Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 01.03.01 — Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Обобщенный оператор на основе сумм Фурье – Хаара

Работа завершена:

«____»________________2015 г. ________________А.Г. Садикова

Работа проверена:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
ассистент кафедры теории функций и приближений

«____»________________2015 г. ________________Р.Р. Замалиев

Заведующий кафедрой теории функций и приближений,
доктор физико-математических наук, профессор

«____»________________2015 г. ________________Ф.Г. Авхадиев

Казань — 2015 г.

Оглавление

Введение

В выпускной работе строится оператор приближения функций, имеющих тейлоровские производные на конце отрезка. Такие пространства часто встречаются в теории интегральных уравнений третьего рода (см. например [6, 5]). Они являются пространствами для основных функций типа D и V (см. например [6]), которые в свою очередь часто являются классами решений некоторых прикладных задач, приводящих к уравнениям третьего рода [1]. В связи с тем, что интегральные уравнения третьего рода точно решаются лишь в редких случаях, то актуальной задачей является поиски приближенного решения. Известно, также, что классические методы приближенного решения таких уравнений часто имеют низкую скорость сходимости (по сравнению с интегральным уравнением второго рода)[6, 11]. Поэтому актуальной задачей является построение новых методов приближенного решения таких уравнений.

Целью выпускной работы было создание аппарата приближения функции, имеющих тейлоровские производные, учитывающего структурные особенности функций. Аппарат приближения строился на основе сумм Фурье—Хаара. Система Хаара ортонормирована и полна, и обладает таким замечательным свойством, что для любой непрерывной функции на $[0, 1]$ ее ряд Фурье—Хаара сходится равномерно.

В выпускной работе определения функции Хаара и ряда Фурье—Хаара берется из [10]. Существуют и другие определения, например [2]. Различные определения функции Хаара отличаются заданием значений в точках разрыва функции. Ряды Фурье—Хаара имеют широкое прикладное значение, например для сжатия входных сигналов, компрессии изображений, и им посвящено множество работ (см., например, обзор в работе [7]). В работе [3] исследуются кратные ряды Фурье—Хаара и показано, что существуют функции для которых такие ряды расходятся. В работе [4] исследуются свойства коэффициентов Фурье—Хаара для непрерывной функции и установлено, что коэффициенты Фурье—Хаара монотонны для выпуклых функций.

В выпускной работе строится обобщенный оператор на основе сумм Фурье—Хаара, такой, что на каждом отрезке постоянств $\Pi_n\varphi$ имеет вид функции из пространства $C\{m;0\}$ и доказывается равномерная сходимость Π_n к φ.

Работа состоит из введения, трех глав, семи параграфов, численного эксперимента, заключения и приложения. Во введении указывается актуальность выбранной темы, приведен краткий обзор имеющихся результатов, сформулирована цель и задачи работы. В первой главе описывается пространство $C\{m;0\}$ и его свойства. Во второй главе приводится общая теория рядов Фурье—Хаара и их свойства. В третьей главе приводятся результаты, полученные путем вывода свойств обобщенного оператора Фурье—Хаара. В численном эксперименте показано построения обобщенного оператора и ряда Фурье—Хаара для конкретной функции и проведем оценку погрешности.

Глава 1

Класс $C\{m;0\}$ и его свойства.

Определение 1. *Через* $C=[0;1]$ *обозначим пространство непрерывных на конечном отрезке* $[0;1]$ *функции с нормой*

$$\|\varphi\|_C \equiv \max_{0\le t\le 1} |\varphi(t)| (\varphi \in C)$$

Определение 2. *Пусть* $\varphi \in C$. *Тогда* $\varphi(t)$ *имеет тейлоровские производные до порядка* m, *если существуют последовательно пределы*

$$\varphi^{j}(0) = j! \lim_{t\to 0+} \left\{ \frac{\varphi(t) - \sum\limits_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!}}{t^j} \right\}, \tag{1.1}$$

где $\varphi^{\{0\}}(0) \equiv \varphi(0)$, $(j=\overline{0,m}; m\in N)$

Обозначим класс таких функций через $C\{m;0\}$.
Введем операторы $T^j : C\{m;0\} \to C$ следующего вида

$$T^j\varphi \equiv \frac{\varphi(t) - \sum\limits_{i=0}^{j-1} \frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!}}{t^j} = F(t), F(0) = \lim_{t\to 0+} F(t) \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\lim_{t\to 0+} T^j\varphi = \frac{\varphi^{\{j\}}(0)}{j!} \tag{1.3}$$

1.1 Свойства оператора T

Лемма 1. *Операторы* $T^k\varphi$ $(k = \overline{0,m})$, *определенные по формуле* (1.2)*— линейные.*

Доказательство: Докажем, $T^k(\varphi_1+\varphi_2) = T^k(\varphi_1)+T^k(\varphi_2)$ Докажем по индукции. Проверим для $k = 1$:

$$T^1(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{\varphi_1(t)+\varphi_2(t)-\varphi_1(0)-\varphi_2(0)}{t} =$$
$$= \frac{\varphi_1(t)-\varphi_1(0)}{t} + \frac{\varphi_2(t)-\varphi_2(0)}{t} = T^1(\varphi_1)+T^1(\varphi_2).$$

Пусть свойство верно для $k < m$, тогда с учетом того, что $\varphi^{\{i\}}(0) = i! \lim\limits_{t\to 0+} T^i\varphi$, $(i = \overline{0,k})$ имеем:

$$(\varphi_1+\varphi_2)^{\{i\}}(0) = i! \lim_{t\to 0+} T^i(\varphi_1+\varphi_2) = i! \lim_{t\to 0+} T^i\varphi_1 + T^i\varphi_2 = \varphi_1^{\{i\}}(0)+\varphi_2^{\{i\}}(0)$$

Докажем для $k+1$:

$$T^{k+1}(\varphi_1+\varphi_2) = \left[\varphi_1(t)+\varphi_2(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(\varphi_1+\varphi_2)^{\{i\}}(0)t^i}{i!}\right] \Bigg/ t^{k+1} =$$
$$= \left[\varphi_1(t)+\varphi_2(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi_1^{\{i\}}(0)t^i}{i!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\varphi_2^{\{i\}}(0)t^i}{i!}\right] \Bigg/ t^{k+1} =$$
$$= T^{k+1}\varphi_1 + T^{k+1}\varphi_2.$$

Проверим, что $T^k(\lambda\varphi) = \lambda T^k\varphi$. Для этого возьмем последовательно тейлоровские производные:

$$T^1(\lambda\varphi) = \frac{\lambda\varphi-\lambda\varphi(0)}{t} = \lambda\frac{\varphi-\varphi(0)}{t} = \lambda T^1\varphi$$
$$T^2(\lambda\varphi) = \frac{\lambda\varphi-\lambda\varphi(0)-\lambda\varphi(0)^{\{1\}}}{t^2} = \lambda\frac{\varphi-\varphi(0)-\varphi(0)^{\{1\}}}{t^2} = \lambda T^2\varphi$$

Взяв k раз получаем:

$$T^k(\lambda\varphi) = \frac{\lambda\varphi-\lambda\varphi(0)-\lambda\varphi^{\{1\}}(0)-\ldots-\lambda\varphi^{\{k\}}(0)}{t^k} =$$
$$= \lambda\frac{\varphi-\varphi(0)-\varphi^{\{1\}}(0)-\varphi^{\{k\}}(0)}{t^k} = \lambda T^k\varphi$$

А теперь проверим для $k = m$:

$$T^m(\lambda\varphi) = \frac{\lambda\varphi - \lambda\varphi(0) - \lambda\varphi^{\{1\}}(0) - \ldots - \lambda\varphi^{\{k\}}(0) - \ldots - \lambda\varphi^{\{m-1\}}(0)}{t^m} =$$
$$= \lambda\frac{\varphi - \varphi(0) - \varphi^{\{1\}}(0) - \ldots - \varphi^{\{k\}}(0) - \ldots - \varphi^{\{m-1\}}(0)}{t^m} = \lambda T^m\varphi$$

Следовательно верно $T^j(\lambda\varphi) = \lambda T^j\varphi$ при любом $j = \overline{0, m}$.

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Верно следующее утверждение*

$$T^k = T^{k_1}T^{k-k_1}, \tag{1.4}$$

$0 \leqslant k_1 < k,\ k, k_1 \in \mathbb{Z}_+$

Доказательство:

Докажем по индукции. Рассмотрим при $k = 1, k_1 = 0$:

$$T^1\varphi = \frac{\varphi - \varphi(0)}{t}, \qquad \lim_{t\to 0} T^1\varphi = \varphi^{\{1\}}(0)$$

Рассмотрим случай: $k = 2,\ k_1 = 1$

$$T^1T^1\varphi = \frac{T^1\varphi - T^1\varphi(0)}{t} = \left[\frac{\varphi - \varphi(0)}{t} - \frac{\varphi^{\{1\}}(0)t}{t}\right] \Big/ t =$$
$$= \frac{\varphi - \varphi(0) - \varphi^{\{1\}}(0)}{t^2} = T^2\varphi.$$

Предположим, что утверждение верно при $\forall k \leq n$, где $k \in N$, тогда докажем, что верно для $k+1$:

$$TT^k\varphi = \frac{\frac{\varphi - \sum\limits_{i=0}^{k-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!}{t^k} - \frac{T^k\varphi(0)t^k}{t^k}}{t} = \frac{\varphi - \sum\limits_{i=0}^{k}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!}{t^{k+1}} = T^{k+1}\varphi.$$

Для $k_1 = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для $k_1 = l-1$, докажем верность для $k_1 = l$.

Сперва докажем следующее:

$$(T^{k-l})^{\{i\}}(0) = \frac{\varphi^{\{k-l+i\}}(0)i!}{(k-l+i)!} \qquad (i = \overline{0, l-1}).$$

Учитывая то, что $i = \overline{0, l-1}$, и мы предполагаем, что (1.4) верно для таких i, имеем:

$$(T^{k-l})^{\{i\}}(0) = i! \lim_{t \to 0+} T^i T^{k-l} = i! \lim_{t \to 0+} T^{k-l+i} = \frac{\varphi^{\{k-l+i\}}(0) i!}{(k-l+i)!}.$$

$$T^l T^{k-l} \varphi = \frac{\left\{ \varphi - \sum\limits_{i=0}^{k-l-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i! \right\} \Big/ t^{k-l} - \sum\limits_{i=0}^{l-1} (T^{k-l}\varphi)^{\{i\}}(0) t^i / i!}{t^l} =$$

$$= \frac{\varphi - \sum\limits_{i=0}^{k-l-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i! - \sum\limits_{i=0}^{l-1} \varphi^{\{k-l+i\}}(0) t^{k-l+i} \Big/ (k-l+i)!}{t^k} =$$

$$= \frac{\varphi - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i!}{t^k} = T^k \varphi.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in C$, *тогда:*

$$T t^m \varphi \equiv \varphi. \tag{1.5}$$

Доказательство:

$$T t^m \varphi = \frac{t^m \varphi(t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} (t^k \varphi)^{\{i\}}(0) t^i / i!}{t^m} = \frac{t^m \varphi(t)}{t^m} = \varphi(t). \tag{1.6}$$

Что и требовалось доказать.

1.2 Свойства пространства $C\{m; 0\}$

Определение 3 (см., например, в работе [6]). *Через* $C\{m;0\}$ *обозначим пространство функций, имеющих тейлоровские производные в точке* 0 *с нормой*

$$\|\varphi\|_{C\{m;0\}} \equiv \|T\varphi\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi^{\{i\}}(0)|, \tag{1.7}$$

Лемма 4 (см., например, в работе [6]). *Функция* $\varphi(t) \in C\{m;0\}$ *тогда и только тогда, когда она имеет вид:*

$$\varphi(t) = t^m F(t) + \sum_{i=0}^{m-1} b_i t^i, \tag{1.8}$$

где $F = T\varphi \in C, b_i = \frac{\varphi^{\{i\}}(0)}{i!}$ $(i = \overline{0, m-1})$.

Теорема 1. *В силу* (1.8) *по норме* (1.7) *пространство* $C\{m;0\}$ $-$ *полное.*

Доказательство: Покажем полноту пространства $C\{m;0\}$. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_n \in C\{m;0\}$ - произвольная фундаментальная последовательность. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n, m \geqslant N(\varepsilon)$ имеем

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C\{m;0\}} = \|T(\varphi_n - \varphi_m)\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |(\varphi_n - \varphi_m)^{\{i\}}(0)| =$$
$$= \|F_n - F_m\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_n^i - \alpha_m^i| < \varepsilon, \tag{1.9}$$

$(F_n = T\varphi_n \in C, \alpha_n^i = (T\varphi_n)^{\{i\}}(0) \in \mathbb{R}$ Из (1.9) видно, что

$$\|F_n - F_m\| < \varepsilon, \qquad |\alpha_n^i - \alpha_m^i| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательности $\{T\varphi_n\}_n \in C$, $\{\varphi_l^{\{i\}}(0)\}_l \in \mathbb{R}$, а в силу полноты пространств C и $\mathbb{R}$ сходятся. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F^*; \lim_{n\to\infty} \alpha_n^i = \alpha^{i^*}; (F(t) \in C, \alpha^{i^*} \in \mathbb{R}). \tag{1.10}$$

Тогда из (1.8) и (1.10)

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[t^m F_n(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha_n^i t^i}{i!} \right] = t^m \lim_{n\to\infty} F_n(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \alpha_n^i =$$
$$= t^m F^*(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\alpha^{i^*}}{i!} t^i = \varphi^*(t).$$

Из произвольного выбора последовательности $\{\varphi_n\}_n$ получаем, что пространство $C\{m;0\}$ — полное.

Лемма 5 (Аналог формулы Лейбница [6]). *Если* φ *и* $\psi \in C\{m;0\}$, *то* $\varphi\psi \in C\{m;0\}$, *причем*

$$(\varphi\psi)^{\{m\}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \varphi^{\{k\}}(0) \cdot \psi^{\{m-k\}}(0), \tag{1.11}$$

где $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ $\quad (k = \overline{0,m})$ *–биномиальные коэффициенты.*

Доказательство: По индукции. При $m = 1$ — очевидно. Предположим, что формула (1.11) верна при $\forall n \le m$, где $n \in N$, тогда справедливо и для $m+1$, докажем это:

$$(\varphi\psi)^{\{m+1\}}(0) = (m+1)! \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi\psi)(t) - \sum\limits_{i=0}^{m} (\varphi\psi)^{\{i\}}(0) t^i/i!}{t^{m+1}} =$$

$$= (m+1)! \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)[\psi(t) - \sum\limits_{i=0}^{m} \psi^{\{i\}}(0) t^i/i!]}{t^{m+1}} +$$

$$+(m+1)! \lim_{t\to 0} t^{-m-1} \Big\{ \varphi(t) \cdot \sum_{i=0}^{m} \psi^{\{i\}}(0) t^i/i! -$$

$$- \sum_{i=0}^{m} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{i}{k} \psi^{\{k\}}(0) \varphi^{\{i-k\}}(0) \right] t^i/i! \Big\} =$$

$$= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \lim_{t\to 0} t^{-m-1} \times$$

$$\times \left[\varphi(t) \cdot \sum_{i=0}^{m} \psi^{\{i\}}(0) t^i/i! - \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=k}^{m} \binom{i}{k} \varphi^{\{k\}}(0) \psi^{\{i-k\}}(0) t^i/i! \right] =$$

$$= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \lim_{t\to 0} t^{-m-1} \times$$

$$\times [\varphi(t) \cdot \sum_{i=0}^{m} \psi^{\{i\}}(0) t^i/i! - \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{m-k} \binom{i+k}{k} \varphi^{\{k\}}(0) \psi^{\{i\}}(0) t^{i+k}/(i+k)!] =$$

$$= \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) + (m+1)! \lim_{t\to 0} \sum_{i=0}^{m} \frac{(T^{m+1-i}\varphi)(t)\psi^{\{i\}}(0)}{i!} = \varphi(0)\psi^{\{m+1\}}(0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \frac{\psi^{\{i\}}(0)\varphi^{\{m+1-i\}}(0)(m+1)!}{i!(m+1-i)!} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \psi^{\{i\}}(0) \varphi^{\{m+1-i\}}(0).$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 6 (аналог правила Лопиталя [6]). *Пусть функции* $\varphi, \psi \in C\{m;0\}$ *таковы, что* $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{\{m-1\}}(0) = \psi(0) = \psi'(0) = \ldots = \psi^{\{m-1\}}(0) = 0$, *но* $\psi^{\{m\}}(0) \neq 0$. *Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi^{\{m\}}(0)}{\psi^{\{m\}}(0)}. \tag{1.12}$$

Доказательство:

Для доказательство воспользуемся определением функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из (1.8) и определением тейлоровских производных (1.1). Распишем левую часть

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{t^m F(t) + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!}{t^m F(t) + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\psi^{\{i\}}(0)t^i/i!} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^m\left\{\varphi(t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1}\left[\varphi^{\{i\}}(0)t^i\right]/i!\right\}/t^m + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!}{t^m\left\{\psi(t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1}\left[\psi^{\{i\}}(0)t^i\right]/i!\right\}/t^m\} + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\psi^{\{i\}}(0)t^i/i!} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^m\varphi^m(0) + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!}{t^m\psi^m(0) + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\psi^{\{i\}}(0)t^i/i!} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{t\to 0}t^m\varphi^m(0) + \lim\limits_{t\to 0}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!}{\lim\limits_{t\to 0}t^m\psi^m(0) + \lim\limits_{t\to 0}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\psi^{\{i\}}(0)t^i/i!} = \lim_{t\to 0}\frac{t^m\varphi^m(0)}{t^m\psi^m(0)} = \frac{\varphi^m(0)}{\psi^m(0)}.$$

Лемма 7 ([5]). *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. *Если* $\varphi(t) \in C\{m;0\}$, *то* $t^k\varphi(t) \in C\{m+k;0\}$, *при этом*

$$(t^k\varphi(t))^{\{i\}}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } i = \overline{0, k-1}; \\ \frac{i!}{(i-k)!}\varphi^{\{i-k\}}(0), & \text{при } i = \overline{k, k+m}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Доказательство:

Распишем $t^k\varphi(t)$:

$$t^k\varphi(t) = t^k\left[t^m T\varphi(t) + \sum_{i=0}^{m-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!\right] = t^{m+k}T\varphi(t) + t^k\sum_{i=0}^{m-1}\varphi^{\{i\}}(0)t^i/i!. \tag{1.14}$$

Из (1.14) и (1.8) следует, что $(t^k\varphi(t))^{\{i\}}(0) = 0$, при $i = \overline{0, k-1}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $i = \overline{k, k+m}$. Поскольку производные определяются последовательно и (1.13) верно для $i = k$, то достаточно проверить переход от i к $i+1$:

$$(t^k\varphi(t))^{\{i+1\}}(0) = (i+1)!\lim_{t\to 0}\frac{t^k\varphi(t) - \sum\limits_{l=k}^{i}\varphi^{\{l-k\}}(0)t^l\Big/(l-k)!}{t^{i+1}} =$$

$$= (i+1)!\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t) - \sum\limits_{l=0}^{i-k}\frac{t^l}{l!}\varphi^{\{l\}}(0)}{t^{i+1-k}} = \frac{(i+1)!}{(i+1-k)!}\varphi^{\{i+1-k\}}(0).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 2 (аналог теоремы Вейерштрасса. см. например [8]). *Для любого $\varphi \in C\{m;0\}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует алгебраический полином $Q(t)$, что имеет место следующее неравенство*

$$\|\varphi - Q\|_{C\{m;0\}} < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Теорема 3 ([6]). *Банахово пространство $C\{m;0\}$ с нормой (1.7) нормально вложено в пространства $C\{m-j;0\}, (j = \overline{1, m})$.*

Определение 4 ([6]). $C^{(m)} = C^{(m)}[0;1]$ *— банахово пространство (m)-раз непрерывно дифференцируемых на $[0;1]$ функций с нормой*

$$\|\varphi\|_{C^{(m)}} \equiv \sum_{i=0}^{m}\|\varphi^{(i)}\|_C. \tag{1.16}$$

Определение 5 ([9]). *Пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0, если E_1 плотно в E_0, т.е. выполняется следующее неравенство*

$$\|x\|_{E_0} \leqslant k_1\|x\|_{E_1}, \tag{1.17}$$

где константа вложения $k_1 \leqslant 1$.

Лемма 8. *Пространство $C^{(m)}$ по норме (1.16) нормально вложено в банахово пространство $C\{m;0\}$*

Доказательство: Пусть функция $\varphi \in C^{(m)}$. Представим ее в виде ряда Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(i)}(0)t^i}{i!} + \frac{\varphi^{(m)}(\delta t)t^m}{m!}, \tag{1.18}$$

где $\delta \in (0;1)$. Тогда

$$T\varphi = m! \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{\varphi(\delta t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \varphi^{(i)}(0)(\delta t)^i/i!}{(\delta t)^m} \right\} = \frac{\varphi^{(m)}(\delta t)}{m!}. \tag{1.19}$$

Далее, используя (1.19), получаем:

$$|T\varphi| = \left|\frac{\varphi^{(m)}(\delta t)}{m!}\right| \leqslant \|T\varphi\|_C = \|\frac{\varphi^{(m)}}{m!}\|_C = \frac{1}{m!}\|\varphi^{(m)}\|_C \leqslant \|\varphi^{(m)}\|_C. \tag{1.20}$$

Из (1.8)

$$b_j = \frac{\varphi^{\{i\}}(0)}{i!} = \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}. \tag{1.21}$$

Следовательно имеем:

$$|\varphi^{\{i\}}(0)| = |\varphi^{(i)}(0)|. \tag{1.22}$$

Тогда из (1.7),(1.22), (1.20), (1.16) следует, что

$$\|\varphi\|_{C\{m;0\}} = \|T\varphi\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi^{(i)}(0)| \leqslant \|\varphi^{(m)}\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \|\varphi^{(i)}\|_C = \|\varphi\|_{C^{(m)}}. \tag{1.23}$$

Из неравенства (1.23) и Теоремы 2 вытекает требуемое утверждение.

Пусть $\Pi = \Pi : C\{m;0\} \to H_n$ - линейный оператор, который отображает пространство $C\{m;0\}$ в подпространство $H_n \subset C\{m;0\}$ алгебраических полиномов степени n. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть $m = 0,1,\dots$, где $m \in Z$ фиксированное. Тогда для $\forall n = 1,2,\dots$ верна оценка, где c_1 - положительная константа, не зависящая* *от n*

$$\|\Pi\|_{C\{m;0\}} = \|\Pi\|_{C\{m;0\}\to C\{m;0\}} \leq c_1 \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m+1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\|_C. \tag{1.24}$$

Для доказательства воспользуемся соотношением (1.23)

$$\|\Pi\varphi\|_{C\{m;0\}} \leq \|\Pi\varphi\|_{C^{(m)}}.$$

Далее, воспользовавшись соотношением (1.16), получаем

$$\|\Pi\varphi\|_{C^{(m)}} \equiv \sum_{i=0}^{m} \|(\Pi\varphi)^{(i)}\|_C.$$

Для функций из H_n на $[0,1]$ верно неравенство Маркова:

$$|P^{(m)}(x)| \leq M2^m \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m-1)^2)}{(2m-1)!!}, \tag{1.25}$$

где

$$M = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|.$$

Зная это, находим

$$\sum_{i=0}^{m} \|(\Pi\varphi)^{(i)}\|_C \leq \sum_{i=0}^{m} 2^i \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(i-1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\varphi\|_C.$$

Если $i > n$, тогда $|(\Pi\varphi)^{(i)}\|_C \equiv 0$. Рассмотрим случай, когда $m \leqslant n$. Рассмотрим следующую величину:

$$2\frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(i-1)^2+1)}{(2(i+1)-1)!!} =$$
$$= 2\frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(i-1)^2)}{(2i-1)!!}\cdot\frac{2(n^2-i^2)}{2i+1}.$$

Покажем, что величины:

$$\frac{2(n^2-i^2)}{2i+1} \geqslant 1, \quad i = \overline{0, m-1},$$

$$\frac{2(n^2-i^2)}{2i+1} = \frac{2(n-i)(n+i)}{2i+1} \geqslant \frac{2(n-i)2i}{2i+1} \geqslant 1.$$

Далее получаем:

$$\sum_{i=0}^{m} 2^i \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(i-1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\varphi\|_C \le$$
$$\le c_1 \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m+1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\|_C\|\varphi\|_C.$$

Воспользовавшись Леммой 3, находим оценку:

$$c_1 \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m+1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\|_C\|\varphi\|_C \le$$
$$\le c_1 \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m+1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\|_C\|\varphi\|_{C\{m;0\}}.$$

Из нашей оценки получаем нужное неравенство для линейного оператора Π:

$$\|\Pi\|_{C\{m;0\}} \le c_1 \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m+1)^2)}{(2m-1)!!}\|\Pi\|_C.$$

Следствие 1. *Пусть P — оператор метода подобластей по узлам Чебышева первого(второго) рода. Тогда имеет место оценка:*

$$\|\Pi\|_{C\{m;0\}} \le k_2 \frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-(m+1)^2)}{(2m-1)!!}\ln n \qquad (n=2,3,\dots).$$

Глава 2

Ряды Фурье — Хаара и их свойства

2.1 Двоичные отрезки

Определение 6. *Двоичными отрезками называются отрезки, которые можно получить делением отрезка на* 2^m *равных частей.*

Пример двоичных отрезков:
$[0, \frac{1}{8})$, $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8})$,$[\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$, $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4})$, $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$, $[\frac{7}{8}, 1]$.

Пример отрезков, которые не являются двоичными:
$[\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$; $[\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$; $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Обозначим через $l_{mj} = [\frac{j-1}{2^{m-1}}; \frac{j}{2^{m-1}})$, где $j = \overline{1, 2^{m-1}}$, а $m = \overline{1, n}$.
При любом m выполняется равенство:

$$l_{m1} + l_{m2} + l_{m3} + \ldots + l_{m2^{m-1}} = [0, 1].$$

Параллельно с двойной нумерацией введем простую нумерацию, полагая $l_{mj} = l_k$, где

$$k = 2^{m-1} + j, \forall k = \overline{2, n}.$$

Разобьем концы отрезков l_{mj} пополам, левая (соответственно правая) часть обозначим через l_{mj}^- (l_{mj}^+ соответсвенно), так что $l_{mj}^- + l_{mj}^+ = l_{mj}$. Отметим, что

$$l_{mj}^- = l_{m+1,2j-1}, \qquad l_{mj}^+ = l_{m+1,2j}.$$

Длина отрезка: $|l_{mj}| = \frac{1}{2^{m-1}}$.

2.2 Функция Хаара

Определение 7. *[10] Функция Хаара строится системами $\{\chi_k(t)\}$, причем первая функция $\chi_1(t) \equiv 1$ остается вне групп.*

$$\chi_{mj}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при } t \in [\frac{j-1}{2^{m-1}}; \frac{j-1/2}{2^{m-1}}); \\ -2^{\frac{m-1}{2}}, & \text{при } t \in [\frac{j-1/2}{2^{m-1}}; \frac{j}{2^{m-1}}]; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.1}$$

где $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$

При таком определении верны следующие равенства:

$$\chi_{mj}(0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \chi_{mj}(t), \qquad \chi_{mj}(1) = \lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \chi_{mj}(t),$$

$$\chi_{mj}(t_k) = \chi_{mj}(t_k + 0) \qquad t_k = \frac{j - 1/2}{2^{m-1}}. \tag{2.2}$$

Верно следующее утверждение: $sgn|\chi_{mj}(t)|$ равен характеристической функции отрезка l_{mj}

$$sgn|\chi_{mj}(t)| = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in l_{mj}; \\ 0, & \text{при } t \notin l_{mj}. \end{cases} \tag{2.3}$$

При любом $q > 0$ выполняется

$$\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\chi_{mj}(t)|^q = 2^{\frac{(m-1)q}{2}}.$$

Через λ_{n1},...,λ_{nn} обозначим все отрезки постоянства семейства функций $\chi_1(t)$,...,$\chi_n(t)$. Если $n = 2^{m-1} + j$, то длины этих отрезков равны:

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} 1/2^m, & \text{при } 1 \leqslant s \leqslant 2j; \\ 1/2^{m-1}, & \text{при } 2j+1 \leqslant s \leqslant n. \end{cases} \tag{2.4}$$

а также при любом n выполняется

$$\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nn} = [0, 1].$$

2.3 Ряды Фурье—Хаара.

Пусть $f(t)$ — произвольная интегрируемая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$. Коэффициентами Фурье-Хаара функции $f(t)$ будем называть числа [10]

$$c_k = \int_0^1 f(t)\chi_k(t)dt.$$

Для любой функции $f(x)$ можно составить ряд Фурье-Хаара

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(t). \tag{2.5}$$

Рассмотрим его частичную сумму

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k(t).$$

Лемма 10. *Пусть λ_{n1},...,λ_{n1} - отрезки постоянства семейства функций $\chi_1(t)$,...,$\chi_n(t)$. Если $t \in \lambda_{ns}$, то*

$$S_n(t) = \frac{1}{\lambda_{ns}} \int\limits_{\lambda_{ns}} \varphi(s)ds. \tag{2.6}$$

Теорема 4. *Если $f \in C$, то ряд Фурье-Хаара сходится равномерно*

Определение 8. *Функция $f(x) \in [0, 1]$ принадлежит классу $Lip_\alpha(L)$, если для любых двух точек x и y данного отрезка справедливо неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^\alpha, \tag{2.7}$$

где $L > 0$ *— константа.*

Теорема 5. *Если* $f \in Lip_L(\alpha)$, *и* $n = 2^m$, *то*

$$|f(t) - \chi_n(t)f| \leqslant \frac{1}{\alpha + 1} L h^{\alpha}. \tag{2.8}$$

Оценка (3.4) точна.

Глава 3

Обобщенный оператор Фурье-Хаара

3.1 Пространство $KC\{m;0\}$

Введем новое пространство кусочно-непрерывных, ограниченных функций $\varphi \in KC\{m;0\}$ следующего вида:

$$\varphi(t) = t^m \Psi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i, \tag{3.1}$$

где $\Psi(t) \in KC[0;1]$, с нормой

$$\|\varphi\|_{KC\{m;0\}} \equiv \max |T\varphi| + \sum_{i=0}^{m-1} |\varphi^{\{i\}}(0)|. \tag{3.2}$$

3.2 Свойства обобщенного оператора Фурье-Хаара

Введем обобщенный оператор на основе сумм рядов Фурье-Хаара следующего вида:

$$\Pi_n \varphi \equiv U S_n T \varphi + H_n \varphi, \tag{3.3}$$

где $U\varphi = t^m \varphi$, $H_m \varphi = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \varphi^{\{i\}}(0) t^i / i!$.

Лемма 11. *Оператор* $\Pi_n\varphi$ *— линейный оператор.*

Доказательство:

Пусть $\varphi, \psi \in C\{m; 0\}$. Используя линейность операторов T, S, U, H_m, докажем, что $\Pi_n(\varphi + \psi) = US_nT\varphi + H_n\varphi + US_nT\psi + H_n\psi$:

$$T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi;$$

$$S_n(T\varphi + T\psi) = S_nT\varphi + S_nT\psi;$$

$$U(S_nT\varphi + S_nT\psi) = US_nT\varphi + US_nT\psi;$$

$$H_n(\varphi + \psi) = H_n\varphi + H_n\psi;$$

$$\Pi_n(\varphi + \psi) = US_nT\varphi + H_n\varphi + US_nT\psi + H_n\psi = \Pi_n\varphi + \Pi_n\psi.$$

Проверим, что $\Pi_n(\lambda\varphi) = \lambda\Pi_n\varphi$:

$$T(\lambda\varphi) = \lambda T\varphi;$$

$$S_n(\lambda T\varphi) = \lambda S_nT\varphi;$$

$$U(\lambda S_nT\varphi) = \lambda US_nT\varphi;$$

$$H_n(\lambda\varphi) = \lambda H_n\varphi;$$

$$\Pi_n(\lambda\varphi) = \lambda US_nT\varphi + \lambda H_n\varphi = \lambda(US_nT\varphi + H_n\varphi) = \lambda\Pi_n\varphi.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(t)$ *из пространства* $C\{m; 0\}$*. Тогда оператор* $\Pi_n f$ *равномерно сходится к* $f(t)$ *по норме пространства* $KC\{m; 0\}$*.*

Доказательство:

$$\|\varphi(t) - \Pi_n\varphi\|_{KC\{m;0\}} =$$

$$= \|t^m\Psi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!} - t^m\chi_n\Psi - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\Pi\varphi)^{\{i\}}(0)t^i}{i!}\|_{KC\{m;0\}}.$$

Рассмотрим отдельно случай $|(\Pi\varphi)^{\{i\}}(0)|$

$$|(\Pi\varphi)^{\{i\}}(0)| = \left|\left[t^m\chi_n T\varphi + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{\{j\}}(0)t^j}{j!}\right]^{\{i\}}\right| =$$

$$= i!\lim_{t\to 0}\left|\left[t^m\chi_n T\varphi + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\varphi^{\{j\}}(0)t^j}{j!} - \sum_{l=0}^{i-1}\frac{\varphi^{\{l\}}(0)t^l}{l!}\right] \Big/ t^l\right| =$$

$$= l!\lim_{t\to 0}\left|\left[t^m\chi_n T\varphi + \sum_{j=i}^{m-1}\frac{\varphi^{\{j\}}(0)t^j}{j!}\right] \Big/ t^i\right| =$$

$$= l!\lim_{t\to 0}\left|t^{m-i}\chi_n T\varphi + \sum_{j=i}^{m-1}\frac{\varphi^{\{j\}}(0)t^{j-i}}{j!}\right| = |\varphi^{\{i\}}(0)|.$$

Отсюда получаем дальнейшую оценку равномерной сходимости

$$\|t^m\Psi(t) - t^m\chi_n\Psi_n\|_{KC\{m;0\}} = \|t^m(\Psi(t) - \chi_n\Psi_n)\|_{KC\{m;0\}} =$$

$$= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|T(t^mT\varphi(t) - T\chi_n\varphi_n(t))| = |T\varphi(t) - \chi_n T\varphi_n(t)| < \varepsilon.$$

так как для любого $\varepsilon > 0$ существует N , что $\forall n > N$ $\forall t \in KC\{m;0\}$: $|T\varphi(t) - \chi_n T\varphi_n(t)| < \varepsilon$. Отсюда получаем равномерную сходимость по норме пространства $KC\{m;0\}$.

Теорема 7. *Если $\varphi \in C\{m;0\}$, $T\varphi \in Lip_L(\alpha)$ и $n = 2^m$, то*

$$\|f(t) - \Pi_n(t)\|_{KC\{m;0\}} \leqslant \frac{1}{\alpha+1}Lh^\alpha. \tag{3.4}$$

Оценка (3.4) точна.

Доказательство:

$$\|f(t) - \Pi_n(t)\|_{KC\{m;0\}} = \|t^m\Psi(t) + \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!} -$$

$$-t^m\chi_n\Psi - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\Pi\varphi)^{\{i\}}(0)t^i}{i!}\|_{KC\{m;0\}} =$$

$$= \|t^m\Psi(t) - t^m\chi_n\Psi\|_{KC\{m;0\}} = \|t^mT(\varphi - \chi_n\varphi)\|_{KC\{m;0\}} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|T\varphi - \chi_n T\varphi| \leqslant \frac{1}{\alpha+1}Lh^\alpha.$$

Теорема 8. *Пусть $\varphi(t) \in C\{m;0\}$, тогда верна оценка:*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |S_n\varphi| \leqslant \|\varphi\|_{C\{m;0\}}. \tag{3.5}$$

Доказательство: Пусть λ_{n1},...,λ_{n1} - отрезки постоянства семейства функций $\chi_1(t)$,...,$\chi_n(t)$. Если $t \in \lambda_{ns}$, то воспользуемся соотношением (2.6)

$$|\chi\varphi| = \left| \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{|\lambda_{ns}|} \varphi(s)ds \right|. \tag{3.6}$$

Так как любая точка $t \in [0,1]$ принадлежит какому-то λ_{ns}, то (3.6) справедлива для всех t.

$$\left| \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{|\lambda_{ns}|} \varphi(s)ds \right| = \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \left| \int\limits_{|\lambda_{ns}|} \varphi(s)ds \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{|\lambda_{ns}|} |\varphi(s)ds| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{|\lambda_{ns}|} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varphi(s)ds| \leqslant \frac{\|\varphi\|_C}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{|\lambda_{ns}|} ds = \frac{|\lambda_{ns}|}{|\lambda_{ns}|} \|\varphi\|_C = \|\varphi\|_C.$$

из (1.24) выходит

$$\|\varphi\|_C \leqslant \|\varphi\|_{C\{m;0\}}.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 9. *Для обобщенного оператора получили следующую оценку*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\Pi\varphi| \leqslant \|\varphi\|_{C\{m;0\}}. \tag{3.7}$$

Доказательство:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\Pi\varphi| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| t^m \chi_n T\varphi + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t^m \chi_n T\varphi| + \sum_{i=0}^{m-1} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!} \right| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{t^m}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{|\lambda_{ns}|} T\varphi(s)ds \right| +$$

$$hj+\sum_{i=0}^{m-1}\left|\varphi^{\{i\}}(0)\right| = \frac{1}{|\lambda_{ns}|}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t^m|\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int\limits_{|\lambda_{ns}|}|T\varphi(s)ds| + \sum_{i=0}^{m-1}\left|\varphi^{\{i\}}(0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{|\lambda_{ns}|}\|T\varphi\|_C + \sum_{i=0}^{m-1}\left|\varphi^{\{i\}}(0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|T\varphi\|_C}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{|\lambda_{ns}|}ds + \sum_{i=0}^{m-1}\left|\varphi^{\{i\}}(0)\right| = \|T\varphi\|_C + \sum_{i=0}^{m-1}\left|\varphi^{\{i\}}(0)\right| = \|\varphi\|_{C\{m;0\}}.$$

В результате получаем оценку:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|\Pi\varphi| \leqslant \|\varphi\|_{C\{m;0\}}.$$

Что и требовалось доказать.

Численный эксперимент

В этом разделе построим обобщенный оператор на основе сумм Фурье—Хаара для функции из $C\{m; 0\}$. Поскольку функции из $C\{m; 0\}$ являются непрерывными, то построим также и конечную сумму для самой этой функции, и сравним полученные результаты.

Возьмем функцию $\varphi(t)$ в виде:

$$t^m \Phi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} b_i t^i.$$

Пример 1. Пусть $m = 2$, $\Phi(t) = t$, $b_i = (i+1)i!$, т.е.

$$\varphi(t) = t^3 + 2t + 1. \tag{3.8}$$

Будем рассматривать $\varphi(t)$ как функцию из пространства $C\{2; 0\}$. Тогда $T\varphi = t$; $\varphi^{\{i\}} = (i+1)i!$, $i = 0, 1$. Введем систему функции Хаара $\{\chi_k\}$, где $k = 2^{m-1} + j$:

$$\chi_{mj}(t) = 2^{\frac{m-1}{2}} sign(l^+_{mj}) - 2^{\frac{m-1}{2}} sign(l^-_{mj}),$$

отдельно введем $\chi_1(t) = 1$.

Далее строим ряд Фурье—Хаара:

$$S_n\varphi = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k \chi_k,$$

где $c_k = \int\limits_0^1 \varphi(t)\chi_k(t)dt$.

Теперь построим обобщенный оператор на основе сумм Фурье—Хаара:

$$\Pi_n\varphi = t^m S_n T\varphi + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi^{\{i\}}(0)t^i}{i!},$$

Таким образом $\Pi_n\varphi$ имеет вид:

$$\Pi_n\varphi = t^2 \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k\chi_k + 2t + 1.$$

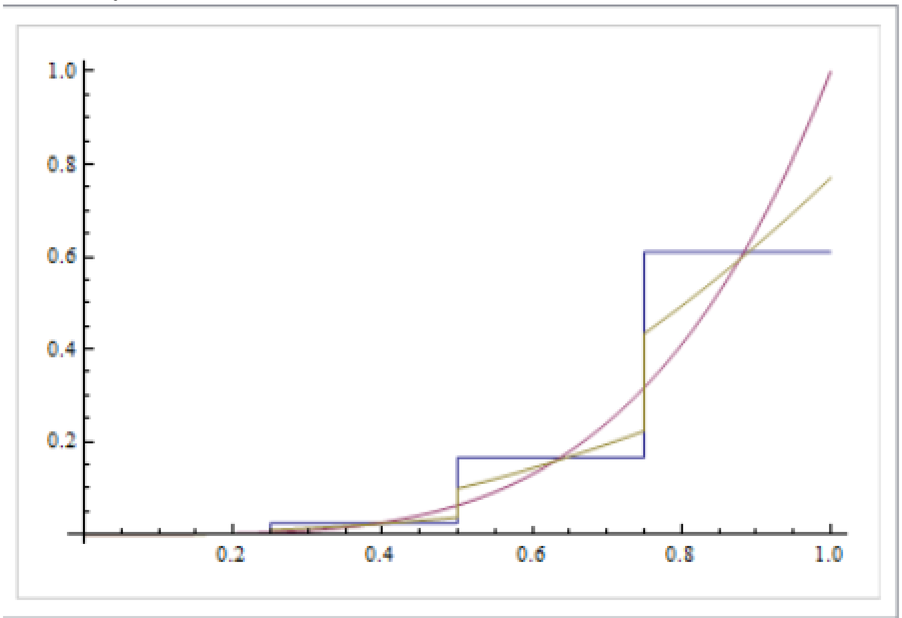
Построим его в пакете Mathematica и сравним результат. Все вычисления находятся в Приложении.

Построим таблицу для оценки приближений ряда Фурье-Хаара и обобщенного оператора:

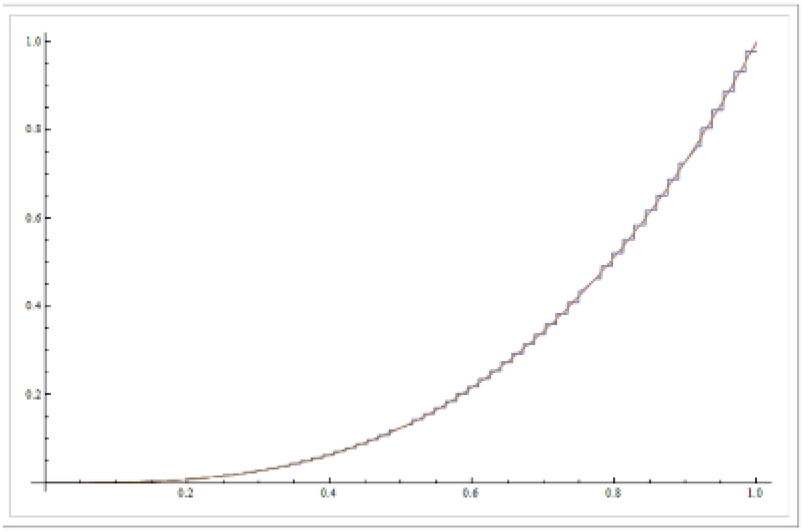
n:	$\varphi - S_n\varphi$	$\varphi - \Pi_n\varphi$
1:	0.8	0.666666
2:	0.324998	0.0827415
3:	0.0804358	0.0242799
4:	0.124561	0.0221784
5:	0.0263764	0.0209214
6:	0.0212538	0.00345676
7:	0.0112469	0.00362241

Построим:

для случая $n = 3$:



для случая $n = 7$:



Функцию (3.8) можно рассматривать как функции из $C\{3;0\}$. Тогда $T\varphi = 1$ и $S_nT\varphi = 1$, т.е. $\Pi\varphi \equiv \varphi$.

Пример 2:

Возьмем функции следующего вида:

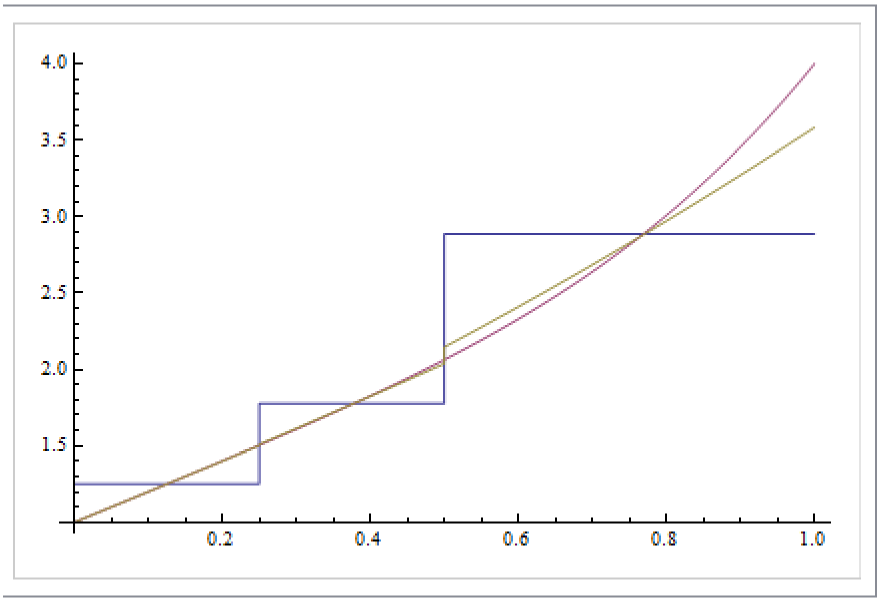
$$\varphi(t) = t^2|t^2| + 2t + 1$$

Построим для этого примера таблицу оценок приближений:

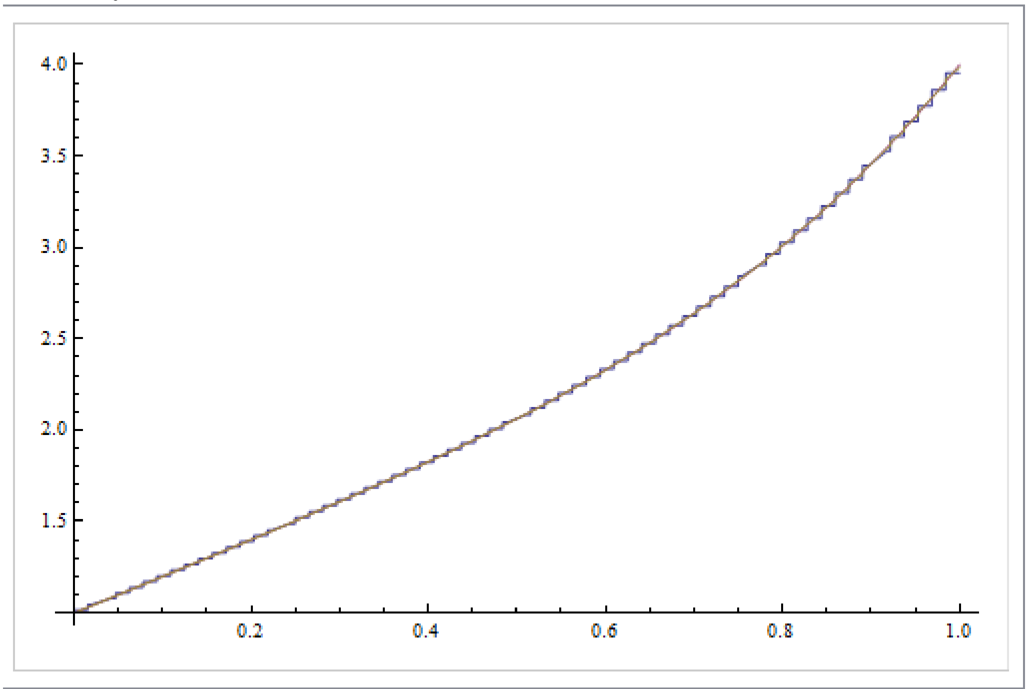
n:	$\varphi - S_n\varphi$	$\varphi - \Pi_n\varphi$
1:	1.8	3
2:	0.549977	0.0827415
3:	0.35233	0.0242799
4:	0.128192	0.0221784
5:	0.0900942	0.0209214
6:	0.0429968	0.00345676
7:	0.0242285	0.00362241

Построим:

для случая $n = 3$:



для случая $n = 7$:



Заключение

В выпускной работе было изучено пространство $C\{m;0\}$ и ее свойства, выведены свойства оператора T. Введено новое пространство $KC\{m;0\}$, построен обобщенный оператор $\Pi_n\varphi$ на основе сумм Фурье-Хаара, учитывающий структурные свойства функции и оценку сходимости для этого оператора. Доказали линейность, оценку нормы и равномерную сходимость обобщенного оператора. Проведен численный эксперимент, результаты которого показывают преимущества обобщенного оператора на рядом Фурье—Хаара для функций из $C\{m;0\}$.

Литература

[1] Bart, G.R. *Linear integral equations of the third kind* / G.R. Bart, R.L. Warnock // SIAM J. Math. Anal. — 1973. — Vol. 4. — No 4. — P. 609–622.

[2] Galkina,S.Yu. *On the Fourier–Haar Coefficients of Functions of Several Variables with Bounded Vitali Variation* // Mathematical Notes — 2001. — Vol.70 — №6 — P. 733-743.

[3] Oniani, G.G. *On the Divergence of Multiple Fourier–Haar Series* / G.G. Oniani // Doklady Akademii Nauk — 2008. — Vol. 419 — №2 — P. 169-170.

[4] Tsagareishvili,V. *Fourier-Haar coefficients of continuous functions* / V.Tsagareishvili. // Acta Math. Hungar. — 2011. — Vol.132 — №1-№2 — P. 1-14

[5] Абдурахман *Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части*: дис. …канд. физ.-мат.наук. /Абдурахман; Ростовский гос. ун-т. — Ростов-на-Дону, 2003. — 142 С.

[6] Габбасов, Н.С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций* / Н.С. Габбасов. — Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2006. — 176 с.

[7] Голубов, Б.И. *О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара* / Б. И. Голубов // Матем. серия. — 1964. — Т. 28 — №6 — С. 1271-1296.

[8] Замалиев, Р.Р. *Прямой метод решения интегрального уравнения третьего рода с особенностями в ядре* / Р. Р. Замалиев. //Тр. мат. центра им. Н.И.Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2009. - Т.39 - С.218-222

[9] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов* –М.: Физматгиз, 1978. – 400 с.

[10] Соболь, И.М. *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара* / И. М. Соболь. - Москва: Издательство "Наука", 1969. — 288 С.

[11] Соловьева, С.А. *О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода в пространстве обобщенных функций* : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. / С.А. Соловьева; Казан. гос. ун-т. — Казань, 2007. — 111 с.