b = 0$. Это замкнутая G-структура класса 1.

Групповые три-ткани (координатная квазигруппа изотопна группе, все координатные лупы – группы Ли): $b = 0$.

Три-ткани Муфанг (координатная квазигруппа изотопна гладкой лупе Муфанг, все координатные лупы – гладкие альтернативные лупы): $b^i_{jk\ell} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]}$.

Ткани групповые и Муфанг – замкнутые G-структуры класса 2, поскольку полностью определяются полем тензора кручения $a = (a^i_{jk})$, принадлежащим дифференциальной окрестности второго порядка.

Левые и правые три-ткани Бола (координатная квазигруппа изотопна левой или правой гладкой лупе Бола, все координатные лупы – гладкие лево- или правоальтернативные лупы): $b^i_{(jk)\ell} = 0$ или $b^i_{(j|k|\ell)} = 0$. Это замкнутые G-структуры класса 3, поскольку ковариантные производные тензора кривизны выражаются через тензор кривизны и кручения.

Шестиугольные три-ткани (все координатные лупы – гладкие моноассоциативные лупы, то есть лупы с тождеством $x(xx) = (xx)x$): $b^i_{(jk\ell)} = 0$. Это замкнутые G-структуры класса 4, поскольку ковариантные производные второго порядка тензора кривизны можно выразить через тензоры кручения, кривизны и ковариантные производные первого порядка от тензора кривизны. Здесь доказательство замкнутости – весьма сложная теорема, потребовавшая тщательного исследования дифференциальной окрестности пятого порядка (см. [11]).

4. Возникает вопрос: какие тождества, более слабые, чем тождество моноассоциативности, также приводят к замкнутым G-структурам? Мы обобщаем тождество моноассоциативности, вводя понятие тождества порядка k с одной переменной [12]. Пусть $Q(\cdot)$ – локальная аналитическая лупа с операцией $(\cdot)$ и $S(u)$ – слово длины n от одной переменной u в Q. Разложим слово $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности единицы. Коэффициенты этого ряда выражаются через коэффициенты тейлоровского ряда функции $(\cdot)$. Назовем два слова $S_1(u)$ и $S_2(u)$ длины n от переменной u в лупе Q k-эквивалентными, если их тейлоровские разложения совпадают до членов порядка k включительно. Тождество $S_1(u) = S_2(u)$ в лупе Q назовем тождеством порядка k, если слова $S_1(u)$ и $S_2(u)$ k-эквивалентны. Например, тождество моноассоциативности есть тождества порядка 2. Тождества порядка 3 появляются при $n > 4$, например, $u^2(u^2u) = u((u^2u)u)$, $(u^2u)u^2 = (u(u^2u))u$. Тождества порядка 4 появляются при $n > 9$, например,

$$u(u^2(u^2(u(u(uu^2))))) = u^2(u(u(u(u^2(u^2u))))),$$

$$u(u^2(u((uu^2)(u(uu^2))))) = u^2(u(u(u^2((u(uu^2))u)))).$$

Классификация тождеств порядка k с одной переменной рассматривалась нами в [13, 14].

В [12] доказаны утверждения следующего типа.

Теорема 1. *Если в координатных лупах аналитической три-ткани W выполняются $k-1$ независимых тождеств порядка k, то определяемая этой тканью G-структура является замкнутой структурой класса не выше $2k$.*

Схема доказательства следующая. Тензор T, принадлежащий дифференциально-геометрическому объекту порядка s, мы называем замкнутым, если он выражается через компоненты объектов порядка, меньшего s. Справедливы утверждения такого типа.

Предложение 1. *У произвольной ткани альтернации тензора*

$$\underset{\alpha\beta}{T} \overset{\text{def}}{=} \left(c^i_{jj_1r+k_1j_2\ldots j_\alpha r+k_2\ldots r+k_\beta}\right)$$

по любой паре индексов из набора $j_1, j_2, \ldots, j_\alpha$ или по любой паре индексов из набора $k_1, k_2, \ldots, k_\beta$ являются замкнутыми.

Предложение 2. *У произвольной ткани тензоры вида*

$$-c^i_{jkr+\ell t_1\ldots t_u pr+qt_{u+1}\ldots t_s} + c^i_{jkr+\ell t_1\ldots t_u r+qpt_{u+1}\ldots t_s},$$

где индексы $t_1, t_2, \ldots, t_s$ могут принимать значения $j_1, j_2, \ldots, j_\alpha$, $r+k_1, \ldots, r+k_\beta$, являются замкнутыми.

Замкнутость альтернированных тензоров имеет определенный геометрический смысл, указанный в работе [12]. В то же время симметризованные части тензоров у произвольной ткани не являются, вообще говоря, замкнутыми. Оказывается, что их замкнутость ведет к замкнутости соответствующей G-структуры. В частности, так доказывается важное утверждение, о котором было сказано выше: *G-структура шестиугольной три-ткани W, заданной на многообразии размерности $2r$ при $r > 1$, является замкнутой G-структурой класса 4.* Для доказательства мы дважды ковариантно дифференцируем условие $b^i_{(jk\ell)} = 0$, характеризующее шестиугольные ткани, и показываем, что вторые ковариантные производные могут быть выражены через производные более низкого порядка.

Стремление обобщить этот факт естественно приводит к гипотезе о том, что обращение в нуль некоторых симметричных компонент дифференциально-геометрического объекта порядка p ткани W влечет замкнутость определяемой этой тканью G-структуры. Как было показано в [12], эта гипотеза имеет положительное решение в виде теоремы 1.

5. Связь между классом замкнутостью G-структуры три-ткани и конечностью канонического разложения [15] соответствующих луп устанавливается на основании следующего утверждения.

Теорема 2 [12]. *Пусть $\ell(a,b)$ – координатная лупа три-ткани W, заданной на аналитическом многообразии. Тогда значения основных тензоров типа $\binom{1}{s}$ этой ткани в точке (a,b) выражаются через коэффициенты порядка не выше s канонического разложения уравнений лупы $\ell(a,b)$. Обратно, коэффициенты порядка s канонического разложения лупы $\ell(a,b)$ являются комитантамии основных тензоров типа $\binom{1}{q}$, вычисленных в точке (a,b), причем $q < s$.*

Как следствие получается

Теорема 3. *G-структура три-ткани W, заданной на аналитическом многообразии, является замкнутой класса k тогда и только тогда, когда каноническое*

разложение любой координатной лупы этой ткани полностью определяется струей порядка k, то есть коэффициенты порядка выше k этого разложения являются комитантами от коэффициентов до порядка k включительно.

Summary

M.A. Akivis, A.M. Shelekhov. Closed G-Structures Defined by Three-Webs.

We introduce the notion of 1-digit identity of order k and prove the theorem: if in coordinate loops of analytic three-web W there hold $k-1$ independent identities of order k, G-structure defined by this web is a closed structure of class not higher than $2k$.

Key words: multidimensional three-web, closed G-structure, coordinate loop of a three-web, 1-digit identity of k-th order.

Литература

1. *Акивис М.А.* О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1975. – Т. 7. – С. 69–79.
2. *Santilli R.M.* Status of the mathematical and physical studies in the Lie-admissible formulations on July 1979 with particular references to the strong interactions // Hadronic J. – 1979. – No 2. – P. 1460–2018.
3. *Мальцев А.И.* Аналитические лупы // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, № 3. – С. 569–575.
4. *Holmes J.P.* Differentiable power associative groupoids // Pacif. J. Math. – 1972. – V. 42, No 2. – P. 391–394.
5. *Holmes J.P., Sagle A.A.* Analytic H-spaces, Campbell-Hausdorff formula, and alternative algebras // Pacific J. Math. – 1980. – V.91, No 1. – P. 105–134.
6. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике: Сб. ст. / Отв. ред. Я. Лыхмус, П. Кууск. – Тарту, 1990. – 235 с. (Труды Ин-та физики, Т. 66.)
7. *Шелехов А.М.* Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1989. – Т. 21. – С. 109–154.
8. *Акивис М.А.* О три-тканях многомерных поверхностей. // Труды геом. семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1969. – Т. 2. – С. 7–31.
9. *Akivis M., Shelekhov A.M.* Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1992. – XVII + 358 p.
10. *Акивис М.А., Шелехов А.М.* Многомерные три-ткани и их приложения. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2010. – 307 с.
11. *Shelekhov A.M.* The g-structure associated with a multidimensional hexagonal 3-web, is closed // J. Geom. – 1989. – V. 35, No 1–2. – P. 167–176.
12. *Шелехов А.М.* О дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. – Т. 19. – С. 101–154.
13. *Биллиг В.А., Шелехов А.М.* О классификации тождеств с одной переменной в гладкой локальной лупе // Ткани и квазигруппы. – Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1987. – С. 24–32.
14. *Биллиг В.А., Шелехов А.М.* Классификация тождеств длины 12 порядка 4 с одной переменной в локальной аналитической лупе // Ткани и квазигруппы. – Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1990. – С. 10–18.

15. *Акивис М.А.*: О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 188, № 5. – С. 967–970.

Поступила в редакцию
19.06.11

Акивис Макс Айзикович – доктор физико-математических наук, профессор.
E-mail: *m.akivis@gmail.com*

Шелехов Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор Тверского государственного университета.
E-mail: *amshelekhov@rambler.ru*