УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Р.М. Асхатов, Р.Н. Абайдуллин

Аннотация

Найдены фундаментальные решения вырождающегося эллиптического уравнения. С помощью фундаментальных решений построены потенциалы типа двойного и простого слоев. Основные краевые задачи для одного вырождающегося эллиптического уравнения сведены к эквивалентным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказана их разрешимость.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение, метод потенциалов, потенциал двойного слоя, потенциал простого слоя, уравнение Фредгольма, оператор обобщенного сдвига.

К числу первых работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям второго рода относится работа М.В. Келдыша [1], где указаны случаи, когда характеристическая часть границы области может освобождаться от граничных условий и заменяется условием ограниченности решений. По этой тематике были опубликованы статьи А.В. Бицадзе, С.А. Терсенева, О.А. Олейник, М.М. Смирнова и др. [2–6]. В настоящей работе построены и применены потенциалы типа двойного и простого слоев к исследованию краевых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения, когда вырождение имеет логарифмический характер, методом потенциалов. Отметим, что в [7] методом потенциалов были получены решения для вырождающегося эллиптического уравнения второго рода со степенной особенностью.

Пусть E_2^+ – полуплоскость $y>0$ евклидовой плоскости E_2, D – конечная область, симметричная относительно оси Ox и ограниченная кривой Γ. Обозначим через D^+ часть области D в E_2^+, ограниченную отрезком $\Gamma^{(0)}=[a,b]$ оси Ox и кривой Γ^+; $\widetilde{D}^{\,+}=D^+\bigcup\Gamma^+$, $\overline{D}^{\,+}=\widetilde{D}^{\,+}\bigcup\Gamma^{(0)}$, $D_e^+=E_2^+\setminus\overline{D}^{\,+}$, через $\Gamma_\delta^{(0)}$ – отрезок прямой $y=\delta$, заключенный внутри области D^+, а через D_δ^+ – область, ограниченную кривой Γ^+ и отрезком $\Gamma_\delta^{(0)}$; Γ_δ^+ – часть кривой Γ^+, расположенная выше прямой $y=\delta$. Ясно, что $D_\delta^+\to D^+$, а $\Gamma_\delta^+\to\Gamma^+$ при $\delta\to 0$.

Рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$T_\alpha^{(2)}(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha^2y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha^3 y\,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad 0<\alpha<1. \tag{1}$$

С помощью замены независимых переменных по формулам

$$\xi=x,\quad \eta=\frac{1}{\alpha}\ln y$$

уравнение (1) приводится к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\alpha^2 - \alpha)\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{2}$$

Ищем решение уравнения (2) в виде

$$u = e^{(\alpha-\alpha^2)(\eta-\eta_0)/2} v,$$

где v – новая неизвестная функция.

После подстановки этого представления в (2), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{(\alpha-\alpha^2)^2}{4}\,v = 0. \tag{3}$$

Известно [8], что общее решение уравнения (3), зависящее от

$$\rho = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2},$$

имеет вид

$$v(\rho) = AI_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho\biggr) + BK_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho\biggr),$$

где A, B – произвольные постоянные, I_0, K_0 – функции Бесселя мнимого аргумента и Макдональда соответственно [8]. Функция Макдональда определяется с помощью функции Ханкеля мнимого аргумента

$$K_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho\biggr) = \frac{\pi i}{2}\,H_0^{(1)}\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho i\biggr).$$

Функция Макдональда экспоненциально убывает при стремлении аргумента к бесконечности. Известно также [8, 9], что при $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$ данная функция имеет логарифмическую особенность

$$K_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho\biggr) = \ln\frac{1}{\rho} + \cdots .$$

Полагая $B=0$, а затем $A=0$, получим решения уравнения (3). Подставляя в (2), находим

$$u_0 = Ae^{(\alpha-\alpha^2)(\eta-\eta_0)/2} I_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho\biggr),$$

$$u_1 = Be^{(\alpha-\alpha^2)(\eta-\eta_0)/2} K_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\,\rho\biggr).$$

Переходя к старым переменным x, y, имеем

$$w_0 = Ay_0^{(\alpha-1)/2} y^{(1-\alpha)/2} I_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\rho\biggr),$$

$$w_1 = By_0^{(\alpha-1)/2} y^{(1-\alpha)/2} K_0\biggl(\frac{\alpha-\alpha^2}{2}\rho\biggr), \tag{4}$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + 1/\alpha^2 \ln^2(y/y_0)}$. Функция w_1, определенная формулой (4), является фундаментальным решением уравнения (1), так как имеет логарифмическую особенность. Если фундаментальное решение уравнения ограничено, то оно при стремлении y к нулю убывает экспоненциально. Аналогичное требование можем накладывать и на регулярное решение уравнения (1).

Определение 1. Регулярное решение u уравнения (1) в области D^+, обращающееся в нуль при $y \to 0$, называется $T_\alpha^{(2)}$-гармонической функцией в этой области.

Множество всех $T_\alpha^{(2)}$-гармонических в D^+ и непрерывных в $\overline{D}^{\,+}$ функций обозначим через $T_\alpha^{(2)}(\overline{D}^{\,+})$.

Пусть $u,\, v \in C^{(2)}(D^+) \bigcap C^{(1)}(\overline{D}^{\,+})$. Тогда

$$vT_\alpha^{(2)}(u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha^2 y^{2-\alpha}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(v y^\alpha\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Интегрируя обе части последнего тождества по области D_δ^+, предварительно умножив на весовую функцию, получим

$$\iint\limits_{D_\delta^+} vT_\alpha^{(2)}(u) y^{\alpha-2}\,dxdy = \iint\limits_{D_\delta^+}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha^2 y^{2-\alpha}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(v y^\alpha\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) y^{\alpha-2}\,dxdy -$$

$$- \iint\limits_{D_\delta^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) y^{\alpha-2}\,dxdy,$$

откуда в силу формулы Остроградского

$$\iint\limits_{D_\delta^+} vT_\alpha^{(2)}(u) y^{\alpha-2}\,dxdy + \iint\limits_{D_\delta^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) y^{\alpha-2}\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\delta^+} v\left(\cos(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 y^2 \sin(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) y^{\alpha-2}\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_\delta^{(0)}} v\left(\cos(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 y^2 \sin(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) y^{\alpha-2}\,ds.$$

Так как $\cos(x,\nu) = 0$, $\sin(x,\nu) = 1$ на $\Gamma_\delta^{(0)}$, то

$$\iint\limits_{D_\delta^+} vT_\alpha^{(2)}(u) y^{\alpha-2}\,dxdy + \iint\limits_{D_\delta^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) y^{\alpha-2}\,xdy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\delta^+} vA[u] y^{\alpha-2}\,ds + \int\limits_{\Gamma_\delta^{(0)}} v\alpha^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,y^\alpha\,ds, \qquad (5)$$

где

$$A[u] = \cos(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 y^2 \sin(x,\nu)\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

ν – единичный вектор внешней нормали к ∂D_δ^+ в точке $P(x,y)$.

Аналогично,

$$\iint\limits_{D_\delta^+} uT_\alpha^{(2)}(v) y^{\alpha-2}\,dxdy + \iint\limits_{D_\delta^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2 y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right) y^{\alpha-2}\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_\delta^+} uA[v] y^{\alpha-2}\,ds + \int\limits_{\Gamma_\delta^{(0)}} u\alpha^2\,\frac{\partial v}{\partial y}\,y^\alpha\,ds. \qquad (6)$$

Вычитая (6) из (5), приходим к соотношению

$$\iint\limits_{D_\delta^+} (vT_\alpha^{(2)}(u) - uT_\alpha^{(2)}(v))y^{\alpha-2}\,dxdy =$$

$$\int\limits_{\Gamma_\delta^+} (vA[u] - uA[v])y^{\alpha-2}\,ds + \int\limits_{\Gamma_\delta^{(0)}} \alpha^2\left(v\,\frac{\partial u}{\partial y} - u\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)y^\alpha\,ds,$$

откуда при $\delta \to 0$ получаем

$$\iint\limits_{D^+} vT_\alpha^{(2)}(u)y^{\alpha-2}\,dxdy+$$

$$+\iint\limits_{D^+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha^2y^2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)y^{\alpha-2}\,dxdy = \int\limits_{\Gamma_\delta^+} vA[u]y^{\alpha-2}\,ds, \quad (7)$$

$$\iint\limits_{D^+}\left(vT_\alpha^{(2)}(u) - uT_\alpha^{(2)}(v)\right)y^{\alpha-2}\,dxdy = \int\limits_{\Gamma+}\left(vA[u] - uA[v]\right)y^{\alpha-2}\,ds. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) представляют собой соответственно первую и вторую формулы Грина для оператора $T_\alpha^{(2)}$.

Пусть $M_0 \in D^+$. Рассмотрим контур $C_{M_0\varepsilon}$ с центром в точке M_0 и радиусом ε такой, что $C_{M_0\varepsilon} \subset D^+$. Обозначим через D_ε часть области D^+, заключенную между контуром $C_{M_0\varepsilon}$ и границей ∂D^+.

Применим вторую формулу Грина для оператора $T_\alpha^{(2)}$ к функциям w_1 и u в области D_ε:

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}\left(w_1(r)T_\alpha^{(2)}(u) - uT_\alpha^{(2)}(w_1(r))\right)\,y^{\alpha-2}\,dxdy = \int\limits_{\Gamma+}\left(w_1(r)A[u] - uA[w_1]\right)y^{\alpha-2}\,ds+$$

$$+\int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(w_1(r)A[u] - uA[w_1]\right)y^{\alpha-2}\,ds. \quad (9)$$

Так как $T_\alpha^{(2)}(u) = 0$ в D^+, $T_\alpha^{(2)}(w_1(r)) = 0$ в D_ε, то равенство (9) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma+}\left(w_1(r)A[u] - uA[w_1]\right)y^{\alpha-2}\,ds + \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}}\left(w_1(r)A[u] - uA[w_1]\right)y^{\alpha-2}\,ds = 0. \quad (10)$$

Имеем

$$A[w_1] = \cos(x,\nu)\,\frac{\partial w_1}{\partial x} + \alpha^2y^2\sin(x,\nu)\,\frac{\partial w_1}{\partial y}. \quad (11)$$

На контуре $C_{M_0\varepsilon}$ справедливы следующие соотношения:

$$\cos(x,\nu) = \frac{\alpha^2y(x-x_0)}{\sqrt{\alpha^4y^2(x-x_0)^2 + \ln^2(y/y_0)}}, \quad \sin(x,\nu) = \frac{\ln(y/y_0)}{\sqrt{\alpha^4y^2(x-x_0)^2 + \ln^2(y/y_0)}}.$$

Отсюда и из формулы (11) следует, что

$$A[w_1] = \frac{-\alpha^2By_0^{(\alpha-1)/2}y^{(3-\alpha)/2}}{\sqrt{\alpha^4y^2(x-x_0)^2 + \ln^2(y/y_0)}} + \Phi(x,y;x_0,y_0).$$

Теперь в формуле (10) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Первый интеграл не зависит от ε. Представим второй интеграл в виде

$$\int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} w_1(r)A[u]y^{\alpha-2}\,ds + \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} u\big(-A[w_1]\big)y^{\alpha-2}\,ds = I_1 + I_2.$$

Ясно, что $I_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Интеграл I_2 представим в виде

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} B \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} \left(\frac{\alpha^2 y_0^{(\alpha-1)/2} y^{(3-\alpha)/2} u}{\sqrt{\alpha^4 y^2 (x-x_0)^2 + \ln^2(y/y_0)}} + \Phi(x,y;x_0,y_0)\right) y^{\alpha-2}\,ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} B \int\limits_{C'_{M_0\varepsilon}} \left(\frac{\alpha^2 y_0^{(\alpha-1)/2} y^{(3-\alpha)/2} u}{\sqrt{\alpha^4 y^2 (x-x_0)^2 + \ln^2(y/y_0)}} + \Phi(x,y;x_0,y_0)\right) y^{\alpha-2}\,ds +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} B \int\limits_{C''_{M_0\varepsilon}} \left(\frac{\alpha^2 y_0^{(\alpha-1)/2} y^{(3-\alpha)/2} u}{\sqrt{\alpha^4 y^2 (x-x_0)^2 + \ln^2(y/y_0)}} + \Phi(x,y;x_0,y_0)\right) y^{\alpha-2}\,ds =$$

$$= \alpha 2 B y_0^{\alpha-1} \overline{u} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x-x_0)^2}}\,dx = \alpha 2\pi B y_0^{\alpha-1} u(M_0), \qquad (12)$$

где $C'_{M_0\varepsilon}$ и $C''_{M_0\varepsilon}$ – верхняя и нижняя части $C_{M_0\varepsilon}$.

Находим нормирующую константу

$$B = \frac{y_0^{1-\alpha}}{2\pi\alpha}.$$

Из (10) с учетом (12) получаем интегральное представление $T_\alpha^{(2)}$-гармонической функции $u(x,y)$

$$u(M_0) = \int\limits_{\Gamma^+} \big(w_1(r)A[u] - uA[w_1]\big) y^{\alpha-2}\,ds. \qquad (13)$$

Теорема 1. *Если $u(x,y) \in T_\alpha^{(2)}(\widetilde{D}^+)$ и тождественно не равна нулю, то функция u принимает наибольшее положительное и наименьшее отрицательное значения на границе Γ^+.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{M}$ наибольшее положительное значение функции в $\widetilde{D}^+$, а через $\mathbf{N}$ наибольшее положительное значение функции u на границе области.

Предположим, что $\mathbf{M} > \mathbf{N}$, и функция достигает положительного наибольшего значения во внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ области D^+.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$v = u + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{N}}{4l^2}\, T_{x,y}^{x_0,y_0}(x^2 + y^2),$$

где l – наибольшее расстояние между двумя точками границы области D^+, $T_{x,y}^{x_0,y_0}$ – оператор обобщенного сдвига [10].

Ясно, что $v(M_0) = \mathbf{M}$. Оценим значение v на границе:

$$v \le \mathbf{N} + \frac{\mathbf{M} - \mathbf{N}}{4} = \frac{\mathbf{M} + 3\mathbf{N}}{4} < \frac{\mathbf{M} + 3\mathbf{M}}{4} = \mathbf{M}.$$

Значит, v принимает наибольшее положительное значение во внутренней точке D^+.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – та точка области D^+, где v принимает наибольшее положительное значение. Тогда

$$T_\alpha^{(2)}(u)\Big|_{M_1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha^3 y \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{M_1} < 0.$$

С другой стороны, подставляя v в уравнение (1), получаем

$$T_\alpha^{(2)}(u)\Big|_{M_1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha^3 y \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{M_1} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что функция u не может принимать наибольшее положительное значение во внутренних точках области D^+. Поэтому по теореме Вейерштрасса она достигает наибольшего положительного значения на границе. Второе утверждение доказывается аналогично. □

Рассматриваются следующие краевые задачи.

Внутренняя задача (E_i). Требуется найти функцию $u(x, y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D^+, непрерывную в $\widetilde{D}^+$ и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+,$$

где $\varphi(P)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача (E_e). Требуется найти функцию $u(x, y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D_e^+, непрерывную в $\widetilde{D_e}^+$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+,$$

где $\varphi(P)$ – непрерывная функция.

Внутренняя задача (K_i). Требуется найти функцию $u(x, y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D^+, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{D}^+$ и удовлетворяющую граничному условию

$$A[u]\big|_{\Gamma^+} = \psi(P), \quad P \in \Gamma^+,$$

где $\psi(P)$ – непрерывная функция.

Внешняя задача (K_e). Требуется найти функцию $u(x, y)$, $T_\alpha^{(2)}$-гармоническую в области D_e^+, один раз непрерывно дифференцируемую в $\widetilde{D_e}^+$, равную нулю на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию

$$A[u]\big|_{\Gamma^+} = \psi(P), \quad P \in \Gamma^+,$$

где $\psi(P)$ – непрерывная функция.

Имеют место следующие теоремы единственности.

Теорема 2. *Задачи E_i, E_e, K_i, K_e не могут иметь более одного решения.*

Доказательство. Справедливость утверждений теоремы устанавливается по аналогии с техникой, предложенной при доказательстве соответствующих теорем в [11]. Например, приведем доказательство единственности задачи K_i.

Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи K_i. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет условию $A[u] = 0$ на Γ^+, $T_\alpha^{(2)}$-гармонична в области D^+ и непрерывно дифференцируема в $\widetilde{D}^+$. Согласно первой формуле Грина при $v = u$, $T_\alpha^{(2)} = 0$ получаем

$$\int_{D^+}\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \alpha^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] y^{\alpha-2}\, dxdy = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

а значит, $u \equiv C$. Согласно граничным условиям задачи имеем, что $C = 0$, следовательно, $u \equiv 0$, то есть $u_1 \equiv u_2$. □

Координаты переменной точки на кривой Γ^+ будем обозначать через $P = P(\xi, \eta)$. Считаем, что Γ является кривой Ляпунова.

С помощью фундаментального решения w_1 строим потенциалы типа двойного и простого слоев. Они имеют соответственно вид

$$W(M) = \int_{\Gamma^+} \sigma(P) A[w_1]\, \eta^{k-2}\, ds_P = 0, \quad V(M) = \int_{\Gamma^+} \mu(P) w_1\, \eta^{k-2}\, ds_P = 0,$$

где $\sigma(P)$ и $\mu(P)$ – плотности этих потенциалов.

Рассмотрим потенциал типа двойного слоя

$$W^{(0)}(M) = \int_{\Gamma^+} A[w_1]\, \eta^{k-2}\, ds_P = 0,$$

плотность которого равна единице. Справедлива

Теорема 3. *Если Γ – кривая Ляпунова, то значения интеграла типа Гаусса для фундаментального решения w_1 уравнения (1) определяются формулой*

$$W^{(0)}(M) = \begin{cases} -1, & M \in D^+, \\ 0, & M \bar{\in} \overline{D}^{\,+}, \\ -1/2, & M \in \Gamma^+. \end{cases}$$

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме, предложенной при доказательстве соответствующей теоремы в [11].

Потенциалы типа двойного и простого слоев на границе ведут себя так же, как и их аналоги для уравнения Лапласа.

Теорема 4. *Если Γ – кривая Ляпунова и $\sigma(P)$ – непрерывная функция на Γ^+, то для потенциала типа двойного слоя справедливы следующие предельные соотношения*

$$W_i(P_0) = -\frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)},$$

$$W_e(P_0) = \frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)}, \tag{14}$$

где $W_i(P_0)$ и $W_e(P_0)$ означают соответствующие предельные значения потенциала типа двойного слоя в точке $P_0 \in \Gamma^+$, когда $P \to P_0$ изнутри и извне Γ^+, а $\overline{W(P_0)}$ – прямое значение потенциала типа двойного слоя.

Доказательство. Потенциал типа двойного слоя можем записать следующим образом:

$$W(M) = W_1(M) + \sigma(P_0)W^{(0)}(M), \tag{15}$$

где $W^{(0)}(M)$ – интеграл типа Гаусса, а

$$W_1(M) = \int\limits_{\Gamma+} [\sigma(P) - \sigma(P_0)]A[w_1]\eta^{k-2}\, ds_P.$$

Из точки P_0 как из центра опишем круг радиуса R_1, тем самым кривая разобьется на две части: $\Gamma^+ = \Gamma' \bigcup \Gamma''$, из которых Γ' лежит внутри круга, а Γ'' – вне ее. Тогда потенциал также разобьется на

$$W_1(M) = W_1'(M) + W_1''(M),$$

где

$$W_1'(M) = \int\limits_{\Gamma'} [\sigma(P) - \sigma(P_0)]A[w_1]\eta^{k-2}\, ds_P,$$

$$W_1''(M) = \int\limits_{\Gamma''} [\sigma(P) - \sigma(P_0)]A[w_1]\eta^{k-2}\, ds_P.$$

Нетрудно доказать, что

$$|W_1(P) - \overline{W_1(P_0)}| < \varepsilon.$$

Отсюда следует существование и равенство значений $W_{1i}(P_0) = W_{1e}(P_0) = \overline{W_1(P_0)}$. Предельные значения интеграла типа Гаусса существуют и равны $W_i^{(0)}(P_0) = -1$, $W_e^{(0)}(P_0) = 0$, $\overline{W^{(0)}(P_0)} = -1/2$. Находя из (15) пределы $W_i(P_0)$, $W_e(P_0)$, $\overline{W(P_0)}$ и исключая из полученных соотношений равные значения $W_{1i}(P_0), W_{1e}(P_0), \overline{W_1(P_0)}$, приходим к (14). □

Теорема 5. *Пусть Γ – кривая Ляпунова и $\mu(P)$ – непрерывная функция на Γ^+. Потенциал типа простого слоя имеет конормальную производную как изнутри, так и извне Γ^+. Тогда предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя выражаются формулами*

$$A(V(P_0))_i = \frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{A(V(P_0))},$$

$$A(V(P_0))_e = -\frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{A(V(P_0))}, \tag{16}$$

где $A(V(P_0))_i$ и $A(V(P_0))_e$ означают соответствующие предельные значения потенциала типа простого слоя в точке $P_0 \in \Gamma^+$, когда $P \to P_0$ изнутри и извне Γ^+, а $\overline{A(V(P_0))}$ – прямое значение потенциала типа простого слоя.

Доказательство этих теорем проводится по схеме, предложенной при доказательстве соответствующих теорем, например, в [12].

Решение задачи (E_i) ищем в виде потенциала двойного слоя

$$u(M) = \int\limits_{\Gamma+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\, ds_P.$$

Неизвестную плотность σ найдем из требования, чтобы эта функция удовлетворяла граничному условию $u|_{\Gamma^+} = \varphi(P)$. С этой целью подставим ее в это граничное условие. В результате имеем

$$\lim_{M\to P_0} u(M) = -\frac{\sigma(P_0)}{2} + \int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\,ds_P = \varphi(P_0).$$

Отсюда получим эквивалентное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для неизвестной функции σ

$$\sigma(P_0) - 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\,ds_P = -2\varphi(P_0), \quad P_0 \in \Gamma^+.$$

Используя формулы (14) и (16) для предельных значений, а также граничные условия основных краевых задач, получим эквивалентные интегральные уравнения для трех остальных задач. Таким образом, имеем

$$(E_i): \quad \sigma(P_0) - 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\,ds_P = -2\varphi(P_0), \tag{17}$$

$$(E_e): \quad \sigma(P_0) + 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\,ds_P = 2\varphi(P_0), \tag{18}$$

$$(K_i): \quad \mu(P_0) + 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\,ds_P = 2\psi(P_0), \tag{19}$$

$$(K_e): \quad \mu(P_0) - 2\int\limits_{\Gamma^+} \sigma(P)A[w_1]\eta^{k-2}\,ds_P = -2\psi(P_0). \tag{20}$$

В уравнениях (17)–(20) точка P_0 принадлежит границе Γ^+.

Уравнения (17)–(20) – интегральные уравнения со слабой особенностью, причем уравнения (17), (20) и (18), (19) являются попарно сопряженными. Для этих интегральных уравнений, как и в случае уравнения Лапласа, справедливы теоремы Фредгольма.

Исследование первой и второй пары сопряженных уравнений проводится по схеме, предложенной, например, в [12].

Summary

R.M. Askhatov, R.N. Abaydullin. Solution of the Basic Boundary Value Problems for a Degenerate Elliptic Equation by the Method of Potentials.

Fundamental solutions to a degenerate elliptic equation are found. Using these fundamental solutions, simple and double layer potentials are built. The basic boundary value problems for a degenerate elliptic equation are reduced to the equivalent Fredholm integral equations of the second kind. Their solvability is proved.

Keywords: degenerate elliptic equation, method of potentials, double layer potential, simple layer potential, Fredholm equation, generalized translation operator.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 77, № 2. – С. 181–183.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.

3. *Олейник О.А.* Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 169, № 3. – С. 525–528.

4. *Олейник О.А.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе // Усп. матем. наук. – 1969. – Т. 24, № 2. – С .229–230.

5. *Смирнов М.М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

6. *Терсенов С.А.* К теории уравнений эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Сиб. матем. журн. – 1965. – Т. 6, № 5. – С. 1120–1143.

7. *Мухлисов Ф.Г., Нигмедзянова А.М.* Решение краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго рода методом потенциалов // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 8. – С. 57–70.

8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.

9. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высш. шк., 1962. – 248 с.

10. *Мухлисов Ф.Г.* Потенциалы, порожденные оператором обобщенного сдвига, и краевые задачи для одного класса сингулярных эллиптических уравнений: Дис. … д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 1993. – 324 с.

11. *Асхатов Р.М.* Решение основных краевых задач для одного сингулярного эллиптического уравнения методом потенциалов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 4. – С. 5–15.

12. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.

Поступила в редакцию
15.12.14

Асхатов Радик Мухаметгалеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Radik.Ashatov@kpfu.ru*

Абайдуллин Равиль Нуралиевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Ravil.Abaydullin@kpfu.ru*