Известия вузов. Математика
2018, №11, с. 3–14

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

П.В. БИБИКОВ, Н.А. САФОНКИН

О КЛАССИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассматривается задача глобальной классификации обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, правая часть которых является дробно-линейной функцией по y с рациональными коэффициентами по переменной x, относительно группы точечных преобразований, сохраняющих данный класс уравнений. Вычисляется поле дифференциальных инвариантов этой группы, а также доказывается критерий эквивалентности двух уравнений такого типа. Приводятся примеры применения этого критерия, построенные с помощью компьютера.

Ключевые слова: обыкновенные диффрененциальные уравнения, дифференциальный инвариант, пространство джетов, алгебраическая геометрия.

УДК: 517.923 : 514.763

Введение

Проблема классификации дифференциальных уравнений относительно действия контактной и точечной псевдогрупп является одной из важнейших проблем в математике, поставленной еще во времена С. Ли и активно изучаемой и по сей день. В некоторых случаях эту проблему удалось решить (например, [1], [2]), в то время как в других случаях до сих пор не удается даже приблизиться к решению.

В недавней работе [3] одному из авторов удалось решить проблему С. Ли точечной классификации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка вида $y'' = F(x, y)$, где F — гладкая функция общего положения. Однако полученный критерий классификации (как, впрочем, и все другие классификационные теоремы в этой области) был неэффективен, т. е. его нельзя было реализовать с помощью компьютера. Связано это с необходимостью вычислять соотношения между различными гладкими функциями, что невозможно сделать явно в случае функций общего положения. Однако подобные соотношения можно вычислять явно для функций рациональных.

По всей видимости, первая попытка классифицировать дифференциальные уравнения лишь с рациональными (а не с произвольными гладкими) коэффициентами была предпринята в работе [4]. Там же отмечается, что такая классификация имеет ряд преимуществ по сравнению с классической. Во-первых, она эффективна, т. е. можно вычислять необходимые соотношения явно с помощью компьютера, а во-вторых, она глобальна, т. е. справедлива почти всюду, а не только в малой окрестности данной точки. Наконец, в-третьих, группа,

Поступила 30.09.2017

Благодарности. Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований мол_а_дк 16-31-60018.

сохраняющая класс таких уравнений, является подгруппой в группе Кремоны $\mathrm{Cr}(2)$ бирациональных отображений комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, что дает возможность изучать действия таких подгрупп с точки зрения дифференциальной геометрии, а не алгебраической.

Подобным образом, заменяя гладкие объекты рациональными, можно ставить очень интересные вопросы, являющиеся аналогами классических (возможно, уже решенных) проблем и требующие для своего решения не только дифференциально-геометрической, но и алгебраической техники. Подобный синтез алгебры и геометрии был реализован в серии работ [5]–[11] и привел к ярким и интересным результатам.

В связи с этим представляется естественным изучить следующую фундаментальную проблему: *классифицировать ОДУ вида $y' = F(x,y)$ с рациональными правыми частями относительно действия группы Кремоны* $\mathrm{Cr}(2)$. Данная проблема является аналогом классического результата С. Ли, утверждающего (см., например, [12]), что все ОДУ вида $y' = F(x,y)$ с гладкими правыми частями локально точечно эквивалентны в окрестности неособой точки.

Удивительным оказывается тот факт, что в отличие от классического результата С. Ли, классификация ОДУ с рациональными коэффициентами относительно действия группы Кремоны $\mathrm{Cr}(2)$ *нетривиальна*. Например, уравнения $y' = x$ и $y' = y$ неэквивалентны, поскольку решения первого являются алгебраическими, а решения второго — трансцендентными кривыми. С другой стороны, уравнения $y' = 1/x$ и $y' = y$ эквивалентны: достаточно просто поменять переменные x и y местами.

В такой общей постановке вопрос представляется крайне сложным. В данной работе делается первый шаг на пути к его решению: рассматривается классификация ОДУ вида

$$y' = \frac{A(x)y + B(x)}{C(x)y + D(x)}, \quad \text{где } A,\ B,\ C,\ D \text{ — рациональные функции.}$$

Для данного класса ОДУ вычисляется группа симметрий (являющаяся подгруппой в группе Кремоны $\mathrm{Cr}(2)$), строится поле ее дифференциальных инвариантов и доказывается критерий глобальной эквивалентности двух ОДУ указанного вида относительно действия группы симметрий.

1. Группа симметрий и ее действие

Все изучения будем проводить над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть J^1 — пространство 1-джетов ростков голоморфных функций $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с каноническими координатами (x, y, p). Тогда дифференциальному уравнению

$$y' = \frac{A(x)y + B(x)}{C(x)y + D(x)} \tag{1}$$

с рациональными коэффициентами A, B, C, D можно сопоставить алгебраическое многообразие $\mathcal{E}$ в пространстве J^1:

$$\mathcal{E} = \left\{ p = \frac{A(x)y + B(x)}{C(x)y + D(x)} \right\} \subset J^1.$$

Замечание 1. Отметим, что среди решений уравнений вида (1) можно встретить как решения, задающие алгебраические кривые на плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (x, y), так и решения, задающие трансцендентные кривые (более того, их решения выражаются через различные спецфункции). Рассмотрим несколько примеров.

(a) Уравнение $y' = -x/y$ имеет алгебраические решения $x^2 + y^2 = c$ (в частности, $y = \pm ix$ — решения).
(b) Уравнение $y' = -1/(2y)$ имеет алгебраические решения $x + y^2 = c$.

(c) Уравнение $y' = (y+x)/(x^2y+x)$ имеет трансцендентные решения, задаваемые формулой
$$(xy+1)^2 = 1 + 2x^2 \ln(cx).$$

(d) Уравнение $y' = (y+x)/y$ имеет трансцендентное решение, задаваемое уравнением
$$\ln(y^2 - xy - x^2) + \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}x}\right) = c.$$

(e) Уравнение $y' = (xy+x)/y$ имеет трансцендентное решение, задаваемое формулой
$$y = -\mathrm{Lambert\,W}\left(\frac{e^{-x^2/2}}{c}\right) - 1,$$
где Lambert W — так называемая функция Ламберта, задаваемая функциональным уравнением
$$\mathrm{Lambert\,W}(x) \cdot e^{\mathrm{Lambert\,W}(x)} = x.$$

(f) Уравнение $y' = (xy+1)/(xy)$ имеет трансцендентные решения, задаваемые уравнением $x-y = \sqrt{2}z(x)$, где функция $z(x)$ является решением функционального уравнения $2e^{z^2} + \sqrt{2\pi}x \cdot \operatorname{erf}(z) = cx$ и $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\, du$ — гауссов интеграл ошибок.

(g) Уравнение $y' = y/(x^2y+1)$ имеет трансцендентные решения, задаваемые уравнением
$$\frac{\mathrm{Bessel}_1(0, 2\sqrt{y}) + x\sqrt{y} \cdot \mathrm{Bessel}_1(1, 2\sqrt{y})}{\mathrm{Bessel}_2(0, 2\sqrt{y}) + x\sqrt{y} \cdot \mathrm{Bessel}_2(1, 2\sqrt{y})} = c,$$
где $\mathrm{Bessel}_{1,2}(\nu, t)$ — функции Бесселя. Они удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению второго порядка
$$t^2u''(t) + tu'(t) + (t^2 - \nu^2)u(t) = 0.$$

Отсюда следует, что даже на таком классе уравнений действие всей группы Кремоны $\mathrm{Cr}(2)$ нетранзитивно (в частности, дифференциальные уравнения (a) и (b) неэквивалентны уравнениям (c)–(g) относительно группы $\mathrm{Cr}(2)$).

Нашей первой целью является нахождение группы симметрий G данного класса ОДУ, т.е. таких преобразований $g \in \mathrm{Cr}(2)$, что $g^{(1)}(\mathcal{E}) = \widetilde{\mathcal{E}}$, где $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ имеют вид (1). Данное условие удобнее записывать в инфинитезимальной форме, вычисляя алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы симметрий G. Векторное поле $X \in \mathfrak{g}$ является инфинитезимальной симметрией, если для его продолжения $X^{(1)}$ в пространство 1-джетов J^1 выполняется следующее условие:
$$L_{X^{(1)}}(\mathcal{E})|_{\mathcal{E}} = \frac{P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)}{(C(x)y + D(x))^2}, \quad \text{где } P(x),\ Q(x),\ R(x) \in \mathbb{C}(x). \tag{2}$$

Теорема 1. 1. *Группа симметрий G класса ОДУ вида* (1) *состоит из преобразований вида*
$$g : (x, y) \mapsto \left(\frac{\varphi_1 x + \varphi_2}{\psi_1 x + \psi_2}, \eta y + \xi(x)\right),$$
где
$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}), \quad \xi(x) \in \mathbb{C}(x), \quad \eta \in \mathbb{C}.$$

2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ инфинитезимальных симметрий ОДУ вида* (1) *состоит из ростков векторных полей вида*
$$X = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\partial_x + (\delta y + \sigma(x))\partial_y, \quad \text{где } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{C} \text{ и } \sigma(x) \in \mathbb{C}(x).$$

Доказательство. С помощью компьютерной системы `Maple` легко проверить, что *мероморфные* точечные преобразования, сохраняющие класс уравнений (1), имеют вид

$$x \mapsto X(x), \quad y \mapsto \eta y + \xi(x).$$

Теперь вспомним, что наши преобразования должны сохранять рациональность коэффициентов A, B, C и D уравнений (1), а потому функция ξ должна быть рациональной, а преобразование $x \mapsto X(x)$ должно быть бирациональным. Как известно (см., например, [10]), это возможно, если и только если $X(x) = \frac{\varphi_1 x+\varphi_2}{\psi_1 x+\psi_2}$ — дробно-линейное преобразование. Тем самым п. 1 теоремы доказан.

Пункт 2 немедленно следует из п. 1. □

Поскольку коэффициенты A, B, C, D в правой части определены с точностью до умножения на ненулевую рациональную функцию λ, далее мы будем работать в открытом и всюду плотном подмножестве $S' = S \cap \{C = 1\}$ пространства S всех уравнений вида $y' = \frac{A(x)y+B(x)}{C(x)y+D(x)}$ (в случае $C \equiv 0$ мы получаем неоднородное линейное уравнение первого порядка, которое интегрируется явно и потому не представляет особого интереса). Отметим, что условие $C = 1$ не является G-инвариантным, однако позволяет ввести координаты (A, B, D) на подмножестве S'.

На подмножестве S' действует псевдогруппа Ли G', ассоциированная с группой G (она получается локализациями). Мы вычислим действие этой псевдогруппы G' на множестве S', а также поле дифференциальных инвариантов этого действия. Отметим, что дифференциальные инварианты действия G на S находятся во взаимно однозначном соответствии с дифференциальными инвариантами действия G' на S', поэтому, используя найденные дифференциальные инварианты действия G' на S', мы сможем описать и орбиты действия G на S, что по сути эквивалентно классификации ОДУ вида $y' = \frac{A(x)y+B(x)}{C(x)y+D(x)}$ с рациональными коэффициентами A, B, C, D.

Итак, вычислим действия псевдогруппы G' и ее алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ на коэффициенты A, B, D правой части ОДУ вида $y' = \frac{A(x)y+B(x)}{y+D(x)}$. Соответствующие группу и алгебру обозначим через $\widehat{G}'$ и $\widehat{\mathfrak{g}}'$ соответственно.

Предложение. 1. *Действие псевдогруппы $\widehat{G}'$ на коэффициенты A, B, D правой части уравнения имеет следующий вид*:

$$x \mapsto \frac{\varphi_1 x + \varphi_2}{\psi_1 x + \psi_2}, \tag{3}$$
$$A \mapsto (\eta A + \xi'(x))(\psi_1 x + \psi_2)^2, \tag{4}$$
$$B \mapsto (\eta^2 B + \eta\xi'(x)D - \xi(x)(\eta A + \xi'(x)))(\psi_1 x + \psi_2)^2, \tag{5}$$
$$D \mapsto \eta D - \xi(x). \tag{6}$$

2. *Алгебра Ли $\widehat{\mathfrak{g}}'$ состоит из ростков векторных полей вида*

$$\widehat{X} = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\partial_x + (\sigma'(x) - 2\alpha x A - \beta A + \delta A)\partial_A + \\ + (\sigma'(x)D - \sigma(x)A + 2\delta B - 2\alpha x B - \beta B)\partial_B + (-\sigma(x) + \delta D)\partial_D. \tag{7}$$

Доказательство. 1. Возьмем произвольное преобразование $g \in G'$. Тогда его продолжением в пространстве 1-джетов J^1 будет преобразование

$$g^{(1)} : (x, y, p) \mapsto \left(\frac{\varphi_1 x + \varphi_2}{\psi_1 x + \psi_2}, \eta y + \xi(x), (\psi_1 x + \psi_2)^2(\eta p + \xi'(x)) \right).$$

Вычислив его действие на уравнение (1), получаем искомые формулы.

2. Для нахождения векторных полей из алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}'$ используем формулу (2). А именно, выразим функции $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ через коэффициенты векторного поля $\widehat{X}$. Мы получим систему из трех линейных уравнений уравнений с тремя неизвестными — коэффициентами $\widehat{X}$. Решив эту систему, мы получим явный вид искомого векторного поля, указанный в формуле (7). $\square$

Замечание 2. Заметим, что псевдогруппа $\widehat{G}'$ является связной. Это замечание будет использовано далее при вычислении дифференциальных инвариантов действия этой группы на коэффициентах уравнения (1).

2. Поле дифференциальных инвариантов

Теперь нашей целью является изучение действия группы $\widehat{G}'$ и алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}'$ на тройках (A, B, D) рациональных функций. Для этого мы воспользуемся аппаратом теории дифференциальных инвариантов.

Обозначим пространство k-джетов троек функций $(A, B, D) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ через $J^k(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$. Канонические координаты в этом пространстве обозначим через $(x, a, b, d, a_1, b_1, d_1, \dots)$. Действия псевдогруппы $\widehat{G}'$ и алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}'$, вычисленные в предложении, на пространстве $J^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$ канонически продолжаются до действий на пространстве k-джетов $J^k(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$ для любого k, а также до действия на пространстве бесконечных джетов $J^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3) = \varprojlim J^k(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$. Обозначим продолжения векторных полей $\widehat{X} \in \widehat{\mathfrak{g}}'$ через $\widehat{X}^{(k)}$, продолжение всей алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}'$ — через $\widehat{\mathfrak{g}}'^{(k)}$, а продолжение псевдогруппы $\widehat{G}'$ — через $\widehat{G}'^{(k)}$.

Определение 1. *Дифференциальным инвариантом порядка* $\leqslant k$ действия псевдогруппы $\widehat{G}'$ на пространстве $J^k(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$ называется $\widehat{G}'$-инвариантная рациональная функция I: $g^{(k)} \circ I = I$ для всех $g^{(k)} \in \widehat{G}'^{(k)}$.

Определение 2. *Инвариантным дифференцированием* называется дифференцирование $\nabla : \mathbb{C}(J^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)) \to \mathbb{C}(J^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3))$ с рациональными коэффициентами, перестановочное с действием псевдогруппы $\widehat{G}'$: $\nabla \circ g^{(\infty)} = g^{(\infty)} \circ \nabla$ для всех элементов $g^{(\infty)} \in \widehat{G}^{(\infty)}$.

Замечание 3. Поскольку псевдогруппа $\widehat{G}'$ связна, то ее дифференциальные инварианты совпадают с дифференциальными инвариантами ее алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{g}}'$, т. е. с функциями, постоянными вдоль всех векторных полей $\widehat{X}^{(\infty)} \in \widehat{\mathfrak{g}}'^{(\infty)}$.

Замечание 4. Согласно теореме Ли–Трессе, поле дифференциальных инвариантов локально порождается конечным набором дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований. В работе [11] доказано, что при некоторых условиях этот результат верен не только локально, но и глобально. В случае действия псевдогруппы $\widehat{G}'$ на пространстве бесконечных джетов $J^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$ этот результат также справедлив (см. теорему 2).

Первый основной результат данной работы заключается в вычислении поля дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы $\widehat{G}'$ на пространстве бесконечных джетов $J^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$.

Теорема 2. *Поле дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы $\widehat{G}'$ на пространстве бесконечных джетов $J^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C}^3)$ свободно порождается двумя дифференциальными инвариантами*

$$I := \frac{(ad-b)d_2 - ad_1^2 - (a^2 + da_1 - b_1)d_1 + (ab_1 - ba_1)}{(a+d_1)^3},$$

$$J := \frac{2(ad-b)(b_2 - a_2 d + a_1 d_1 - d_2 a) + 3(a_1 d - b_1)^2 + 3d_1(2a_1 b - 2ab_1 + a^2 d_1)}{(a+d_1)^4}$$

и одним инвариантным дифференцированием

$$\nabla := \frac{ad-b}{(a+d_1)^2}\cdot\frac{d}{dx}.$$

Это поле разделяет $\widehat{G}'$-орбиты неособых джетов.

Доказательство. 1. Прежде всего покажем, что, начиная с $k=2$, существует в точности два независимых дифференциальных инварианта чистого порядка k. Для этого мы воспользуемся аппаратом алгебр изотропии (см., например, [3], [4]).

Рассмотрим естественную проекцию $\pi_{k,k-1}: J^k(\mathbb{C},\mathbb{C}^3)\to J^{k-1}(\mathbb{C},\mathbb{C}^3)$, бесконечный джет $\theta_\infty=\{\theta_i\}$ общего положения и слой $V_{\theta_{k-1}}$ этой проекции над джетом θ_{k-1}.

Определим подалгебру изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}\subset\widehat{\mathfrak{g}}'^{(k)}$, состоящую из векторных полей $\widehat{X}^{(k)}\in\widehat{\mathfrak{g}}'^{(k)}$, обращающихся в нуль в точке θ_{k-1}:

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}=\{\widehat{X}^{(k)}\in\widehat{\mathfrak{g}}'^{(k)}:\widehat{X}^{(k-1)}_{\theta_{k-1}}=0\}.$$

Подалгебра изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ действует на слое $V_{\theta_{k-1}}$. Количество независимых дифференциальных инвариантов чистого порядка k равно коразмерности орбиты общего положения этого действия.

Размерность слоя $V_{\theta_{k-1}}$ равна трем. Поэтому для того, чтобы узнать коразмерность орбиты общего положения, нам достаточно явно вычислить все подалгебры изотропии. Из формулы (7) следует, что векторные поля в подалгебре изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ зависят от величин α, β, γ, δ и $\sigma_i:=\sigma^{(i)}(x)$, где $i\leqslant k+1$, и имеют следующий вид:

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{-1}}=\{(\sigma_1+(\delta-\beta)a)\partial_a+(\sigma_1 d-\sigma_0 a+(2\delta-\beta)b)\partial_b+(\delta d-\sigma_0)\partial_d\},$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_0}=\{(\sigma_2-2\alpha a-3a_1\delta)\partial_{a_1}+(\sigma_2 d-\delta(a^2+a_1 d+2b_1-ad)-2\alpha b)\partial_{b_1}-\delta(a+d_1)\partial_{d_1}\},$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}=\{\sigma_{k+1}(\partial_{a_k}+d\partial_{b_k})\}\quad\text{при}\quad k\geqslant 2.$$

Таким образом, коразмерности орбит действия алгебр изотропии $\widehat{\mathfrak{g}}_{\theta_{k-1}}$ равны нулю при $k\leqslant 1$ и равны двум при $k\geqslant 2$, что и требовалось доказать.

2. Теперь заметим, что функции I и J, а также дифференцирование ∇ действительно являются инвариантными (это проверяется прямыми вычислениями в компьютерной системе `Maple`) и порождают ровно два независимых дифференциальных инварианта $\nabla^{k-2}I$, $\nabla^{k-2}J$ чистого порядка k. Эти инварианты аффинны по слоям проекции $\pi_{k,k-1}$, и из п. 1 следует, что других независимых дифференциальных инвариантов порядка k не существует. Поэтому инварианты $\nabla^i I$, $\nabla^i J$ при $i\leqslant k-2$ разделяют $\widehat{G}'^{(k)}$-орбиты джетов общего положения и рационально порождают поле дифференциальных инвариантов порядка $\leqslant k$. Тем самым все поле дифференциальных инвариантов порождается инвариантами I и J и дифференцированием ∇. □

Замечание 5. Из п. 1 доказательства теоремы следует описание особых джетов, т.е. джетов, $\widehat{G}'$-орбиты которых имеют немаксимальную размерность. А именно, особыми являются джеты, проектирующиеся в одно из множеств

$$\{ad-b=0\}\subset J^0(\mathbb{C},\mathbb{C}^3)\quad\text{или}\quad\{a+d_1=0\}\subset J^1(\mathbb{C},\mathbb{C}^3).$$

3. Классификация

В этом разделе мы докажем критерий глобальной эквивалентности двух невырожденных ОДУ вида $y'=\big(A(x)y+B(x)\big)/\big(y+D(x)\big)$ относительно псевдогруппы $\widehat{G}'$. Мы будем рассматривать лишь те дифференциальные уравнения, которые удовлетворяют условию регулярности. Чтобы сформулировать его, положим для краткости $K:=(A,B,D)$ — набор рациональных коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$. Тогда уравнение $\mathcal{E}$ назовем *регулярным*, если множество точек $a \in \mathbb{C}$ таких, что 2-джет $[K]^2_a$ является неособым, является плотным по Зарисскому подмножеством (т. е. содержит в себе открытое по Зарисскому подмножество) в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим инварианты I, J, $I_1 := \nabla I$ и $J_1 := \nabla J$. Их ограничения на заданное регулярное дифференциальное уравнение $\mathcal{E}$ определяет рациональный морфизм

$$\pi_{\mathcal{E}} : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^4, \quad \pi_{\mathcal{E}}(a) = (I([A,B,D]^3_a), J([A,B,D]^3_a), I_1([A,B,D]^3_a), J_1([A,B,D]^3_a)).$$

Замыкание образа этого морфизма в топологии Зарисского является рациональной алгебраической кривой: $\mathcal{C}_{\mathcal{E}} := \overline{\mathrm{Im}(\pi_{\mathcal{E}})}$. Ее идеал нулей $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ является идеалом полиномиальных зависимостей между ограничениями наших четырех инвариантов на данное уравнение $\mathcal{E}$.

Теорема 3. 1. *Два ОДУ $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ являются $\widehat{G}'$-эквивалентными, если и только если $\mathcal{C}_{\mathcal{E}} = \mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$.*

2. *Два ОДУ $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ являются $\widehat{G}'$-эквивалентными, если и только если $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathcal{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$.*

Доказательство. Очевидно, если ОДУ $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ являются $\widehat{G}'$-эквивалентными, то $\mathcal{C}_{\mathcal{E}} = \mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathcal{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$. Докажем обратные утверждения.

Прежде всего заметим, что совпадение кривых $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$ влечет совпадение идеалов $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}}$, и наоборот. Предположим, что $\mathcal{C}_{\mathcal{E}} = \mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{E}}} =: \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathcal{D}_{\widetilde{\mathcal{E}}} =: \mathcal{D}$. Тогда для любой точки a из открытого по Зарисскому подмножества $\mathbb{C}^2$ найдется точка $\widetilde{a}$ из этого же подмножества такая, что $\pi_{\mathcal{E}}(a) = \pi_{\widetilde{\mathcal{E}}}(\widetilde{a})$. Это означает, что значения инвариантов I, J, I_1 и J_1 на 3-джетах $[K]^3_a$ и $[\widetilde{K}]^3_{\widetilde{a}}$ коэффициентов уравнений $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ в точках a и $\widetilde{a}$ соответственно совпадают. Согласно теореме 2 эти джеты являются $\widehat{G}'^{(3)}$-эквивалентными, т. е. существует элемент $g^3_{a,\widetilde{a}} \in \widehat{G}^{(3)}$ такой, что $g^3_{a,\widetilde{a}} \circ [K]^3_a = [\widetilde{K}]^3_{\widetilde{a}}$.

Теперь продифференцируем соотношения из идеала $\mathcal{D}$. Тогда значения инвариантов четвертого порядка будут однозначно выражаться через значения инвариантов I, J, I_1, J_1. Поэтому из теоремы 2 следует $\widehat{G}'^{(4)}$-эквивалентность 4-джетов $[K]^4_a$ и $[\widetilde{K}]^4_{\widetilde{a}}$, т. е. существует элемент $g^4_{a,\widetilde{a}} \in \widehat{G}'^{(4)}$ такой, что $g^4_{a,\widetilde{a}} \circ [K]^4_a = [\widetilde{K}]^4_{\widetilde{a}}$.

Рассуждая аналогично, построим бесконечный джет $g^\infty_{a,\widetilde{a}} := \{g^k_{a,\widetilde{a}}\} \in \widehat{G}'^{(\infty)}$ такой, что $g^\infty_{a,\widetilde{a}} \circ [K]^\infty_a = [\widetilde{K}]^\infty_{\widetilde{a}}$. Таким образом, наборы коэффициентов K и $\widetilde{K}$ формально эквивалентны.

Теперь докажем их эквивалентность в гладких функциях. Для этого воспользуемся предложением. А именно, рассмотрим условие $g \circ K = \widetilde{K}$ как систему уравнений на неизвестные компоненты φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, η, $\xi(x)$. Заметим, что коэффициенты φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, η могут быть найдены из координатного вида элемента $g^\infty_{a,\widetilde{a}}$, а функция $\xi(x)$ — из формулы (6). Поскольку бесконечные джеты $[K]^\infty_a$ и $[\widetilde{K}]^\infty_{\widetilde{a}}$ эквивалентны, то $[g]^\infty_a = g^\infty_{a,\widetilde{a}}$ для всех a и $\widetilde{a}$ из плотного по Зарисскому подмножества в $\mathbb{C}^2$. Поэтому

$$[g \circ K]^\infty_{\widetilde{a}} = [g]^\infty_a \circ [K]^\infty_a = [\widetilde{K}]^\infty_{\widetilde{a}}.$$

Вспоминая, что функции K и $\widetilde{K}$ рациональны, получаем $g \circ K = \widetilde{K}$. □

4. Примеры

В этом разделе мы приведем некоторые примеры использования теоремы 3. Сначала мы вычислим образующие идеалов $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ для конкретных уравнений $\mathcal{E}$ и нарисуем соответствующие им алгебраические кривые (в проекции на некоторые вещественные плоскости). Далее мы используем формулы из предложения для того, чтобы с помощью теоремы 3 получить примеры обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих рациональные решения.

4.1. *Идеалы $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ и алгебраические кривые.* Опишем процедуру вычисления многочленов из идеала $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$. Для простоты ограничимся многочленами от двух инвариантов (хотя с

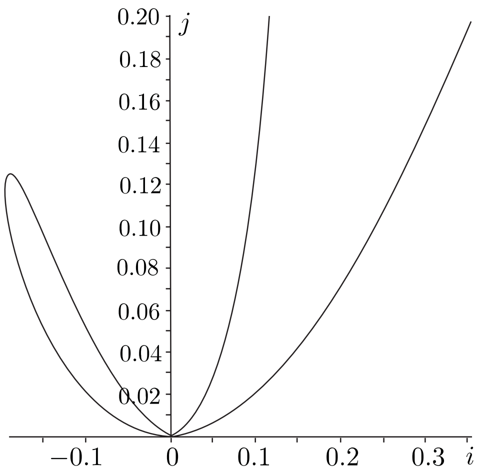

Рис. 1. Кривая зависимости между i и j

помощью аналогичных соображений удается вычислить многочлены от трех и четырех инвариантов). Рассмотрим ограничения $i := I(K)$ и $j := J(K)$ базисных дифференциальных инвариантов I и J на набор $K = (A, B, D)$ коэффициентов дифференциального уравнения

$$y' = \frac{A(x)y + B(x)}{y + D(x)}.$$

Перейдем к полиномам

$$\mathrm{pol}_1 := \mathrm{numer}(i) - \mu \cdot \mathrm{denom}(i) \quad \text{и} \quad \mathrm{pol}_2 := \mathrm{numer}(j) - \nu \cdot \mathrm{denom}(j),$$

где $\mathrm{numer}(\cdot)$ и $\mathrm{denom}(\cdot)$ — числитель и знаменатель дроби. Тогда неприводимый множитель результанта многочленов pol_1 и pol_2 (посчитанного относительно переменной x) является искомым полиномом зависимостей между инвариантами I и J.

В качестве примера рассмотрим уравнение (g) из замечания 1:

$$y' = \frac{y}{x^2y + 1}.$$

Инварианты принимают вид

$$i = \frac{2x(x-1)}{(x-2)^3}, \quad j = \frac{8x^2}{(x-2)^4}, \quad i_1 = -\frac{2x^2(x^2+2x-2)}{(x-2)^6}, \quad j_1 = -\frac{16x^3(x+2)}{(x-2)^7}.$$

1) Зависимость между i и j:

$$j^3 + 24ij^2 - 8j^2 + 80i^2j - 128i^4 = 0.$$

2) Зависимость между i и i_1:

$$i^4 - 27i^6 - 27i_1i^4 - 9i_1^2i^2 + 12ii_1^2 - 2i_1^2 + i_1i^2 - i_1^3 = 0.$$

3) Зависимость между i и j_1:

$$1536i^6 + 8192i^7 + j_1^3 + 672j_1i^3 - 168j_1^2i^2 + 4160i^4j_1 + 248j_1^2i - 48j_1^2 = 0.$$

4) Зависимость между i_1 и j:

$$81j^6 - 144j^5 + 16j^4 - 2304i_1^2j^3 + 1440i_1j^4 + 16384i_1^4 - 128i_1j^3 - 768i_1^2j^2 + 4096i_1^3j = 0.$$

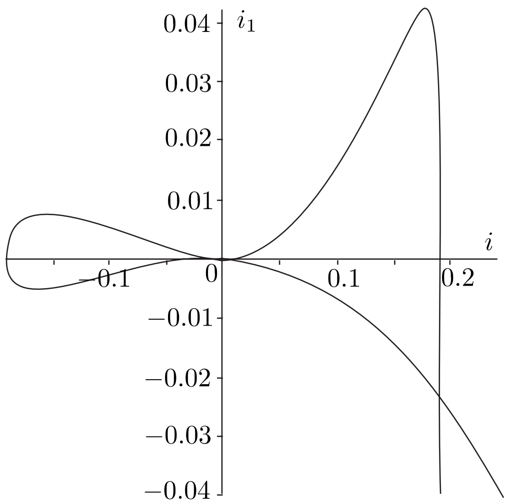

Рис. 2. Кривая зависимости между i и i_1

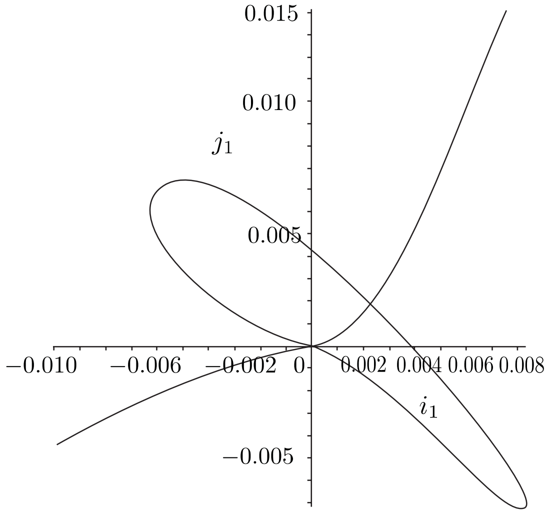

Рис. 3. Кривая зависимости между i_1 и j_1

5) Зависимость между j и j_1:

$$8j^7 - j^6 + 4j^3 j_1^2 - 4j_1^4 = 0.$$

6) Зависимость между i_1 и j_1:

$$7168 j_1^2 i_1^3 + 5376 j_1^3 i_1^2 + 7200 j_1^4 i_1 - 196608 j_1 i_1^5 - 1708032 i_1^4 j_1^2 + 262144 i_1^6 - \\ - 2820096 j_1^3 i_1^3 + 7128 j_1^5 - 896832 j_1^4 i_1^2 - 81648 j_1^5 i_1 - 67108864 i_1^7 - 2187 j_1^6 - 32 j_1^4 = 0.$$

Идеал зависимостей $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ задается своей системой порождающих: $\langle 12i^2 + 4ij + j_1 + 12i_1 - 3j, 48i^3 - 3j^2 + 16i_1 i + 48i^2 + 8j_1 + 48i_1 - 12j, 16i_1 j + 7j^2 - 12j_1 i + 32i_1 i - 12i^2 - 5j_1 - 12i_1 + 3j, 9j^3 - 128i_1^2 - 18jj_1 + 74j^2 - 48j_1 i + 320i_1 i - 120i^2 - 50j_1 - 120i_1 + 30j, 384i_1 i^2 + 128i_1^2 - 18jj_1 + 169j^2 - 156j_1 i + 736i_1 i - 276i^2 - 115j_1 - 276i_1 + 69j, 144j_1 i^2 + 48i_1 j_1 + 512i_1^2 + 30jj_1 - 233j^2 + 156j_1 i - 992i_1 i + 372i^2 + 155j_1 + 372i_1 - 93j, 18j^2 j_1 + 1024 i i_1^2 - 63j_1^2 - 416i_1 j_1 + 1216i_1^2 +$

$173jj_1 - 556j^2 + 372j_1i - 2368i_1i + 888i^2 + 370j_1 + 888i_1 - 222j, 73728i_1^3 + 972jj_1^2 + 11664j_1^2i - 25920j_1i_1i + 483840ii_1^2 - 24705j_1^2 - 186624i_1j_1 + 521536i_1^2 + 74907jj_1 - 238576j^2 + 159612j_1i - 1016128i_1i + 381048i^2 + 158770j_1 + 381048i_1 - 95262j\rangle$.

4.2. *Дифференциальные уравнения с рациональными решениями.* Пусть уравнения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, соответствующие наборам коэффициентов $K_1 = (A_1, B_1, D_1)$ и $K_2 = (A_2, B_2, D_2)$, эквивалентны относительно действия некоторого преобразования $g \in \widehat{G}'$. Тогда из предложения следует, что функция $\xi(x)$, входящая в элемент g, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\mathcal{E} = \left\{ \xi' = \frac{-\eta A_1\left(\frac{\phi_1 x+\phi_2}{\psi_1 x+\psi_2}\right)\xi - \frac{B_2(x)}{(\psi_1 x+\psi_2)^2} + \eta^2 B_1\left(\frac{\phi_1 x+\phi_2}{\psi_1 x+\psi_2}\right)}{\xi - \eta D_1\left(\frac{\phi_1 x+\phi_2}{\psi_1 x+\psi_2}\right)} \right\}.$$

Удивительным образом это уравнение на функцию ξ имеет вид (1). Более того, у этого уравнения существует рациональное решение, т. е. по двум эквивалентным уравнениям вида (1) можно построить уравнение того же вида, обладающее рациональным решением. Назовем такое уравнение *ассоциированным* с парой исходных уравнений.

Теорема 4. *Уравнение* (1) *имеет рациональное решение, если и только если оно ассоциировано с парой* $\widehat{G}'$*-эквивалентных уравнений вида* (1).

Доказательство. Заметим, что достаточно доказать только прямое утверждение теоремы, поскольку обратное утверждение немедленно следует из предложения.

Пусть уравнение

$$\mathcal{E} = \left\{ y' = \frac{A(x)y + B(x)}{y + D(x)} \right\}$$

имеет рациональное решение $y = \xi(x)$. Покажем, что оно ассоциировано с некоторой $\widehat{G}'$-эквивалентной парой. Зафиксируем произвольные комплексные числа ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2, η такие, что $\eta \neq 0$ и

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}),$$

и построим преобразование

$$g : (x, y) \mapsto \left(\frac{\phi_1 x + \phi_2}{\psi_1 x + \psi_2}, \eta y + \xi \right).$$

Построим два уравнения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ вида (1), которые будут эквивалентны относительно преобразования g, а ассоциированным с ними уравнением будет $\mathcal{E}$.

Пусть

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ y' = \frac{A_1(x)y + B_1(x)}{y + D_1(x)} \right\}, \quad \mathcal{E}_2 = \left\{ y' = \frac{A_2(x)y + B_2(x)}{y + D_2(x)} \right\}.$$

Тогда условие того, что $\mathcal{E}$ является для них ассоциированным уравнением, записывается следующим образом:

$$-\eta A_1(gx) = A(x), \quad -\eta D_1(gx) = D(x), \quad -\frac{B_2(x)}{(\psi_1 x + \psi_2)^2} + \eta^2 B_1(gx) = B(x).$$

Откуда легко выразить

$$A_1(x) = -\frac{1}{\eta} A(g^{-1}x),$$

$$B_1(x) = \frac{1}{\eta^2}\left(B(g^{-1}x) + \frac{B_2(g^{-1}x)}{(\psi_1 g^{-1}x + \psi_2)^2} \right),$$

$$D_1(x) = -\frac{1}{\eta} D(g^{-1}x).$$

Из условия $g \circ \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, используя предложение, получим

$$A_2(x) = (\eta A_1(gx) + \xi'(x))(\psi_1 x + \psi_2)^2,$$

$$B_2(x) = (\eta^2 B_1(gx) + \eta\xi'(x) D_1(gx) - \xi(x)(\eta A_1(gx) + \xi'(x)))(\psi_1 x + \psi_2)^2,$$

$$D_2(x) = \eta D_1(gx) - \xi(x).$$

Заметим, что второе равенство будет выполняться при любых $B_1(x)$ и $B_2(x)$, удовлетворяющих системе выше, в силу того, что $\xi(x)$ является решением уравнения $\mathcal{E}$. Значит, при любом $B_2(x) \in \mathbb{C}(x)$ и при указанных выше ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2, η уравнения $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ будут эквивалентны, а уравнение $\mathcal{E}$ ассоциировано с ними. $\square$

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение и элемент $g \in G$:

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ y' = \frac{-xy - 1}{y} \right\}, \quad g : (x, y) \mapsto \left(x, y + \frac{1}{x} \right).$$

Тогда уравнение $\mathcal{E}_1$ перейдет в уравнение

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ y' = \frac{-(x^4 + x)y + 1}{x^3 y - x^2} \right\}.$$

Уравнение, ассоциированное с ними, имеет вид

$$\xi'(x) = \frac{\xi(x)x^4 - 1 - x^3}{\xi(x)x^3}$$

и имеет рациональное решение $\xi(x) = 1/x$.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение (c) из замечания 1 и преобразование

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ y' = \frac{y + x}{x^2 y + x} \right\}, \quad g : (x, y) \mapsto \left(x, y + \frac{1}{x^2} \right).$$

Под действием элемента $g \in G$ уравнение $\mathcal{E}_1$ превратится в

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ y' = \frac{(x^3 - 2x^2)y + x^4 - 3x + 2}{x^5 y + x^3(x - 1)} \right\}.$$

Уравнение, ассоциированное с ними, имеет вид

$$\xi'(x) = \frac{-x^3\xi(x) + 3x - 2}{x^5\xi(x) - x^4}$$

и имеет рациональное решение $\xi(x) = 1/x^2$, а общее решение дается формулой

$$(x^2\xi(x) - x)^2 = (x - 1)^2 - cx^4.$$

Литература

[1] Bibikov P. *Differential invariants and contact classification of ordinary differential equations*, Lobachevskii J. Math. **36** (3), 245–249 (2015).
[2] Kruglikov B.S. *Point classification of second order ODEs: Tresse classification revisited and beyond*, Proceedings of the Fifth Abel Symposium, Tromso, Norway, June 17–22 (Springer, Berlin, 2009), 199–221.
[3] Bibikov P. *On Lie problem and differential invariants of the equations* $y'' = F(x, y)$, Func. Analyzis and Appl. (in press).
[4] Bibikov P., Malakhov A. *On Lie problem and differential invariats for the subgroup of the plane Cremona group*, J. Geom. and Phys. (in press).
[5] Bibikov P., Lychagin V. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-*orbits of binary rational forms*, Lobachevskii J. Math. **32** (1), 94–101 (2011).
[6] Bibikov P., Lychagin V. $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$-*orbits of rational ternary forms*, Dokl. Math. **84** (1), 482–484 (2011).

[7] Bibikov P., Lychagin V. *Classification of linear actions of algebraic groups on spaces of homogeneous forms*, Dokl. Math. **85** (1), 102–109 (2012).
[8] Bibikov P., Lychagin V. *On differential invariants of actions of semisimple Lie groups*, J. Geom. and Phys., issue 85, 99–105 (2014).
[9] Bibikov P., Lychagin V. *Differential contra algebraic invariants*: *applications to classical algebraic problems*, Lobachevskii J. Math. **37** (1), 36–49 (2016).
[10] Dolgachev I., Iskovskikh V. *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Algebra, arithmetic, and geom.: in honor of Yu.I. Manin. Vol. I, Progr. Math. 269 (Boston MA: Birkhuser, Boston, 2009), 443–548.
[11] Kruglikov B., Lychagin V. *Global Lie–Tresse theorem*, Selecta Math. (N. S.) **22** (3), 1357–1411 (2016).
[12] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. *Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления **28** (ВИНИТИ, М., 1988).

Павел Витальевич Бибиков

Институт проблем управления РАН,
ул. Профсоюзная, д. 65, г. Москва, 117997, Россия,

e-mail: tsdtp4u@proc.ru

Никита Александрович Сафонкин

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",
ул. Усачева, д. 6, г. Москва, 119048, Россия,

e-mail: nikita2809@mail.ru

P.V. Bibikov and N.A. Safonkin

On classification of one class of the first order ODE

Abstract. We study the problem of global classification of ordinary differential equations with the linear-fractional right-hand side with rational coefficients with respect to the symmetry group. We find the field of differential invariants and obtain the equivalence criterion for two such equations. We adduce some examples for applying of this criterion. These examples were obtained with the help of a computer.

Keywords: ordinary differential equations, differential invariant, jet space, algebraic geometry.

Pavel Vital'evich Bibikov

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,
65 Profsoyuznaya str., Moscow, 117997 Russia,

e-mail: tsdtp4u@proc.ru

Nikita Akeksandrovich Safonkin

National Research University "Higher School of Economics",
6 Usacheva str., Moscow, 119048 Russia,

e-mail: nikita2809@mail.ru