УДК 517.544

# ЗАДАЧА РИМАНА НА ДВУЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА $O_{A^0B}$

*Н.А. Бариева, И.А. Бикчантаев*

**Аннотация**

В статье И.А. Бикчантаева (Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31) были получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на ультрагиперэллиптической поверхности. В настоящей работе этот результат обобщается на случай двулистной римановой поверхности класса $O_{A^0B}$.

**Ключевые слова:** краевые задачи, римановы поверхности.

## 1. Предварительные сведения и результаты. Постановка задачи

**1.1.** Введем следующие термины и обозначения (см. [1]). Множество $M$ на римановой поверхности или на плоскости называется $AB$-устранимым, если для некоторой окрестности $U$ множества $M$ любая аналитическая и ограниченная в $U \setminus M$ функция аналитически продолжима в $U$. Пусть $AB(R)$ – семейство аналитических и ограниченных функций на римановой поверхности $R$; $O_{AB}$ – класс римановых поверхностей, на которых не существует непостоянных $AB$-функций; $SO_{AB}$ – семейство римановых поверхностей с краем $\{\overline{R}\}$ такое, что каждая $AB$-функция $f$ на $\overline{R}$ с $\Re f = 0$ на $\partial R$ сводится к постоянной; как известно (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]), $\overline{R}$ принадлежит $SO_{AB}$ тогда и только тогда, когда ее дубль относительно края $\partial R$ принадлежит $O_{AB}$. Областью с краем $\overline{D} = D\bigcup\partial D$ будем называть объединение области $D$ на $R$ с аналитической жордановой относительной границей $\partial D$. Через $O_{A^0B}$ обозначим класс римановых поверхностей $R$ таких, что каждая подобласть с краем $\overline{R'}$ на $R$ принадлежит $SO_{AB}$. Имеет место строгое включение $O_{A^0B} \subset O_{AB}$ (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]).

**1.2.** В настоящей статье мы будем считать, что рассматриваемая риманова поверхность $R$ принадлежит классу $O_{A^0B}$ и ее род равен бесконечности.

**Предложение 1.** *Пусть $\overline{D}$ – область с компактным краем на римановой поверхности $R$ класса $O_{A^0B}$. Тогда $\overline{D}$ может быть вложена в риманову поверхность с краем $\overline{V}$ такую, что $\partial V = \partial D$, множество $V \setminus D$ $AB$-устранимо и любая ее подобласть конечного рода с компактной относительной границей относительно компактна. Если род области $D$ конечен, то $\overline{V}$ компактна.*

**Доказательство.** Если род области $D$ конечен, то требуемый результат вытекает из того, что $R \in O_{A^0B}$, и теоремы из [1, гл. II, § 3, п. 15A], примененной к дублю $\overline{D}$ относительно края $\partial D$. Пусть теперь род области $D$ бесконечен. Пусть $\{\overline{D}_n\}$ – исчерпание $\overline{D}$ областями с краем такими, что край $\partial D_n$ компактен и содержит $\partial D$, $\overline{D}_n \subset D_{n+1}\bigcup\partial D$, род поверхности $D_n$ конечен и все компоненты $D\setminus\overline{D}_n$ – области рода бесконечность. Каждая $\overline{D}_n$ вложима в компактную риманову поверхность с краем $\overline{V}_n$, причем ее род равен роду $\overline{D}_n$, $\partial V_n = \partial D_n$ и множество $V_n \setminus D_n$

является $AB$-устранимым. Тогда область $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ удовлетворяет условиям предложения. Действительно, то, что $V \setminus D$ $AB$-устранимо, следует из определения поверхности $V$. Пусть $V'$ – область на $V$, род которой конечен и относительная граница $\partial V'$ компактна. При достаточно большом $n$ справедливо вложение $V_n \supset \supset \partial V'$. Покажем, что $V' \subset V_n$. Если допустить противное, то найдется точка $q \in V' \setminus V_n$. Так как множество $V \setminus V_n$ не содержит точек относительной границы области $V'$, то $V'$ должна включать в себя компоненту множества $V \setminus V_n$, содержащую точку $q$. Но род последней, а, следовательно, и род $V'$, равен бесконечности. Полученное противоречие показывает, что $V' \subset V_n$ и $\overline{V'}$ как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V}_n$ компактно. Предложение доказано. □

Доказанное утверждение справедливо также и в том случае, когда относительная граница области $D$ является пустым множеством, то есть $D = R$. Соответствующую этому случаю область $V$ обозначим через $R^*$.

**1.3.** Если $f$ – мероморфная функция на $D$, ограниченная вблизи идеальной границы, то она аналитически продолжима в $V$; это продолжение условимся обозначать той же буквой.

Предположим теперь, что на $R$ существует мероморфная функция $z$, принимающая каждое значение $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ не более двух раз с учетом кратности. Тогда $R$ может быть реализована в виде накрывающей $(R, z)$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Продолженная аналитически на $R^*$ функция $z$ определяет безграничную накрывающую $(R^*, z)$ для области $z(R^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$, на которой существует отличное от тождественного преобразование наложения $j_{R^*}$, то есть конформный автоморфизм поверхности $R^*$, удовлетворяющий соотношению $z(j_{R^*}(q)) = z(q)$ для всех $q \in R^*$.

Род поверхности $V$, очевидно, равен роду $D$ и является конечным в том и только в том случае, если накрывающая $(V, z)$ имеет конечное число точек ветвления.

**Предложение 2.** *Пусть $U$ – область на $R^*$ рода бесконечность с компактной относительной границей $\partial U$, $f$ – мероморфная функция в $U$, ограниченная вблизи идеальной границы области $U$. Тогда $f$ принимает одно и то же значение в точках области $U$, имеющих одинаковые проекции при отображении $z : U \to \to \overline{\mathbb{C}}$.*

**Доказательство.** Пусть $U_0 \subset U$ – область с теми же свойствами, что и $U$, кроме того, $j_{R^*}(U_0) = U_0$ и функция $f$ голоморфна в $\overline{U}_0$. Множество $M$ проекций точек ветвления накрывающей $(U_0, z)$ на $\overline{\mathbb{C}}$ бесконечно и множество $\mu$ его предельных точек совпадает с множеством $\partial(z(U_0)) \setminus z(\partial U_0)$. Пусть $W$ – область на $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая $z(U_0)$ и такая, что $\partial W = z(\partial U_0)$. Так как относительная граница $\partial U_0$ области $U_0$ компактна, то $\partial W = z(\partial U_0)$ не содержит точек множества $\mu$. Поэтому $\overline{M} = M \bigcup \mu \subset W$. Положим $f_0(z) := (f(j_{R^*}(q(z))) - f(q(z)))^2$, где $q(z)$ – точка области $U_0$ такая, что $z(q(z)) = z$. Функция $f_0$ есть $AB$-функция в $z(U_0)$, исчезающая в точках множества $M$. Множество $W \setminus z(U_0)$ не имеет внутренних точек. Действительно, если точка $a$ вместе со своей окрестностью принадлежит $W \setminus z(U_0)$, то непостоянная функция $1/(z-a)$ есть $AB$-функция на $R$, что невозможно. Поэтому $W \setminus z(U_0) = \mu$. Следовательно, $f_0$ голоморфно продолжима в область $W$ и обращается в нуль на множестве $\overline{M} = M \bigcup \mu \subset W$. По внутренней теореме единственности $f_0 = 0$. Предложение доказано. □

**1.4.** Пусть $\Gamma$ – кусочно-гладкий контур на $R$, $T$ – множество узлов контура $\Gamma$. Будем предполагать, что $z(\Gamma)$ также есть кусочно-гладкий контур на $\mathbb{C}$, причем $\Gamma$ и $z(\Gamma)$ не имеют точек возврата. Ориентацию на $\Gamma$ выберем так, чтобы на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на $z$-плоскость $\mathbb{C}$, ориентация контура была согласована. Тогда ориентацию $z(\Gamma)$ можно определить как индуцированную отображением $z:\Gamma\to z(\Gamma)$.

Зададим дивизор $D$, носитель которого лежит в $R\setminus\Gamma$, и функции $G\in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma,\ T)$ и $g\in H_{\mu,\lambda}(\Gamma,\ T)$, $0<\mu<1$, $-1<\lambda<0$, причем $G(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$ (мы используем функциональные пространства $H_{\mu,(\nu)}(\Gamma, T)$ и $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, введенные на плоских контурах А.П. Солдатовым [2] и распространенные в [3] на контуры, расположенные на римановой поверхности). К множеству $T$ отнесем все узлы контура $\Gamma$, все точки ветвления накрывающей $(R,z)$, лежащие на $\Gamma$, все точки разрыва коэффициентов $G$ и $g$, все точки $t\in\Gamma$ такие, что $z(t)$ есть узловая точка контура $z(\Gamma)$; в него можно включить также любое конечное число других точек контура $\Gamma$. Не умаляя общности, будем считать, что бесконечно удаленная точка не лежит на $z(\Gamma)\bigcup z(\operatorname{supp}D)$.

Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

*Найти кусочно-мероморфную функцию $F$ на $R$ с линией скачков $\Gamma$, кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности $R$, предельные значения которой на $\Gamma$ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma,\ T)$, $0<\mu<1$, $-1<\lambda<0$, и удовлетворяют соотношению*

$$F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+g(t),\qquad t\in\Gamma. \tag{1}$$

## 2. Случаи, когда задача Римана сводится к плоской

Пусть $\Gamma$ – контур на $R$ такой, что каждая компонента множества $R\setminus\Gamma$ имеет род, равный бесконечности.

**2.1.** Через $q(z)$ будем обозначать поднятие точки $z\in\overline{\mathbb{C}}$ на накрывающую $(R^{*},\ z)$. Из [3] и предложений 1 и 2 следует, что если $F$ – решение задачи (1), то функция $F$ аналитически продолжима на $R^{*}\setminus\Gamma$, принимает одинаковые значения в точках накрывающей $(R,z)$, принадлежащих одной компоненте $R\setminus\Gamma$ и имеющих одинаковую проекцию на $z$-плоскость; при этом функция $f(z)=F(q(z))$ однозначна в $\overline{\mathbb{C}}\setminus z(\Gamma)$ и аналитически продолжима в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\gamma$, где $\gamma$ – множество точек на $z(\Gamma)$, имеющих два прообраза при отображении $z:\Gamma\to z(\Gamma)$ (точки ветвления накрывающей $(R,z)$ при этом считаются дважды).

Определим в $\overline{\mathbb{C}}$ дивизор $\Delta$, полагая $\operatorname{ord}_{z(q)}\Delta=\min\left\{\operatorname{ord}_q D,\ \operatorname{ord}_{j_{R^*}(q)}D\right\}$ при $j_{R^*}(q)\neq q$ и $\operatorname{ord}_{z(q)}\Delta=\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{ord}_q D\right]$ при $j_{R^*}(q)=q$, где [ ] означает целую часть числа.

**2.2.** Если множество $\gamma$ является $AB$-устранимым, то функция $f$ аналитически продолжима на всю комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ и является рациональной функцией, кратной дивизору $1/\Delta$. Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции $G$ и $g$ удовлетворяют соотношению $g(t)=(1-G(t))\,f(z(t))$, $t\in\Gamma$, где $f$ – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Если это соотношение выполняется, то функция $F(q)=f(z(q))$ является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $\gamma$ является $AB$-устранимым множеством. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функции $G$ и $g$ были связаны соотношением $g(t)=(1-G(t))\,f(z(t))$, $t\in\Gamma$, где $f$ – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. При этом любое решение задачи* (1) *имеет вид $F=f\circ z$.*

Из этой теоремы вытекает, что:

1) при $\operatorname{ord}\Delta < 0$ задача (1) имеет решение (равное нулю) только при $g = 0$;

2) если $G = 1$, то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы $g = 0$; при этом число линейно независимых решений задачи (1) равно $\max\{0, \operatorname{ord}\Delta + 1\}$;

3) если $G(t) \not\equiv 1$, то задача (1) не может иметь более одного решения.

**2.3.** Предположим теперь, что множество $\gamma$ не является $AB$-устранимым; при этом его линейная мера будет положительной. Обозначим через $\Gamma_1$ кривую на $R^* \supset R$, гомеоморфную $z(\Gamma)$ относительно отображения $z : \Gamma_1 \to z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma_2 := j_{R^*}(\Gamma_1)$ тоже гомеоморфна $z(\Gamma)$ относительно отображения $z$ и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = z^{-1}(z(\Gamma))$. Через $\rho_k : z(\Gamma) \to \Gamma_k$, $k = 1, 2$, обозначим гомеоморфизм $z(\Gamma)$ на $\Gamma_k$ такой, что $z(\rho_k(\xi)) = \xi$ при $\xi \in z(\Gamma)$. Ориентацию на $\Gamma_k$ выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании $z : R^* \to \overline{\mathbb{C}}$ ориентация на $z(\Gamma)$ совпадала с уже выбранной в п. 1.4.

Доопределим $G$ и $g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, полагая $G(t) = 1$, $g(t) = 0$ в точках $t$, не принадлежащих $\Gamma$. Тогда функция $f$ на $z(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$f^+(\xi) = G(\rho_k(\xi)) f^-(\xi) + g(\rho_k(\xi)), \quad \xi \in z(\Gamma), \quad \Delta^{-1}|(f), \quad k = 1, 2. \qquad (2_k)$$

Здесь функции $G(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma),\, z(T))$, где

$$\mu'(z(\tau)) = \begin{cases} \mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) \neq \tau \\ \dfrac{1}{2}\mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) = \tau. \end{cases}$$

Функции $g(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\, z(T))$, где

$$\nu(z(\tau)) = \begin{cases} \min\{\lambda(\tau),\, \lambda(j(\tau))\}, & \tau,\ j(\tau) \in T, \quad j(\tau) \neq \tau, \\ \lambda(\tau), & \tau \in T, \quad j(\tau) \notin T, \\ \dfrac{1}{2}\lambda(\tau), & j(\tau) = \tau \in T. \end{cases}$$

Решение задачи $(2_k)$ будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\, z(T))$.

Таким образом, функция $f$ является одновременно решением двух краевых задач Римана на контуре $z(\Gamma)$. Из предположения о том, что каждая компонента множества $R \setminus \Gamma$ имеет род, равный бесконечности, следует, что каждая компонента множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$ содержит бесконечное число проекций точек ветвления накрывающей $(R^*, z)$. На множество $z(\Gamma) \setminus \gamma$ функция $f$ аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \gamma$, за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Поэтому для совпадения решений краевых задач $(2_1)$ и $(2_2)$ достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторых точек $z_k \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$, выбранных по одной в каждой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

**2.4.** Если $G \circ j_{R^*} = G$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то, поскольку $F \circ j_{R^*} = F$, для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы $g \circ j_{R^*} = g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда задачи $(2_1)$ и $(2_2)$ совпадают. Если $f$ – решение задачи $(2_k)$, то $F = f \circ z$ будет решением задачи (1).

Обозначим через $X(z)$ каноническую функцию задачи $(2_k)$, предельные значения которой на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\, z(T))$ и имеющую максимально возможный порядок $\varkappa$ на бесконечности. Тогда при $\varkappa + \operatorname{ord}\Delta \geq -1$ задача

$(2_k)$ разрешима для любой функции $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma,\ T)$, $0<\mu<1$, $-1<\lambda<0$, и ее общее решение имеет вид

$$f(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))\,d\xi}{X^+(\xi)(\xi-z)} + X(z)\delta(z), \tag{3}$$

где $\delta$ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$.

При $\varkappa+\operatorname{ord}\Delta<-1$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $(2_k)$, а, следовательно, и задачи (1), имеют вид

$$\int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi)\,d\xi}{X^+(\xi)} = 0, \quad j=1,\ldots,-\varkappa-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{4}$$

где $\omega_j$ – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa+2}$. При выполнении условий (4) задача $(2_k)$ имеет единственное решение вида (3) с $\delta=0$.

Условия (4) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_j = 0, \quad j=1,\ldots,-\varkappa-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{5}$$

где $\theta_j(t) = (X^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$. Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q) = \frac{X(z(q))}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k} \frac{g(t)\,dz(t)}{X^+(z(t))(z(t)-z(q))} + X(z(q))\delta(z(q)). \tag{6}$$

В формулах (5) и (6) $k$ может принимать любое из значений 1 или 2.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** *Пусть $\gamma$ имеет положительную линейную меру и коэффициент $G$ задачи* (1) *удовлетворяет соотношению $G\circ j_{R^*}=G$ на $\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функция $g$ удовлетворяла условиям $g\circ j_{R^*}=g$ на $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ и* (5)*. При выполнении этих условий общее решение задачи* (1) *имеет вид* (6)*, где $\delta$ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$. Однородная задача* (1) *имеет $l=\max\{0,\operatorname{ord}\Delta+\varkappa+1\}$ линейно независимых решений.*

**2.5.** Пусть $\gamma$ – такое же, как в предыдущем пункте. Будем предполагать, что $G\circ j_{R^*}\neq G$. Ясно, что при этом однородная задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция $f$ является решением одновременно двух различных краевых задач Римана $(2_1)$ и $(2_2)$. Обозначим через $X_k(z)$ каноническую функцию (того же класса, что и в п. 2.4) задачи $(2_k)$, $\varkappa_k=\operatorname{ord}_\infty X_k(z)$. При $\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta\geq -1$ задача $(2_k)$ безусловно разрешима и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z) = \frac{X_k(z)}{2\pi i}\int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))\,d\xi}{X^+{}_k(\xi)(\xi-z)} + X_k(z)\delta_k(z), \tag{7}$$

где $\delta_k(z)$ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$.

При $\varkappa_k + \operatorname{ord}\Delta < -1$ для разрешимости задачи $(2_k)$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))}{X_k^+(\xi)}\,\omega_{kj}(\xi)\,d\xi = 0, \quad j = 1,\,2,\ldots,-\varkappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1, \tag{8}$$

где $\omega_{kj}$, $j = 1,\,2,\ldots,-\varkappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1$, – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa_k+2}$. Полагая $\theta_{kj}(t) = \omega_{kj}(z(t))[X^+{}_k(z(t))]^{-1}dz(t)$, условия (8) перепишем в виде

$$\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_{kj} = 0, \quad j = 1,\,2,\ldots,-\varkappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1, \quad k = 1,\,2. \tag{9}$$

При выполнении условий (9) задача $(2_k)$ имеет единственное решение вида (7) с $\delta_k = 0$. Для того чтобы функции $f_k$ определяли решение исходной задачи (1), должно выполняться равенство $f_1 = f_2$. В силу сказанного в п. 2.3 для этого достаточно потребовать выполнения этого равенства в окрестности некоторых точек $z_m \in \mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$, $m = 1,\,2,\ldots,l$, принадлежащих различным компонентам множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$, где $l$ – число компонент множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Пусть $z_m$ – точка из $\mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$, в которой функции $X_k$ и $f_k$ голоморфны. Функцию $X_k(z)/2\pi i X^+{}_k(\eta)(\eta - z)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $z_m$:

$$\frac{X_k(z)}{2\pi i X^+{}_k(\eta)(\eta - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kjm}(\eta)(z - z_m)^j.$$

Пусть $\delta_{kj}$, $j = 1,\,2,\ldots,\varkappa_k + \operatorname{ord}\Delta + 1$, – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$, $k = 1,\,2$. Тогда

$$X_k(z)\delta_k(z) = \sum_{n=1}^{\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{kn}X_k(z)\delta_{kn}(z),$$

где $a_{kn}$ – комплексные числа. Разлагая функции $X_k\delta_{kn}$ в ряд Тейлора, имеем:

$$X_k(z)\delta_{kn}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{knjm}(z - z_m)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций $f_1$ и $f_2$, получим соотношения, эквивалентные равенству $f_1 = f_2$:

$$\sum_{n=1}^{\varkappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{1n}a_{1njm} - \sum_{n=1}^{\varkappa_2+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{2n}a_{2njm} =$$

$$= -\int\limits_{z(\Gamma)} (g(\rho_1(\eta))c_{1jm}(\eta) - g(\rho_2(\eta))c_{2jm}(\eta))\,d\eta,$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, l. \tag{10}$$

Положим $l_1 = \max\{0, \varkappa_1 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$, $l_2 = \max\{0, \varkappa_2 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1101} & a_{1201} & \dots & a_{1l_101} & -a_{2101} & -a_{2201} & \dots & -a_{2l_201} \\ a_{1102} & a_{1202} & \dots & a_{1l_102} & -a_{2102} & -a_{2202} & \dots & -a_{2l_202} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{110l} & a_{120l} & \dots & a_{1l_10l} & -a_{210l} & -a_{220l} & \dots & -a_{2l_20l} \\ a_{1111} & a_{1211} & \dots & a_{1l_111} & -a_{2111} & -a_{2211} & \dots & -a_{2l_211} \\ a_{1112} & a_{1212} & \dots & a_{1l_112} & -a_{2112} & -a_{2212} & \dots & -a_{2l_212} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{111l} & a_{121l} & \dots & a_{1l_11l} & -a_{211l} & -a_{221l} & \dots & -a_{2l_21l} \\ a_{1121} & a_{1221} & \dots & a_{1l_121} & -a_{2121} & -a_{2221} & \dots & -a_{2l_221} \\ a_{1122} & a_{1222} & \dots & a_{1l_122} & -a_{2122} & -a_{2222} & \dots & -a_{2l_222} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{112l} & a_{122l} & \dots & a_{1l_12l} & -a_{212l} & -a_{222l} & \dots & -a_{2l_22l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{jm}(t) = \begin{cases} -c_{1jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_1, \\ c_{2jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_{01}(t), \dots, \alpha_{0l}(t),\ \alpha_{11}(t), \dots, \alpha_{1l}(t), \alpha_{21}(t), \dots, \alpha_{2l}(t), \dots)^t =: (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots)^t,$$

$$a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l_2})^t.$$

Тогда система (10) запишется в виде

$$Aa = \int\limits_\Gamma g\alpha. \tag{11}$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг $r$ матрицы $A$ должен быть равен числу неизвестных $a_{kn}$, то есть $r = \max\{0, \varkappa_1 + \operatorname{ord}\Delta + 1\} + \max\{0, \varkappa_2 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$.

Пусть $B$ – невырожденная квадратная матрица порядка $r$, составленная из строк матрицы $A$ с номерами $j_1,\ j_2, \dots, j_r$ $(j_1 < j_2 < \dots < j_r)$, $B_j$ – квадратная матрица порядка $r+1$, составленная из $r+1$ строк расширенной матрицы $\left(A, \int\limits_\Gamma g\alpha\right)$ с номерами $j_1,\ j_2, \dots, j_r,\ j$. Тогда

$$\det B_j = \int\limits_\Gamma g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^r B_{j,j_n}\alpha_{j_n} + B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_\Gamma g\alpha_k$ матрицы $B_j$; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если $j$ принимает одно из значений $j_1,\ j_2, \dots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (10) (или (11)) имеют вид

$$\int\limits_\Gamma g\beta_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_r. \tag{12}$$

Совокупность условий (9) и (12) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством $F(q) = f_k(z(q))$, где функция $f_1 = f_2$ определена формулой (7). Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** *Пусть* $\gamma$ *имеет положительную линейную меру и коэффициент* $G$ *задачи* (1) *удовлетворяет неравенству* $G(j_{R^*}(t)) \not\equiv G(t),\ t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. *Тогда для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (9) *и* (12). *При их выполнении задача* (1) *имеет единственное решение, определяемое равенством* $F = f_k \circ z$, *где совпадающие между собой функции* $f_k,\ k = 1, 2$, *определяются равенством* (7).

## 3. Случай произвольного кусочно-гладкого контура

Пусть теперь $\Gamma$ – произвольный кусочно-гладкий контур на $R$, определенный в п. 1.4.

**3.1.** Обозначим через $E$ область на $R$, обладающую следующими свойствами:

1) род области $E$ конечен;

2) все компоненты множества $R \setminus E$ имеют род, равный бесконечности;

3) $E \supset \Gamma$;

4) относительная граница $\partial E$ множества $E$ состоит из конечного и четного числа компонент, каждая из которых есть аналитическая дуга, гомеоморфная окружности и отображающаяся взаимнооднозначно в $\mathbb{C}$ функцией $z : R \to \mathbb{C}$;

5) $\partial E$ не содержит точек ветвления накрывающей $(R, z)$;

6) над каждой компонентой множества $z(\partial E)$ лежат две компоненты $\partial E$.

Пусть $\overline{E^*} = E^* \bigcup \partial E^*$ $(\subset R^*)$ – компактная риманова поверхность с краем такая, что $E$ конформно эквивалентна области (которую мы отождествим с $E$) на $E^*$, причем $\partial E^* = \partial E$ и множество $E^* \setminus E$ является $AB$-устранимым. Для римановой поверхности $R \in O_{A^0B}$ такая поверхность $E^*$ существует согласно предложению 1.

В силу $AB$-устранимости множества $E^* \setminus E$ функцию $z$ можно аналитически продолжить в $E^*$. Таким образом, $(E^*, z)$ становится безграничной двулистной накрывающей для области $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$. Множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{z(E^*)}$ состоит из конечного числа $m \geq 1$ односвязных областей, число которых совпадает с числом компонент множества $R \setminus E$. Образуем гиперэллиптическую поверхность $S \supset \overline{E^*}$, которая получается приклеиванием к каждой компоненте $\partial E^*$ соответствующей компоненты множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$; при этом каждая компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$ берется в двух экземплярах и приклеивается к двум компонентам $\partial E^*$, имеющим одинаковую проекцию, причем точка $p \in \partial E^*$ отождествляется с соответствующей точкой $z(p) \in \partial(z(E^*))$.

Обозначим через $\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, 2h+2,\ 0 \leq h < \infty$, точки ветвления накрывающей $(E^*, z)$, где $h$ – род области $E^*$. Тогда $(S, z)$ есть гиперэллиптическая поверхность рода $h$, определяемая уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k), \tag{13}$$

где $r_k = z(\alpha_k)$. Через $E_0$ обозначим область на $S$, являющуюся полным прообразом области $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно отображения $z : S \to \overline{\mathbb{C}}$. Ясно, что $E_0$ содержит все точки ветвления накрывающей $(S, z)$ и существует конформный гомеоморфизм $\alpha : E_0 \to E^*$ такой, что $z \circ \alpha = z$ и $\alpha \circ j_S = j_{R^*} \circ \alpha$. Множество $S \setminus \overline{E}_0$

состоит из $2m$ односвязных компонент $E_1^i$ и $E_2^i$, $i=1,\,2,\dots,m$, причем $j_S(E_1^i)=$ $=E_2^i$, $j_S(E_2^i)=E_1^i$. Отображение $z:E_k^i\to\overline{\mathbb{C}}$, $k=1,\,2$, $i=1,2,\dots,m$, однолистно и конформно; обратное к нему отображение обозначим через $\rho_k^i:z(E_k^i)\to E_k^i$. Очевидно, $\rho_2^i=j_S\circ\rho_1^i$, $\rho_1^i=j_S\circ\rho_2^i$, $i=1,2,\dots,m$.

Положим $\Gamma_0=\alpha^{-1}(\Gamma)$ и определим на $\Gamma_0$ ориентацию, индуцированную отображением $\alpha^{-1}:\Gamma\to\Gamma_0$. Пусть $F$ – решение задачи Римана (1). Эта функция аналитически продолжима в $R^*\setminus\Gamma$. Легко видеть, что $F\circ j_{R^*}=F$ в $R^*\setminus E^*$. Поэтому на $S$ определена однозначная кусочно-мероморфная функция

$$F_0(q)=\begin{cases}F(\alpha(q)), & q\in E_0,\\ F(p),\ z(p)=z(q), & q\in S\setminus E_0,\ p\in R^*\setminus E^*,\end{cases}$$

с линией скачков $\Gamma_0$. Определим на $S$ дивизор $D_0$, полагая

$$\operatorname{ord}_q D_0=\begin{cases}\operatorname{ord}_{\alpha(q)}D, & q\in E_0,\\ \min\left\{\operatorname{ord}_p D,\,\operatorname{ord}_{j_{R^*}(p)}D\right\},\ z(p)=z(q), & q\in S\setminus E_0,\ p\in R^*\setminus E^*,\ j_{R^*}(p)\neq p,\\ \left[\dfrac{1}{2}\operatorname{ord}_p D\right],\ z(p)=z(q), & q\in S\setminus E_0,\ p\in R^*\setminus E^*,\ j_{R^*}(p)=p.\end{cases}$$

Положим $T_0=\alpha^{-1}(T)$ и доопределим на $T_0$ функцию $\lambda$, полагая $\lambda|_{T_0}=\lambda\circ\alpha|_{T_0}$. Функция $F_0$ мероморфна в $S\setminus\Gamma_0$, кратна дивизору $1/D_0$, а ее предельные значения на $\Gamma_0$ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,\,T_0)$ и удовлетворяют соотношению

$$F_0^+(t)=G(\alpha(t))F_0^-(t)+g(\alpha(t)),\quad t\in\Gamma_0. \tag{14}$$

Кроме того, в $S\setminus E_0$ она удовлетворяет соотношению

$$F_0\circ j_S=F_0. \tag{15}$$

Функции $G\circ\alpha$ и $g\circ\alpha$ принадлежат классам $H_{\mu,(\mu)}(\Gamma_0,\,T_0)$ и $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,\,T_0)$ соответственно.

Существует взаимнооднозначное соответствие между точками $q$ поверхности $S$ и парами чисел $(z,w)=(z(q),w(z(q)))$, связанными соотношением (13). Точку $q$ обычно отождествляют с парой $(z,w)$. Тогда точке $j_S(q)$ соответствует пара $(z,-w)$. Точке ветвления $\alpha_k$ соответствует пара $(r_k,0)$.

Выберем на $S$ канонические циклы $\{a_k,\ b_k\}$, $k=1,2,\dots,h$, как в статье [4]. Обозначим через $\varphi_j$, $j=1,2,\dots,h$, комплексно нормированный (относительно выбранных циклов) базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на $S$ и через $\omega_{qq_0}$ – нормированный абелев интеграл третьего рода, служащий разрывным аналогом ядра Коши (см. [3, 4]).

Положим

$$X(q)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t)\right),\quad q\in S.$$

Нули и бесконечности функции $X(q)$ образуют квазидивизор $(X)=\tau_1^{\varkappa_1}\tau_2^{\varkappa_2}\cdots\tau_r^{\varkappa_r}$, где $\tau_k=\alpha^{-1}(t_k)$, $t_k\in T$, – узлы линии $\Gamma_0$, $\varkappa_k$ – числа, определяемые коэффициентом $G$ и выбором ветви функции $\ln G(\alpha(t))$ (см. [4]). Положим $\varkappa=\sum\limits_{k=1}^{r}[\varkappa_k-\lambda(\tau_k)]$, где [ ] означает целую часть числа. Число $\varkappa$, не зависящее от выбора ветви $\ln G\circ\alpha$, назовем индексом коэффициента задачи (14) в классе $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,T_0)$. Положим $A=$ $=t_1^{[\varkappa_1-\lambda(\tau_1)]}t_2^{[\varkappa_2-\lambda(\tau_2)]}\cdots t_r^{[\varkappa_r-\lambda(\tau_r)]}$, $B=(q')^h q_1^{-1}\cdots q_h^{-1}$, где $q'\in S$ – произвольно фиксированная точка, не совпадающая с $q_0$, точки $q_1, q_2, \ldots, q_h$ образуют решение проблемы обращения Якоби вида:

$$\sum_{j=1}^{h} \int_{q'}^{q_j} \varphi_\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \varphi_\nu(t) \text{ (по модулю периодов)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h.$$

Тогда общее решение однородной задачи Римана (14) имеет вид

$$f(q) \exp\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^{h} \left( \int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^{q} \varphi_j \right) \right), \tag{16}$$

где в последних двух интегралах путь интегрирования не пересекает канонических сечений $a_1, a_2, \ldots, a_h$, $m_j$ – вполне определенные целые числа, $f$ – произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $D_0^{-1} A^{-1} B^{-1}$. У функции $\omega_{qq_0}$ (по переменной $q$) выбрана фиксированная в $S \setminus \cup_{k=1}^{h} a_k$ ветвь, исчезающая в точке $q_0$.

Обозначим через $l_0$ и $l_0'$ число линейно независимых мероморфных функций и дифференциалов на $S$, кратных соответственно дивизорам $D_0^{-1} A^{-1} B^{-1}$ и $D_0 AB$. Через $P$ обозначим целый дивизор порядка $l_0'$ с носителем в $S \setminus \Gamma_0$ такой, что не существует абелевых дифференциалов на $S$, кратных дивизору $D_0 ABP$ и отличных от тождественного нуля. Для построения решения неоднородной задачи (14) найдем сначала частное решение этой задачи в классе функций, кратных дивизору $D_0^{-1} P^{-1}$. Такая задача безусловно разрешима в силу выбора дивизора $P$. Ее частным решением является функция вида (см. [4])

$$\frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \tag{17}$$

где $X_0$ – функция вида (16) при $f = 1$, $A_1(t, q)$ – мероморфный аналог ядра Коши на $S$ с характеристическим дивизором $\Delta_1$, который получается делением дивизора $D_0 ABP$ на некоторый целый дивизор. Функция (17) будет решением задачи (14) в том и только в том случае, если $g$ удовлетворяет $l_0'$ условиям, обеспечивающим кратность функции (17) дивизору $D^{-1}$. Эти условия равносильны условиям разрешимости задачи (14) и имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} g \circ \alpha \frac{\psi_j}{X_0} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l_0', \tag{18}$$

где $\psi_j$, $j = 1, 2, \ldots, l_0'$, – базис пространства абелевых дифференциалов на $S$, кратных дивизору $D_0 AB$.

При выполнении условия (18) общее решение задачи (14) имеет вид

$$F_0(q) = f(q) \exp\left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^{h} \left( \int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^{q} \varphi_j \right) \right) +$$

$$+ \frac{X_0(q)}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t, q), \quad q \in S. \tag{19}$$

Для того чтобы эта функция определяла решение задачи (14), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (15).

Обозначим через $f_1,\ f_2,\dots,f_{l_0}$ базис пространства мероморфных функций на $S$, кратных дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Тогда функция $F_0$ может быть записана в виде

$$F_0(q)=X_0(q)\sum_{k=1}^{l_0}c_kf_k(q)+\frac{X_0(q)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)}\,A_1(t,q), \tag{20}$$

где $c_k$ – произвольные комплексные числа.

В каждой компоненте множества $S\setminus\overline{E}_0$ выберем точку $s_j,\ j=1,2,\dots,m$, такую, что $z(s_j)\neq\infty$ и функции $X_0(q),\ f_k(q),\ A_1(t,q)$ голоморфны по $q$ в точках $s_j$ и $j_S(s_j)$. Разложим функции $X_0f_k$ и $(X_0f_k)\circ j_S$ в ряд Тейлора по степеням $z(q)-z(s_j)$:

$$X_0(q)f_k(q)=\sum_{i=0}^{\infty}a_{jik}(z(q)-z(s_j))^i,\quad X_0(j_S(q))f_k(j_S(q))=\sum_{i=0}^{\infty}b_{jik}(z(q)-z(s_j))^i.$$

Аналогично в окрестности точки $q=s_j$ имеем:

$$\frac{X_0(q)A_1(t,q)}{2\pi iX_0^+(t)}=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{ji}(t)(z(q)-z(s_j))^i,$$

$$\frac{X_0(j_S(q))A_1(t,j_S(q))}{2\pi iX_0^+(t)}=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_{ji}(t)(z(q)-z(s_j))^i.$$

В силу этих разложений равенство (15) равносильно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{l_0}(a_{jik}-b_{jik})c_k=-\int\limits_{\Gamma_0}g(\alpha(t))(\gamma_{ji}(t)-\delta_{ji}(t)),\quad j=1,2,\dots,m,\quad i=0,1,2,\dots \tag{21}$$

Полагая

$$U=\begin{pmatrix}
a_{101}-b_{101} & a_{102}-b_{102} & \dots & a_{10l_0}-b_{10l_0}\\
a_{201}-b_{201} & a_{202}-b_{202} & \dots & a_{20l_0}-b_{20l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m01}-b_{m01} & a_{m02}-b_{m02} & \dots & a_{m0l_0}-b_{m0l_0}\\
a_{111}-b_{111} & a_{112}-b_{112} & \dots & a_{11l_0}-b_{11l_0}\\
a_{211}-b_{211} & a_{212}-b_{212} & \dots & a_{21l_0}-b_{21l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m11}-b_{m11} & a_{m12}-b_{m12} & \dots & a_{m1l_0}-b_{m1l_0}\\
a_{121}-b_{121} & a_{122}-b_{122} & \dots & a_{12l_0}-b_{12l_0}\\
a_{221}-b_{221} & a_{222}-b_{222} & \dots & a_{22l_0}-b_{22l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m21}-b_{m21} & a_{m22}-b_{m22} & \dots & a_{m2l_0}-b_{m2l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots
\end{pmatrix},$$

$\beta_{ji}=-(\gamma_{ji}-\delta_{ji})\circ\alpha^{-1},\ \beta=(\beta_{10},\beta_{20},\dots,\beta_{m0},\beta_{11},\beta_{21},\dots,\beta_{m1},\beta_{12},\beta_{22},\dots,\beta_{m2},\dots)^t=$ $=:(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots)^t,\ c=(c_1,\ c_2,\dots,c_{l_0})^t$, перепишем систему (21) в виде

$$Uc=\int\limits_{\Gamma}g\beta. \tag{22}$$

Обозначим через $r$ ранг матрицы $U$. Пусть $V$ – невырожденная квадратная матрица порядка $r$, составленная из элементов матрицы $U$, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_r)$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r$ $(k_1 < k_2 < \dots < k_r)$, $V_i$ – квадратная матрица порядка $r+1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $\left(U, \int\limits_\Gamma g\beta\right)$, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r, i$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \dots, k_r, l_0+1$. Тогда

$$\det V_i = \int\limits_\Gamma g\lambda_i,$$

где

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{r} V_{i,i_n}\,\beta_{i_n} + V_{i,i}\beta_i,$$

$V_{i,j}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_\Gamma g\beta_j$ матрицы $V_i$, $V_{i,i} = \det V$, $\lambda_i = 0$ при $i = i_1, i_2, \dots, i_r$. Условия разрешимости системы (22) имеют вид

$$\int\limits_\Gamma g\lambda_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \neq i_1, i_2, \dots, i_r. \tag{23}$$

При выполнении условий (23) величины $c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r}$ выражаются линейно через $\int\limits_\Gamma g\beta_i$, $i = i_1, i_2, \dots, i_r$, то есть являются ограниченными линейными функционалами от функции $g$ в пространстве $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, а остальные числа $c_k$ остаются произвольными.

Условия (18) перепишем в виде

$$\int\limits_\Gamma g\frac{\psi_j \circ \alpha^{-1}}{X_0 \circ \alpha^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, l_0'. \tag{24}$$

Если функция $g$ удовлетворяет условиям (23) и (24), то функция $F_0$, задаваемая соотношением (20), определяет решение $F$ задачи (1) по формуле

$$F(q) = \begin{cases} F_0(\alpha^{-1}(q)), & q \in E, \\ F_0(p),\ z(p) = z(q), & q \in R \setminus E, \quad p \in S \setminus E_0. \end{cases} \tag{25}$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.** *Для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (23) *и* (24)*. При их выполнении решение задачи определяется равенствами* (20) *и* (25)*, причем в равенстве* (20) $r$ *величины среди* $c_k$ *являются линейными ограниченными функционалами от* $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$*, а остальные – произвольными. Однородная задача Римана* (1) *имеет* $l_0 - r$ *линейно независимых решений.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-12188-офи_м).

### Summary

*N.A. Barieva, I.A. Bikchantaev.* Riemann Problem on a Two-sheeted Surface of a Class $O_{A^0B}$.

Solvability conditions and explicit solution of the Riemann boundary value problem were derived by I.A. Bikchantaev on the case of ultrahyperelliptic surface (Riemann problem on ultrahyperelliptic surface // Russian Math. – 2000. – V. 44, No 2. – P. 17–29). The present paper generalizes the last result on the case of two-sheeted Riemann surface of the class $O_{A^0B}$.


**Key words:** boundary value problems, Riemann surfaces.

### Литература


1. *Sario L., Nakai M.* Classification theory of open Riemann surfaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. – 446 p.
2. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высш. шк., 1991. – 208 с.
3. *Бикчантаев И.А.* Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31.
4. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Усп. матем. наук. – 1971. Т. 26, № 1. – С. 113–179.


Поступила в редакцию
30.01.09


**Бариева Наиля Ахмедовна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

**Бикчантаев Ильдар Ахмедович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *ibikchan@ksu.ru*