УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 2 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 274–291 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.95 doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.274-291

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ОТЫСКАНИЮ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ И ПРАВОЙ ЧАСТИ

К.Б. Сабитов[1,2], *А.Р. Зайнуллов*[1]

[1]*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак, 453103, Россия*

[2]*Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, г. Стерлитамак, 453103, Россия*

Аннотация

Для уравнения теплопроводности изучены обратные задачи по отысканию начального условия и правой части. Предварительно в явном виде построено решение начально-граничной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с указанием достаточных условий разрешимости задачи. На основании решения начально-граничной задачи установлен критерий единственности решения обратной задачи по определению начального условия. Обратная задача по нахождению сомножителя правой части, зависящей от времени, эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. На основе однозначной разрешимости этого уравнения в классе непрерывных функций получены теоремы однозначной разрешимости обратной задачи. Решение обратной задачи по нахождению сомножителя правой части, зависящего от пространственной координаты, построено в виде ряда Фурье по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи; установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, обратные задачи, спектральный метод, интегральное уравнение, единственность, существование, устойчивость

Введение

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$Lu \equiv u_t - a^2 u_{xx} = F(x,t) = f(x)g(t) \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$$

и следующие прямую и обратные задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \bigcap C_x^1(\overline{D}) \bigcap C_{x,t}^{2,1}(D); \tag{2}$$

$$Lu \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D; \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ и $F(x,t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

На основе этой прямой задачи для уравнения (1) поставим обратные задачи.

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$ и $\varphi(x)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5) и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \leqslant T, \tag{6}$$

где x_0 – заданная фиксированная точка отрезка $[0,l]$, t_0 и t_1 – заданные действительные числа, $F(x,t)$, $h(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Задача 3. Найти функции $g(t)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5) и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

где x_0 – заданная фиксированная точка отрезка $[0,l]$, $\varphi(x)$, $h(t)$ и $f(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(x_0) = h(0)$.

Задача 4. Найти функции $f(x)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(5), и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x,t_0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{8}$$

где t_0 – заданная фиксированная точка отрезка $(0,T]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(t)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что обратные задачи 2 и 3 исследованы в известных монографиях [1, с. 118–120, 123–126], [2, с. 248–252].

В случае задачи 2 доказана теорема единственности решения в двух точках $x_0 = 0$ и $x_0 = l/\pi$. При $x_0 = l/2$ показано, что эта задача имеет неединственное решение. Отсюда видно, что эти результаты не являются окончательными. Остается открытым вопрос: для каких точек $x_0 \in [0,l]$ имеет место теорема единственности решения задачи 2, а в каких точках x_0 этот результат нарушается. Такая задача и ставится в [2, с. 249]. В настоящей работе установлен критерий единственности решения задачи 2.

В указанных выше работах обратная задача 3 изучена при $\varphi(x) \equiv 0$ и доказана теорема единственности и существования решения, когда $f(x_0) \neq 0$. Приводится пример функции $f(x)$ и точки $x_0 = l/2$, при которых обратная задача 3 имеет неединственное решение. Этот пример показывает существенность условия $f(x_0) \neq 0$ теоремы. В настоящей работе этот результат усилен и установлены новые условия единственности и существования решения задачи 3 при условии, когда $f(x_0) = 0$.

Задача 4, где вместо дополнительного условия (8) взято условие (7), рассмотрена в работе [1, с. 126] при $g(t) \equiv 1$ и, когда $x_0 = 0$, аналогично задаче 2, доказана теорема единственности. В настоящей работе путем ведения нового дополнительного условия (8) получены новые теоремы единственности, существования и устойчивости решения этой задачи при $g(t) \equiv 1$ и $g(t) \not\equiv 1$. При $g(t) \not\equiv 1$ установлен критерий единственности решения задачи 4. В обоих случаях решение построено в явном виде, как сумма ряда Фурье.

1. Критерий единственности решения обратной задачи 2

Решение прямой задачи (2)–(5) может быть получено методом разделения переменных [3, с. 200] и оно имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t} \cos\mu_k x + \frac{1}{2}F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\cos\mu_k x, \tag{9}$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi) cos \mu_k \xi\, d\xi,\ F_k(t) = f_k \int\limits_0^t g(\tau) e^{-\mu_k^2 a^2 (t-\tau)}\, d\tau,$$
$$f_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\cos\mu_k\xi\, d\xi, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Следуя [3, с. 210], [4, с. 264], нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $f(x) \in C^1[0,l]$, $g(t) \in C[0,T]$ *и* $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$*, то существует единственное решение задачи* (2)–(5) *и оно определяется в виде суммы ряда* (9)*, где коэффициенты находятся по формулам* (10).

Рассмотрим обратную задачу (2)–(6), то есть задачу 2. Положим в формуле (9) $x = x_0$ и с учётом условия (6) получим уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(x)$:

$$\frac{1}{2}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t} \cos\mu_k x_0 =$$
$$= h(t) - \frac{1}{2}F_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)\cos\mu_k x_0 = h_0(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{11}$$

Теорема 2. *Если* $\cos\pi k\widetilde{x}_0 \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$*, где* $\widetilde{x}_0 = x_0/l$*, то решение интегрального уравнения* (11) *единственно в* $L_2[0,l]$.

Доказательство. Достаточно показать, что уравнение (11) имеет только нулевое решение при $h_0(t) = 0$. Пусть в (11) $h(t) = 0$ и $F(x,t) \equiv 0$, имеем

$$\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t} \cos\pi k\widetilde{x}_0 = 0. \tag{12}$$

Следуя [1, с. 119], в комплексной полуплоскости Re z$\geqslant \beta$, где постоянная $\beta \in (0, t_0)$, введем функцию комплексной переменной

$$\Phi(z) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 z} \cos\mu_k\widetilde{x}_0. \tag{13}$$

Поскольку при Re z$\geqslant \beta$ справедлива оценка $|\varphi_k \cos\pi k\widetilde{x}_0 e^{-\mu_k^2 a^2 z}| \leqslant Ce^{-\mu_k^2 a^2 \beta}$, где $C = \mathrm{const} > 0$, то в этой полуплоскости ряд, стоящий в правой части соотношения (13), сходится равномерно. Тогда функция $\Phi(z)$ является аналитической при Re z$\geqslant \beta$. В силу (12) функция $\Phi(z) = 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$ действительной оси t из области аналитичности $\Phi(z)$. Отсюда в силу теоремы единственности для аналитических функций следует, что $\Phi(z) \equiv 0$ при Re z$\geqslant \beta$. Поэтому равенство (12) выполнено при всех $t \geqslant t_0$. Перейдя здесь к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$\varphi_0 = 0. \tag{14}$$

В силу (14) равенство (12) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t} \cos\pi k\widetilde{x}_0 = 0. \tag{15}$$

Умножив равенство (15) на $e^{(\mu_1 a)^2 t}$ и в полученном равенстве перейдя к пределу при $t \to +\infty$, найдем $\varphi_1 \cos \pi \widetilde{x}_0 = 0$. Последовательно повторяя аналогичные действия, получим $\varphi_k \cos \pi k \widetilde{x}_0 = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, поскольку $\cos \pi k \widetilde{x}_0 \neq 0$ при всех k, следует, что

$$\varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Из равенств (14) и (16), в силу полноты системы функций $\{\cos \mu_n x\}_{k \geqslant 0}$ в пространстве $L_2[0, l]$, следует, что $\varphi(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$. Теорема доказана. □

Тогда из теорем 2 и 1 следует единственность решения обратной задачи 2.

Пусть при некоторых $\widetilde{x}_0$ и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие теоремы 2, то есть

$$\cos \pi p \widetilde{x}_0 = 0. \tag{17}$$

Тогда обратная задача (2)–(6) при $h(t) = 0$ и $F(x, t) \equiv 0$ имеет ненулевое решение

$$u_p(x, t) = \cos \mu_p x e^{-(\mu_p a)^2 t}, \quad \varphi_p(x) = u_p(x, 0) = \cos \mu_p x. \tag{18}$$

Из уравнения (17) найдем значения

$$\widetilde{x}_0 = \frac{x_0}{l} = \frac{1 + 2n}{2p} = \frac{n}{p} + \frac{1}{2p}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad n < p, \tag{19}$$

при которых нарушается условие теоремы 2, то есть нарушается единственность решения задачи 2.

Следовательно, установлен следующий критерий единственности решения обратной задачи (2)–(6).

Теорема 3. *Условие* $\cos \pi k \widetilde{x}_0 \neq 0$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *необходимо и достаточно для единственности решения обратной задачи* (2)–(6).

Из (19) следует, что, когда $\widetilde{x}_0$ принимает рациональные значения вида $\dfrac{n}{p} + \dfrac{1}{2p}$, $n < p$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$, нарушается единственность решения обратной задачи. При остальных значениях $\widetilde{x}_0$ из $[0, 1]$, например, когда $\widetilde{x}_0$ принимает иррациональные значения, условие теоремы 3 выполнено при всех $k \in \mathbb{N}$, следовательно, для таких $\widetilde{x}_0$ обратная задача может иметь не более одного решения.

Отметим, что результат теоремы 3 нетрудно перенести для параболических уравнений, содержащих в себе оператор Штурма – Лиувилля, то есть решение обратной задачи 2 для такого уравнения единственно тогда только тогда, когда точка x_0 не является нулем ни одной собственной функции соответствующей одномерной спектральной задачи.

2. Задача 3

При условии существования функции $g(t)$ решение задачи (2)–(5) определяется формулой (9). Положим в этой формуле $x = x_0$ и, поменяв местами операции интегрирования и суммирования, получим для искомой функции $g(t)$ интегральное уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int\limits_0^t K(t, \tau) g(\tau)\, d\tau = \widetilde{h}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{20}$$

с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{f_0}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-(\mu_n a)^2 (t - \tau)} \cos \mu_n x_0 \tag{21}$$

и правой частью

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \frac{1}{2}\varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t} \cos \mu_k x_0.$$

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3[0,l]$, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$, $f(x) \in C^3[0,l]$, $f'(0) = f'(l) = 0$, $h(t) \in C^1[0,T]$, $h(0) = \varphi(x_0)$. *Тогда, если* $f(x_0) \neq 0$, *уравнение* (20) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Прежде всего найдем скорость убывания коэффициентов f_n при $n \to \infty$. Проинтегрировав по частям три раза интеграл формулы (10), получим

$$f_n = \frac{1}{\mu_n^3} \frac{2}{l} \int\limits_0^l f'''(\xi) \sin \mu_n \xi \, d\xi = \frac{f_n^{(3)}}{\mu_n^3}, \tag{22}$$

причем в силу неравенства Бесселя ряд из квадратов $\left|f_n^{(3)}\right|^2$ сходится, а значит, $f_n^{(3)} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда будем иметь $|f_n| \leqslant \varepsilon_n/\mu_n^3$, где $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому ряд (21) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по t при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Тогда функция $K_t'(t,\tau)$ непрерывна на указанном множестве. Дифференцируя уравнение (20) по t, имеем

$$K(t,t)g(t) + \int\limits_0^t K_t'(t,\tau) g(\tau)\, d\tau = \widetilde{h}'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{23}$$

Положив в (21) $\tau = t$, получим

$$K(t,t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \mu_n x_0. \tag{24}$$

Правая часть равенства (24) представляет собой разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе $\cos \mu_n x$ в точке $x = x_0$. По условию $K(t,t) = f(x_0) \neq 0$. Поэтому уравнение (23) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, следовательно, уравнение (20) имеет единственное решение $g(t) \in C[0,T]$. Теорема доказана. $\square$

Теперь покажем, что условие

$$f(x_0) \neq 0 \tag{25}$$

является существенным для единственности решения обратной задачи. Пусть для некоторых $n = m$ и $\widetilde{x}_0 \in [0,1]$ выражение $\cos \pi m \widetilde{x}_0 = 0$. Тогда существует функция $f(x) = \cos \mu_m x$ такая, что $f(x_0) = \cos \mu_m x_0 = 0$. Для такой функции при любой функции $g(t) \in C[0,T]$ существует ненулевое решение обратной задачи 3 (где $\varphi(x) \equiv 0$, $h(t) \equiv 0$)

$$u(x,t) = \cos \mu_m x \int\limits_0^t g(s) e^{-\mu_m^2 a^2 (t-s)}\, ds. \tag{26}$$

Как видим, в этом примере нарушается условие (25) теоремы 4.

Возникает вопрос: если $f(x_0) = 0$, то существует ли единственное решение обратной задачи (2–(5), (7)?

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(x) \in C^5[0,l]$, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(l) = 0$, $f(x) \in C^5[0,l]$, $f'(0) = f'(l) = 0$, $f'''(0) = f'''(l) = 0$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h'(0) = a^2\varphi''(x_0)$. *Тогда, если* $f(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, *уравнение* (20) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4 имеем

$$f_n = \frac{f_n^{(3)}}{\mu_n^3} = -\frac{1}{\mu_n^5}\frac{2}{l}\int\limits_0^l f^{(5)}(\xi)\sin\mu_n\xi\,d\xi = -\frac{f_n^{(5)}}{\mu_n^5}.$$

Отсюда

$$|f_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\mu_n^5}. \tag{27}$$

В силу оценки (27) ряд (21) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по t дважды при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, поэтому функция $K_t''(t,\tau)$ непрерывна на указанном множестве.

Из условия $f(x_0) = 0$ следует, что $K(t,t) = 0$, тогда уравнение (23) примет вид

$$\int\limits_0^t K_t(t,\tau)g(\tau)\,d\tau = \widetilde{h}'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{28}$$

Продифференцировав уравнение (28) по t, получим

$$K_t'(t,t)g(t) + \int\limits_0^t K_t''(t,\tau)g(\tau)\,d\tau = \widetilde{h}''(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{29}$$

где

$$K_t'(t,t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi(\mu_n a)^2\cos\mu_n x_0. \tag{30}$$

Проинтегрируем два раза по частям интегралы в ряде (30), тогда

$$\begin{aligned} K_t'(t,t) &= a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^l f''(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi\cos\mu_n x_0 = \\ &= \frac{a^2}{l}\int\limits_0^l f''(\xi)\,d\xi + \frac{2a^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^l f''(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi\cos\mu_n x_0 = a^2 f''(x_0). \end{aligned} \tag{31}$$

Продифференцировав ряд (23) дважды по t, найдем

$$K_t''(t,\tau) = -a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mu_n^2}{l}\int\limits_0^l f''(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi e^{-(\mu_n a)^2(t-\tau)}\cos\mu_n x_0. \tag{32}$$

Теперь проинтегрировав по частям два раза интегралы в ряде (32) и положив $\tau = t$, имеем

$$K_t''(t,t) = \frac{a^4}{l}\int\limits_0^l f^{(4)}(\xi)\,d\xi + a^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int\limits_0^l f^{(4)}(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi\cos\mu_n x_0 = a^4 f^{(4)}(x_0). \tag{33}$$

Ряды (32) и (33) сходятся равномерно при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ в силу оценки (27).

Правая часть равенства (31) представляет собой разложение в ряд Фурье по системе $\cos \mu_n x$ функции $a^2 f''(x)$ в точке $x = x_0$. Следовательно, $K'_t(t,t) = a^2 f''(x_0) \neq 0$. Уравнение (29) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, а значит, оно имеет единственное решение $g(t)$ в классе непрерывных на $[0,T]$ функций. Теорема доказана. □

На основании доказанных выше теорем можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi(x) \in C^{2k+3}[0,l]$, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(l) = 0, \ldots$, $\varphi^{(2k+1)}(0) = \varphi^{(2k+1)}(l) = 0$, $f(x) \in C^{2k+3}[0,l]$, $f'(0) = f'(l) = 0$, $f'''(0) = f'''(l) = 0, \ldots, f^{(2k+1)}(0) = f^{(2k+1)}(l) = 0$, $h(t) \in C^{k+1}[0,T]$, $h^{(k)}(0) = a^{2k}\varphi^{(2k)}(x_0)$, $k \in \mathbb{N}_0$. *Тогда, если* $f(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{2k-2}(x_0) = 0$, $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$, *уравнение* (20) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Аналогично доказанным выше теоремам найдем представления для коэффициентов

$$f_n = \frac{f_n^{(3)}}{\mu_n^3} = -\frac{f_n^{(5)}}{\mu_n^5} = \cdots = (-1)^{k-1}\frac{f_n^{(2k+1)}}{\mu_n^{2k+1}} = \\ = \frac{(-1)^k 2}{l\mu_n^{2k+3}} \int_0^l f^{(2k+3)}(\xi) \sin \mu_n \xi \, d\xi = (-1)^k \frac{f_n^{(2k+3)}}{\mu_n^{2k+3}}.$$

Отсюда получим оценку

$$|f_n| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\mu_n^{2k+3}}.$$

В силу этой оценки ядро $K(t,\tau)$ уравнения (20) имеет непрерывную производную $K_t^{(k+1)}(t,\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Продифференцировав $k+1$ раз уравнение (20) по t, с учетом условий $f(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2k-2)}(x_0) = 0$, имеем

$$K_t^{(k)}(t,t)g(t) + \int_0^l K_t^{(k+1)}(t,\tau)g(\tau)\,d\tau = h^{(k+1)}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{34}$$

где

$$K_t^{(k)}(t,t) = -a^{2k}\mu_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f^{(2k-2)}(\xi) \cos \mu_n \xi \, d\xi \cos \mu_n x_0.$$

Проинтегрировав в последнем интеграле по частям дважды, получим

$$K_t^{(k)}(t,t) = a^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l f^{(2k)}(\xi) \cos \mu_n \xi \, d\xi \cos \mu_n x_0 = \frac{a^{2k}}{l} \int_0^l f^{(2k)}(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{2a^{2k}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l f^{(2k)}(\xi) \cos \mu_n \xi \, d\xi \cos \mu_n x_0 = a^{2k} f^{(2k)}(x_0). \tag{35}$$

Правая часть равенства (35) представляет собой разложение в ряд Фурье функции $a^{2k} f^{(2k)}(x)$ в точке $x = x_0$. По условию $K_t^{(k)}(t,t) = a^{2k} f^{(2k)}(x_0) \neq 0$. Таким образом, уравнение (34) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода такого же типа, что и уравнения (23) и (29), а значит, оно имеет единственное решение в классе функций $C[0,T]$. Теорема доказана. □

Замечание 1. Отметим, что задача 3 для общих параболических уравнений с правой частью $F(x,t) = h(x,t)f(t)$ исследована в работах [6–8]. Найдены достаточные условия относительно коэффициентов, при которых такая задача имеет единственное решение. При этом не исследованы вопросы о существенности достаточного условия

$$|h(x_0,t)| \geq h_0 = \mathrm{const} > 0$$

на функцию $h(x,t)$ при неизвестной функции $f(t)$ и корректность задачи в зависимости от выбора точки x_0 из $[0,l]$. В отличие от этих работ в настоящей статье решение задачи 3 для уравнения теплопроводности построено в явном виде и найдены достаточные условия, которые близки к необходимым, при которых задача 3 имеет единственное решение.

3. Задача 4 при $g(t) \equiv 1$

Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ – решение задачи (2)–(5), (8). Следуя работам [9, 10] рассмотрим интегралы

$$u_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx, \tag{36}$$

$$f_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\mu_k x\,dx, \tag{37}$$

где $\mu_k = \pi k/l,\ k \in \mathbb{N}_0$.

На основании (36) введем вспомогательную функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)\cos\mu_k x\,dx, \tag{38}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Продифференцировав равенство (38) один раз по t и учитывая уравнение (3), получим

$$u'_{k,\varepsilon}(t) = \frac{2}{l}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_t(x,t)\cos\mu_k x\,dx = \frac{2}{l}a^2\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}(x,t)\cos\mu_k x\,dx + f_k. \tag{39}$$

Проинтегрируем дважды по частям интеграл в правой части равенства (39) и, перейдя в полученном равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (4), заключаем, что $u_k(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$u'_k(t) + (\mu_k a)^2 u_k(t) = f_k. \tag{40}$$

Общее решение уравнения (40) определяется по формуле

$$u_k(t) = \frac{f_k}{(a\mu_k)^2} + C_k e^{-(a\mu_k)^2 t}, \tag{41}$$

где C_k – произвольные постоянные.

Для нахождения коэффициентов C_k и f_k воспользуемся граничными условиями (5), (8) и формулой (38):

$$u_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\cos\mu_k x\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\mu_k x\,dx = \varphi_k, \tag{42}$$

$$u_k(t_0) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t_0)\cos\mu_k x\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\mu_k x\,dx = \psi_k. \tag{43}$$

Теперь, удовлетворив (41) граничным условиям (42) и (43), относительно f_k и C_k получим

$$\begin{cases} \dfrac{f_k}{\mu_k^2} + C_k = \varphi_k, \\[2ex] \dfrac{f_k}{\mu_k^2} + C_k e^{-\mu_k^2 t_0} = \psi_k. \end{cases} \tag{44}$$

Решение системы (44) есть

$$C_k = \frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - e^{-\mu_k^2 t_0}}, \tag{45}$$

$$f_k = \mu_k^2\varphi_k - \mu_k^2\frac{\varphi_k - \psi_k}{1 - e^{-\mu_k^2 t_0}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Подставив (45), (46) в (41), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \varphi_k + \frac{(\psi_k - \varphi_k)(1 - e^{-\mu_k^2 t})}{1 - e^{-\mu_k^2 t_0}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

Перейдя к пределу в (46) и (47) при $\mu_k \to 0$, найдем

$$f_0 = \frac{\psi_0 - \varphi_0}{t_0}, \tag{48}$$

$$u_0(t) = \frac{\psi_0 - \varphi_0}{t_0}t + \varphi_0. \tag{49}$$

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$. Тогда $\varphi_k = \psi_k = 0$ и из (46)–(49) следует, что $u_k(t) \equiv 0$ на сегменте $[0,T]$ и $f_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$. Отсюда в силу (36) и (37) имеем

$$\int_0^l u(x,t)\cos\mu_k x\,dx = 0, \quad \int_0^l f(x)\cos\mu_k x\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

В силу полноты системы $\{\cos\mu_k x\}_{k=0}^{+\infty}$ в пространстве $L_2[0,l]$ из последних равенств следует, что $u(x,t) = 0$ и $f(x) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку в силу (2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно на $\overline{D}$ и $(0,l)$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$ и $f(x) \equiv 0$ на $[0,l]$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *Если существует решение задачи* (2)–(5), (8)*, то оно единственно.*

Далее покажем, что при определенных условиях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ функции

$$u(x,t) = \frac{1}{2}u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cos\mu_k x, \tag{50}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k\cos\mu_k x \tag{51}$$

удовлетворяют условию (2), где $u_k(t)$ и f_k определяются формулами (46)–(49).

Лемма 1. *При любых* $k \in \mathbb{N}_0$ *и* $t \in [0,T]$ *справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \leqslant K_1(|\varphi_k| + |\psi_k|); \quad |f_k| \leqslant \begin{cases} K_2 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), & k \in \mathbb{N}, \\ K_2(|\varphi_0| + |\psi_0|), & k = 0; \end{cases}$$

$$|u_k'(t)| \leqslant K_3 k^2(|\varphi_k| + |\psi_k|), \quad k \in \mathbb{N},$$

где K_i *– здесь и далее положительные постоянные, не зависящие от* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Справедливость данных оценок непосредственно следует из формул (46)–(49).

Лемма 2. *Если функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,l]$, $\varphi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0$, *то справедливы равенства*

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad \psi_k = \frac{\psi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \tag{52}$$

где φ_k, ψ_k *– коэффициенты разложения* $\varphi^{(3)}(x)$ *и* $\psi^{(3)}(x)$ *в ряд Фурье по системе функций* $\{\sin\mu_k x\}_{k=1}^{+\infty}$, *при этом справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k^{(3)})^2 \leqslant \frac{2}{l}\|\varphi^{(3)}\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^{(3)})^2 \leqslant \frac{2}{l}\|\psi^{(3)}\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{53}$$

Формально из (50) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(-\mu_k)^2 u_k(t)\cos\mu_k x, \tag{54}$$

$$u_t(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\cos\mu_k x. \tag{55}$$

Ряды (50), (51), (54) и (55) при любом $(x,t) \in \overline{D}$ в силу лемм 1 и 2 мажорируются сходящимся числовым рядом

$$K_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}|\right). \tag{56}$$

Тогда ряды (50), (51), (54) и (55) сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{D}$. Следовательно, функции $u(x,t)$ и $f(x)$, определенные рядами (50) и (51), удовлетворяют условию (2).

Таким образом, доказана

Теорема 8. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2, *то существует единственное решение задачи* (2)–(5), (8) *и оно определяется рядами* (50) *и* (51).

Теорема 9. *Для решения* (50) *и* (51) *задачи* (2)–(5), (8) *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant K_5 \left(\|\varphi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]}\right), \tag{57}$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,l]} \leqslant K_6 \left(\|\varphi\|_{W_2^2[0,l]} + \|\psi\|_{W_2^2[0,l]}\right), \tag{58}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant K_7 \left(\|\varphi\|_{C^1[0,l]} + \|\psi\|_{C^1[0,l]}\right), \tag{59}$$

$$\|f(x)\|_{C_2[0,l]} \leqslant K_8 \left(\|\varphi\|_{C^3[0,l]} + \|\psi\|_{C^3[0,l]}\right). \tag{60}$$

Доказательство. Поскольку система $X_k(x)$ ортогональна в $L_2[0,l]$, из формулы (50) на основании леммы 1 получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \frac{l}{4}u_0^2(t) + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leqslant 2K_1^2\left(\frac{l}{4}(\varphi_0^2+\psi_0^2) + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\varphi_k^2+\psi_k^2)\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2K_1^2\left(\frac{l}{4}\varphi_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k^2 + \frac{l}{4}\psi_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k^2\right) \leqslant K_5^2\left(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]}\right).$$

Отсюда следует справедливость оценки (57). Аналогично из формулы (51) получим

$$\|f(x)\|^2_{L_2[0,l]} = \frac{l}{4}f_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} f_k^2 \leqslant 2K_2^2\left(\frac{l}{4}(\varphi_0^2+\psi_0^2) + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}K^4(\varphi_k^2+\psi_k^2)\right). \tag{61}$$

По условию φ_k и ψ_k можно представить в следующем виде:

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(2)}}{\mu_k^2},\ \psi_k = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \tag{62}$$

где

$$\varphi_k^{(2)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi''(x)\cos\mu_k x\,dx,\ \psi_k^{(2)} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''(x)\cos\mu_k x\,dx.$$

Заметим, что

$$\varphi_0^2 \leqslant \frac{4}{l}\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \psi_0^2 \leqslant \frac{4}{l}\|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{63}$$

Тогда с учетом (62) и (63) из оценки (61) имеем

$$\|f(x)\|^2_{L_2[0,l]} \leqslant 2K_2^2\left(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\varphi_k^{(2)} + \psi_k^{(2)}\right)\right) =$$
$$= 2K_2^2\left(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]} + \left(\frac{l}{4}\right)^4\left(\frac{l}{4}\left(\varphi_0^{(2)} + \psi_0^{(2)}\right) + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\varphi_k^{(2)} + \psi_k^{(2)}\right)\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_6^2\left(\|\varphi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi\|^2_{L_2[0,l]} + \|\varphi''\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi''\|^2_{L_2[0,l]}\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_6^2\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2[0,l]} + \|\psi\|^2_{W_2^2[0,l]}\right). \tag{64}$$

Из оценки (64) непосредственно следует оценка (58).

Пусть (x,t) – произвольная точка $\overline{D}$. Тогда на основании леммы 1 имеем

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}|u_0(t)| + \sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)| \leqslant K_1\left(\frac{1}{2}(|\varphi_0| + |\psi_0|) + \sum_{k=1}^{+\infty}(|\varphi_k| + |\psi_k|)\right). \qquad (65)$$

Поскольку

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \psi_k = -\frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k}, \qquad (66)$$

где

$$\varphi_k^{(1)} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi'(x)\sin\mu_k x\,dx, \quad \psi_k^{(1)} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi'(x)\sin\mu_k x\,dx,$$

то из соотношений (63), (66) и (65) будем иметь

$$|u(x,t)| \leqslant K_1\left(\sqrt{\frac{1}{l}}\left(\|\varphi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(1)}| + |\psi_k^{(1)}|\right)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_1\left(\sqrt{\frac{1}{l}}\left(\|\varphi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \frac{l}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\right)^{1/2} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right)\right)\right) =$$

$$= K_1\left(\sqrt{\frac{1}{l}}\left(\|\varphi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \frac{l}{\pi}\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\|\varphi^{(1)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi^{(1)}(x)\|_{L_2[0,l]}\right)\right)\right).$$

Отсюда с учетом неравенств:

$$\|\varphi\|_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}\|\varphi\|_{C[0,l]}, \quad \|\psi\|_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}\|\psi\|_{C[0,l]},$$

$$\|\varphi'\|_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}\|\varphi'\|_{C[0,l]}, \quad \|\psi'\|_{L_2[0,l]} \leqslant \sqrt{l}\|\psi'\|_{C[0,l]},$$

получим

$$|u(x,t)| \leqslant K_7\left(\|\varphi\|_{C[0,l]} + \|\varphi'\|_{C[0,l]} + \|\psi\|_{C[0,l]} + \|\psi'\|_{C[0,l]}\right) = K_7\left(\|\varphi\|_{C^1[0,l]} + \|\psi\|_{C^1[0,l]}\right),$$

из которой уже следует (59).

Аналогично из формулы (51) на основании леммы 1, имеем

$$|f(x)| = \frac{1}{2}|f_0| + \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k| \leqslant K_2\left(\frac{1}{2}(|\varphi_0| + |\psi_0|) + \sum_{k=1}^{+\infty}K^2(|\varphi_k| + |\psi_k|)\right).$$

Из последнего соотношения с учетом (63) и (52), получим

$$|f(x)| \leqslant K_2\left(\sqrt{\frac{1}{l}}\left(\|\varphi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(3)}| + |\psi_k^{(3)}|\right)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_2\left(\|\varphi\|_{C[0,l]} + \|\psi\|_{C[0,l]} + \left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\|\varphi_k^{(3)}\|_{L_2[0,l]} + \|\psi_k^{(3)}\|_{L_2[0,l]}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_8\left(\|\varphi\|_{C[0,l]} + \|\psi\|_{C[0,l]} + \|\varphi^{(3)}\|_{C[0,l]} + \|\psi^{(3)}\|_{C[0,l]}\right) \leqslant$$

$$\leqslant K_8\left(\|\varphi\|_{C^3[0,l]} + \|\psi\|_{C^3[0,l]}\right). \qquad (67)$$

Из (67) следует справедливость оценки (60). Теорема доказана. □

4. Задача 4 при $g(t) \not\equiv 1$

Рассуждая аналогично п. 4, введем функцию (36) и для нее получим уравнение

$$u_k'(t) + (\mu_k a)^2 u_k(t) = f_k g(t). \tag{68}$$

Общее решение уравнения (68) при $k \in \mathbb{N}_0$ определяется по формуле

$$u_k(t) = C_k e^{-(\mu_k a)^2 t} + f_k g_k(t), \tag{69}$$

где

$$g_k(t) = \int\limits_0^t g(s) e^{-(\mu_k a)^2 (t-s)}\, ds. \tag{70}$$

Удовлетворив (69) граничным условиям (42) и (43), найдем неизвестные постоянные C_k и f_k:

$$C_k = \varphi_k,\ f_k = \frac{1}{g_k(t_0)} \left[\psi_k - \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t_0}\right] \tag{71}$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$g_k(t_0) \neq 0. \tag{72}$$

Подставив (71) в (68), построим в явном виде функции

$$u_k(t) = \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t} + \frac{g_k(t)}{g_k(t_0)} \left[\psi_k - \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t}\right]. \tag{73}$$

Аналогично п. 4, исходя из равенств (73), (36) и (37), на основании полноты системы $\{\cos \mu_k x\}_{k \geqslant 0}$ можно доказать единственность решения обратной задачи 3 при произвольной непрерывной функции $g(t)$ и выполнении условий (72) при всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Если при некоторых t_0 и $k = p$ выражение $g_p(t_0) = 0$, то однородная задача 3 (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = f_p g_p(t) \cos \mu_p x, \quad f(x) = f_p \cos \mu_p x,$$

здесь $f_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

Теперь возникает вопрос о существовании нулей $g_k(t_0)$. Если функция $g(t)$ знакопостоянная на $[0, t_0]$, то $g_k(t_0) \neq 0$ при $k \in \mathbb{N}$; если же функция на $[0, t_0]$ меняет знак, то есть имеет нули, например, $g(t) = \sin(at + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, то $g_k(t_0)$ будет иметь нули.

Следовательно, нами установлен критерий единственности решения задачи 3.

Теорема 10. *Если существует решение задачи* 4, *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}_0$ *выполнены условия* (72).

Лемма 3. *Если* $g(t)$ *непрерывна на* $[0, T]$ *и* $|g(t)| \geqslant m = \text{const} > 0$, *то существуют постоянные* C_0, $C_1 > 0$ *такие, что при всех* $k \in N$

$$\frac{C_0}{k^2} \leqslant |g_k(t_0)| \leqslant \frac{C_1}{k^2}. \tag{74}$$

Доказательство. На основании теоремы о среднем из (72) имеем

$$g_k(t_0) = g(\xi) \int\limits_0^{t_0} e^{-(\mu_k a)^2(t_0-s)}\, ds = g(\xi)\, \frac{1-e^{-(\mu_k a)^2 t_0}}{(\mu_k a)^2}, \quad \xi \in [0, t_0].$$

Отсюда получим оценку снизу и сверху

$$\left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 m(1-e^{-(\mu_1 a)^2 t_0})k^{-2} \leqslant |g_k(t_0)| \leqslant \frac{\max\limits_{0\leqslant\xi\leqslant t_0} |g_k(t_0)| l^2}{\pi^2 k^2},$$

из которой уже следует (74). Лемма доказана. □

Решение в этом случае строится в виде рядов (50) и (51), где коэффициенты $u_k(t)$ и f_k определяются формулами (73) и (71).

Теорема 11. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 2, *а функция* $g(t)$ *– условиям леммы* 3, *то существует единственное решение задачи* 4, *которое определяется рядами* (50) *и* (51), *коэффициенты которых находятся по формулам* (73) *и* (71).

Отметим, что для решения (50) и (51) задачи 4 при $g(t) \not\equiv 1$ справедливы оценки (57)–(60), установленные в теореме 9, но только с другими постоянными K_i, $i = 5, \ldots, 8$.

Замечание 2. В работах [11–14] изучена задача 4 для общих уравнений параболического типа и операторных уравнений. В работах [13, 14] установлены критерии единственности решения задачи 4. Здесь в отличии от указанных работ достаточно просто в едином стиле с задачами 2 и 3 доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения задачи 4. Причем решение задачи построено в явном виде.

Замечание 3. К решению задачи 4 можно было подойти иначе. Удовлетворяя функцию (9) граничному условию (8), относительно неизвестной функции $f(x)$ получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int\limits_0^l f(\xi)K(x,\xi)\, d\xi = \widetilde{\psi}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{75}$$

где

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2} g_0(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t_0) X_k(x) X_k(\xi), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}\varphi_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t_0} X_k(x).$$

Ядро $K(x,\xi)$ интегрального уравнения (75) в силу оценки (74) по крайней мере непрерывно в замкнутом квадрате $0 \leqslant x, \xi \leqslant l$, правая часть, то есть функция $\widetilde{\psi}(x)$, достаточно гладкая на $[0, l]$. Как известно, интегральные уравнения Фредгольма первого рода трудно разрешимы и они относятся к классу некорректных задач [15, с. 15–17].

В данном случае в силу доказанной теоремы 11 о существовании и единственности решения задачи 4 и эквивалентности задачи 4 к интегральному уравнению (75) следует, что интегральное уравнение (75) имеет единственное решение, которое определяется по формуле

$$f(x) = \frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \tag{76}$$

где f_k определяются по формуле (71). Действительно, подставив (76) в левую часть интегрального уравнения (75), получим

$$\frac{1}{2} g_0(t_0) \int_0^l f(\xi)\, d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l f(\xi) X_k(\xi)\, d\xi g_k(t_0) X_k(x) =$$

$$= g_0(t_0) \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k g(t_0) X_k(x) =$$

$$= \frac{(\psi_0 - \varphi_0) g_0(t_0)}{2 g_0(t_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(t_0)}{g_k(t_0)} \left[\psi_k - \varphi_k e^{-(\mu_k a)^2 t_0} \right] X_k(x) =$$

$$= \psi(x) - \frac{1}{2} \varphi_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k e^{-\mu_k^2 a^2 t_0} X_k(x) = \widetilde{\psi}(x),$$

то есть получили правую часть уравнения (75).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ-Поволжье (проект № 14-01-97003), РФФИ-РБ (проект № 17-41-020516).

Литература

1. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. – М.: Изд–во МГУ, 1994. – 208 с.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. – 457 с.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.Н.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит. 1966. – 724 с.
4. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.
6. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа. I // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 10. – С. 1791–1799.
7. *Соловьев В.В.* Определение источников и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 5. – С. 1060–1069.
8. *Соловьев В.В.* Существование решения в «целом» обратной задачи определения источника в квазилинейном уравнении параболического типа // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 4. – С. 536–544.
9. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 451–454.
10. *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87. № 6. – С. 907–918.

11. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сб. – 1992. – Т. 184, № 4. – С. 49–68.

12. *Костин А.Б.* Разрешимость одной проблемы моментов и ее связь с параболической обратной задачей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1995. – № 1. – С. 28–33.

13. *Орловский Д.Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 1614–1621.

14. *Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.* Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, № 2. – С. 273–290.

15. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

Поступила в редакцию
27.10.17

Сабитов Камиль Басирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа; заведующий лабораторией прикладной математики и информатики

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
пр-т Ленина, д. 49, г. Стерлитамак, 453103, Россия

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан
ул. Одесская, д. 68, г. Стерлитамак, 453103, Россия

E-mail: *sabitov_fmf@mail.ru*

Зайнуллов Артур Рашитович, аспирант кафедры математического анализа

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета
пр-т Ленина, д. 49, г. Стерлитамак, 453103, Россия

E-mail: *arturzayn@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 2, pp. 274–291

doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.274-291

On the Theory of the Known Inverse Problems for the Heat Transfer Equation

K.B. Sabitov[a,b*], *A.R. Zaynullov*[a**]

[a] *Sterlitamak Branch, Bashkir State University, Sterlitamak, 453103 Russia*
[b] *Sterlitamak Branch, Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, Sterlitamak, 453103 Russia*
E-mail: * *sabitov_fmf@mail.ru*, ** *arturzayn@mail.ru*

Received October 27, 2017

Abstract

The inverse problems for finding the initial condition and the right-hand side were studied for the heat transfer equation. A solution of the initial boundary value problem for the inhomogeneous heat transfer equation with sufficient conditions for the solvability of the problem was constructed in the first place. On the basis of the solution of the initial boundary value problem, a criterion for the uniqueness of the solution of the inverse problem to determine the initial condition was established. The study of the inverse problem of finding the right-hand side of the component, which depends on time, is equivalent to reducing to the unique solvability of the Volterra integral equation of the second kind. In view of the unique solvability of the given integral equation in the class of continuous functions, we obtained theorems for the unique solvability of the inverse problem. The solution of the inverse problem to determine the factor of the right-hand side, depending on the spatial coordinate, was constructed as a sum of the series in the system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem; the criterion of uniqueness was established, and the existence and stability theorems of the solution of the problem were proved.

Keywords: heat transfer equation, inverse problems, spectral method, integral equation, uniqueness, existence, stability

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research-Volga Region (project no. 14-01-97003), Russian Foundation for Basic Research-Republic of Bashkortostan (project no. 17-41-020516).

References

1. Denisov A.M. *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to Inverse Problems Theory]. Moscow, Izd. MGU, 1994. 208 p. (In Russian)
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Sib. Nauchn. Izd., 2009. 457 p.(In Russian)
3. Tikhonov A.N. Samaraskii A.N. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 1966. 724 p. (In Russian)

4. Sabitov K.B. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013. 352 p. (In Russian)

5. Lavrentev M.A. Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1973. 749 p. (In Russian)

6. Prilepko A.I., Solov'ev V.V. Solvability theorems and the Rothe method in inverse problems for equations of parabolic type. I. *Diff. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 10, pp. 1791–1799. (In Russian)

7. Solov'ev V.V. Determination of the source and coefficients in a parabolic equation in the multidimensional case. *Differ. Equations*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 992–1001.

8. Solov'ev V.V. The existence of a solution in the "whole" of the inverse problem of determining a source in a quasilinear equation of parabolic type. *Differ. Equations*, 1996, vol. 32, no. 4, pp. 538–547.

9. Sabitov K.B., Safin E.M. Inverse problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 3, pp. 856–859. doi: 10.1134/S1064562409060192.

10. Sabitov K.B., Safin E.M. The inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, nos. 5–6, pp. 880–889. doi: 10.1134/S0001434610050287.

11. Prilepko A.I., Kostin A.B. On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation. *Russ. Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993, vol. 75, no. 2, pp. 473–490.

12. Kostin A.B. The solvability of one moment problem and its relation to a parabolic inverse problem. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15. Vychisl. Mat. Kibern.*, 1995, no. 1, pp. 28–33. (In Russian)

13. Orlovskii D.G. On a problem of determining the parameter of an evolution equation. *Differ. Uravn.*, 1990, vol. 26, no. 9, pp. 1614–1621. (In Russian)

14. Tikhonov I.V., Eidel'man Yu.S. Uniqueness criterion in an inverse problem for an abstract differential equation with a nonstationary inhomogeneous term. *Math. Notes*, 2005, vol. 77, nos. 1–2, pp. 246–262. doi: 10.1007/s11006-005-0024-0.

15. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrktnylh zadach i ee prilozheniya* [Theory of Nonlinear Ill-Posed Problems and Its Applications]. Moscow, Nauka, 1978. 206 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*: ** *Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р.,* Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 2. – С. 274–291. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.274-291. ⟩

⟨ ***For citation*: ** Sabitov K.B., Zaynullov A.R. On the theory of the known inverse problems for the heat transfer equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 2, pp. 274–291. doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.274-291. (In Russian) ⟩