

УДК 535.14

УРАВНЕНИЕ ЛИНДБЛАДА В ОБРАЗУЮЩИХ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ АТОМНО-ФОТОННОГО КЛАСТЕРА

А.М. Башаров

Аннотация

Получено кинетическое уравнение для описания излучения атомно-фотонного кластера, локализованного в одномодовом резонаторе.

Ключевые слова: микрорезонатор, комбинационный резонанс, широкополосное излучение, эффективный гамильтониан, представление полиномиальной алгебры, квантовое стохастическое дифференциальное уравнение, атомно-фотонный излучатель.

*Светлой памяти
Валерия Павловича Карасева
посвящается.*

Введение

Процессы излучения и рассеяния фотонов атомами несут фундаментальную информацию о веществе и являются основными элементарными процессами, лежащими в основе работы самых разнообразных оптических устройств. В последнее время активно изучается излучение искусственных объектов, таких, как квантовые точки, ямы, проволоочки, а также различных частиц в искусственных средах со сложной структурой фотонного спектра, как в фотонных кристаллах и т. п. Сохраняется активный интерес к излучательным процессам в микрорезонаторах. В данной статье описан новый искусственный излучатель – атомно-фотонный кластер, состоящий из атомов и фотонов, локализованных в микрорезонаторе. Получено кинетическое уравнение для описания динамики неподвижных атомов в одномодовом микрорезонаторе при условиях, когда фотоны микрорезонаторной моды не находятся в резонансе с оптически разрешенными атомными переходами, отсутствуют потери на зеркалах на частоте микрорезонаторной моды, а квантовый переход между задействованными в процессах атомными энергетическими уровнями является оптически запрещенным. Фотонный спектр системы состоит из локализованной частоты микрорезонаторной фотонной моды и полосы пропускания внешнего электромагнитного поля, которое совместно с микрорезонаторными фотонами находится в комбинационном резонансе с квантовым оптически запрещенным атомным переходом. Показано, что можно говорить именно об атомно-фотонном кластере: в отсутствие возбуждений в одной из подсистем задачи – микрорезонаторной моды или атомного ансамбля – атомно-фотонный кластер не излучает. При наличии возбуждений в обеих подсистемах и широкополосном внешнем электромагнитном поле с нулевой средней плотностью фотонов (вакуумное поле) возможно спонтанное излучение кластера из атомов и фотонов, локализованных в микрорезонаторе.

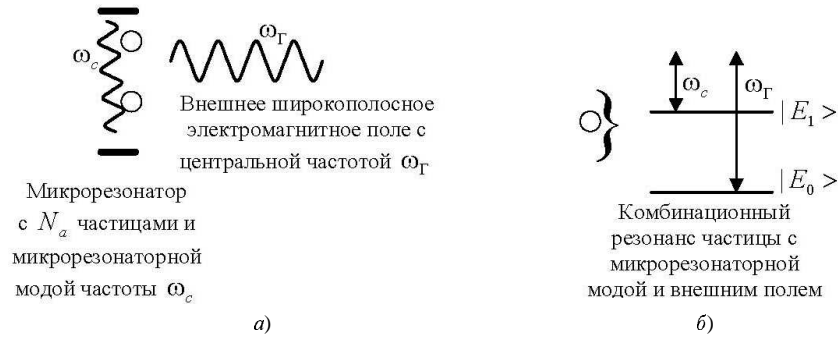


Рис. 1. Схематическое изображение одномодового микрорезонатора с N_a одинаковыми частицами и воздействующего внешнего поля (а) в условиях комбинационного резонанса (б)

Дано описание такого атомно-фотонного кластера в терминах полиномиальной алгебры третьего порядка, а его излучательная динамика представлена квантовыми стохастическими дифференциальными уравнениями и уравнением Линдблада в образующих полиномиальных алгебр.

1. Модель атомно-фотонного излучателя

Рассмотрим одномодовый микрорезонатор, содержащий N_a одинаковых частиц – атомов, молекул, квантовых точек и т. п. Для простоты эти одинаковые частицы будем именовать атомами. Предположим, что выполнены следующие условия.

1. Микрорезонатор характеризуется собственной электромагнитной модой частоты ω_c и высокой добротностью на этой частоте, так что время жизни фотона микрорезонаторной моды можно считать бесконечным (в масштабе рассматриваемых в задаче времен).

2. Существует окно прозрачности – область частот электромагнитных волн, которые могут свободно проходить через пустой резонатор. Считаем, что ширина окна прозрачности является достаточной, чтобы можно было рассматривать воздействие внешнего широкополосного электромагнитного поля с несущей частотой ω_Γ на систему микрорезонатор с N_a одинаковыми частицами. В частности, через окно прозрачности на рассматриваемую систему может воздействовать термостатное (вакуумное) электромагнитное поле.

3. Энергетические уровни частиц, помещенных в микрорезонатор, характеризуются энергиями основного уровня E_0 и возбужденного уровня E_1 , такими, что

$$(E_1 - E_0)/\hbar \equiv \omega_0 \approx \omega_\Gamma - \omega_c, \quad (1)$$

то есть считаем, что переход $E_1 \rightarrow E_0$ является оптически запрещенным и находится в комбинационном резонансе с микрорезонаторной модой и внешним широкополосным электромагнитным полем с центральной частотой ω_Γ (рис. 1).

4. Ни микрорезонаторная мода, ни внешнее электромагнитное поле не находятся в резонансе с каким-либо оптически разрешенным переходом частицы с участием заселенного или заселенных уровней. Отсутствуют также другие двухфотонные резонансы с участием внешнего поля, микрорезонаторной моды и рассмотренных энергетических уровней частицы.

Описанная система является моделью атомно-фотонного излучателя, который при отсутствии фотонов во внешнем широкополосном электромагнитном поле характеризуется следующими свойствами.

1. Если микрорезонаторная мода возбуждена, а все частицы находятся в основном (невозбужденном) состоянии E_0 , то система не излучает фотоны во внешнюю среду.

2. Если в микрорезонаторной моде отсутствуют фотоны, а одна или несколько частиц возбуждены, то есть заселяют энергетический уровень E_1 , то система также не излучает фотоны во внешнюю среду.

3. Если одновременно в микрорезонаторной моде есть хотя бы один фотон и хотя бы одна из частиц возбуждена, то система спонтанно излучает фотоны частоты ω_Γ во внешнюю среду. Такой атомно-фотонный излучатель считаем возбужденным, в отличие от случая, когда хотя бы одна из подсистем не возбуждена (свойства 1 или 2).

Таким образом, поведение обсуждаемого возбужденного и невозбужденного атомно-фотонного излучателя во внешнем широкополосном электромагнитном поле аналогично обычному возбужденному или невозбужденному атому, рассматриваемые энергетические уровни которого связаны оптически разрешенным переходом: если система возбуждена, то она спонтанно излучает фотон во внешнюю среду и при этом переходит в нижнее энергетическое состояние. Точнее, представленный атомно-фотонный излучатель аналогичен поведению нескольких одинаковых атомов – если часть одинаковых атомов возбуждена, то они коллективно излучают фотоны во внешнюю среду. Для нескольких атомов этот процесс называется также сверхизлучением [1], поскольку свойства излучения зависят от количества возбужденных атомов – с ростом их числа среднее время и длительность излучения сокращаются, а интенсивность возрастает. Меняются также статистические свойства и геометрия излучения.

При рассмотрении динамики описанного атомно-фотонного излучателя помимо сделанных предположений будем также пренебрегать наличием других мод резонатора, потерями на зеркалах, тепловым движением атомов, эффектами отдачи при излучении/поглощении квантов, вырождением атомных уровней по проекциям углового момента и поляризационными состояниями квантов. Взаимодействие атомов с фотонами учитываем в электродипольном приближении. Гамильтониан системы состоит из гамильтониана изолированных атомов H_a , гамильтониана фотонной моды H_c , гамильтониана широкополосного внешнего поля (термостата) H_Γ , оператора взаимодействия атомов и фотонов микрорезонаторной моды V_c и оператора взаимодействия атома с широкополосным внешним полем V_Γ :

$$H = H_a + H_c + H_\Gamma + V_c + V_\Gamma, \quad (2)$$

$$H_a = \hbar\omega_0 R_3, \quad H_c = \hbar\omega_c N, \quad H_\Gamma = \sum_{\omega} \hbar\omega b_{\omega}^+ b_{\omega},$$

$$V_c = g(R_+ + R_-)(c^+ + c), \quad V_\Gamma = \sum_{\omega} \Gamma_{\omega}(R_+ + R_-)(b_{\omega}^+ + b_{\omega}),$$

$$R_3 = \sum_i R_3^{(i)}, \quad R_{\pm} = \sum_i R_{\pm}^{(i)}, \quad R_3^{(i)} = \frac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|),$$

$$R_+^{(i)} = |1\rangle\langle 0|, \quad R_-^{(i)} = |0\rangle\langle 1|.$$

Здесь $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – собственные вектора гамильтониана изолированного атома с энергиями E_0 и E_1 , $E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$, ω_c – частота фотонов микрорезонаторной моды. Используемые операторы подчиняются следующим коммутационным соотношениям

$$[R_3, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}, \quad [R_+, R_-] = 2R_3, \quad [N, c] = -c, \quad [N, c^+] = c^+, \quad [c, c^+] = 1. \quad (3)$$

Вектор состояния $|\Psi\rangle$ всей системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle. \quad (4)$$

Уравнение (4) совместно с определением гамильтониана (2), коммутационными соотношениями (3) и начальными условиями дают решение задачи об эволюции атомов и поля в одномодовом резонаторе в сделанных предположениях.

Кинетические уравнения следуют из (2)–(4) при дополнительных предположениях относительно начального состояния внешнего термостата. Однако в случае широкополосного внешнего поля непосредственное применение к гамильтониану (2) стандартных методов получения кинетических уравнений приведет к ошибке, поэтому сначала надо из исходного гамильтониана (3) получить эффективный гамильтониан, отвечающий резонансному условию (1) и лишь затем применять стандартные методы получения кинетических уравнений [2].

Чтобы получить эффективный гамильтониан задачи, существенно упрощающий уравнение (4), совершим унитарное преобразование [2]:

$$|\tilde{\Psi}\rangle = U|\Psi\rangle \quad (5)$$

Переход от вектора $|\Psi\rangle$ к новому вектору (5) сопровождается изменением гамильтониана:

$$\tilde{H} = UHU^+ - i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^+, \quad (6)$$

так что теперь описание квантовой системы дается уравнением Шредингера с преобразованным гамильтонианом (6):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\Psi}\rangle = \tilde{H}|\tilde{\Psi}\rangle. \quad (7)$$

Представим унитарный оператор U через эрмитов оператор

$$U = e^{-iS}, \quad S^+ = S, \quad (8)$$

а преобразованный гамильтониан (6) и S разложим в ряды по константам взаимодействия с фотонами микрорезонаторной моды и термостата:

$$S = S^{(10)} + S^{(01)} + S^{(11)} + \dots, \quad \tilde{H} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(01)} + \tilde{H}^{(11)} + \tilde{H}^{(20)} + \dots, \quad (9)$$

где левый индекс каждой пары верхних индексов указывает на порядок разложения по константе связи с микрорезонаторной модой, а правый – по константе связи с квантованными волнами внешнего широкополосного электромагнитного поля (термостата). Имеем

$$\tilde{H}^{(00)} = H_a + H_c + H_\Gamma, \quad (10)$$

$$\tilde{H}^{(10)} = V_c - i[S^{(10)}, \tilde{H}^{(00)}] + \hbar\partial S^{(10)}/\partial t, \quad (11)$$

$$\tilde{H}^{(01)} = V_\Gamma - i[S^{(01)}, \tilde{H}^{(00)}] + \hbar\partial S^{(01)}/\partial t, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(11)} = & -(i/2)[S^{(01)}, V_c] - (i/2)[S^{(10)}, V_\Gamma] - (i/2)[S^{(01)}, \tilde{H}^{(10)}] - \\ & - (i/2)[S^{(10)}, \tilde{H}^{(01)}] - i[S^{(11)}, \tilde{H}^{(00)}] + \hbar\partial S^{(11)}/\partial t, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{H}^{(10)} = -\frac{i}{2}[S^{(10)}, V_c] - \frac{i}{2}[S^{(10)}, \tilde{H}^{(10)}] - i[S^{(20)}, \tilde{H}^{(00)}] + \hbar\frac{\partial S^{(20)}}{\partial t}, \dots, \quad (14)$$

Отсутствие однофотонных резонансных переходов позволяет потребовать, чтобы были выполнены условия

$$\tilde{H}^{(10)} = 0, \quad \tilde{H}^{(01)} = 0. \quad (15)$$

Это достигается при помощи операторов $S^{(10)}$ и $S^{(01)}$, которые получаются из уравнений (11) и (12) в виде

$$\begin{aligned} S^{(10)} &= \frac{igR_+c}{\hbar(\omega_0 - \omega_c)} + \frac{igR_+c^+}{\hbar(\omega_0 + \omega_c)} + H.c., \\ S^{(01)} &= \sum_{\omega} \frac{i\Gamma_{\omega}R_+b_{\omega}}{\hbar(\omega_0 - \omega)} + \sum_{\omega} \frac{i\Gamma_{\omega}R_+b_{\omega}^+}{\hbar(\omega_0 + \omega_c)} + H.c. \end{aligned} \quad (16)$$

Через $H.c.$ обозначены операторные слагаемые, эрмитово сопряженные предыдущим.

Эффективный гамильтониан задачи $\tilde{H} = \tilde{H}^{(00)} + \tilde{H}^{(10)} + \tilde{H}^{(01)} + \tilde{H}^{(11)} + \tilde{H}^{(20)}$, отвечающий резонансному условию (1) получается в виде

$$H^{\text{eff}} = H_{\text{cl}} + H_{\Gamma} + V_{\text{cl}-\Gamma}, \quad (17)$$

где $H_{\text{cl}} = H_a + H_c + H^{(\text{St})}$ – гамильтониан атомно-фотонного кластера, $V_{\text{cl}-\Gamma}$ – оператор взаимодействия атомно-фотонного кластера с термостатом, а введенные операторы $H^{(\text{St})}$ и $V_{\text{cl}-\Gamma}$ определяются выражениями

$$H^{(\text{St})} = \hbar\Pi^{(\text{St})}NR_3, \quad V_{\text{cl}-\Gamma} = \sum_{\omega} G_{\omega}(b_{\omega}c^+R_+ + b_{\omega}^+cR_-). \quad (18)$$

Выражения для $\Pi^{(\text{St})}$ и G_{ω} не приводим, поскольку в реальном атоме много нерезонансных уровней, которые дают вклад в $\Pi^{(\text{St})}$ и G_{ω} . Корректный их учет проводится стандартным способом, изложенным в монографии [2]. Здесь же будем рассматривать $\Pi^{(\text{St})}$ и G_{ω} как параметры теории, причем относительно G_{ω} предполагаем, что вблизи ω_{Γ} её можно считать постоянной в пределах ширины линии однородного уширения перехода $E_1 \rightarrow E_0$.

2. Описание атомно-фотонного излучателя в образующих полиномиальной алгебры

Гамильтониан атомно-фотонного кластера H_{cl} определяется образующими двух различных алгебр: алгебры осцилляторов (или Гейзенберга–Вейля: c , c^+ и N) и алгебры углового момента: R_- , R_+ и R_3). Это результат использованной стандартной схемы квантования, а для эффективного решения задачи алгебраическими методами необходимо иметь представление гамильтониана через образующие одной алгебры. Выразим гамильтониан H_{cl} через новые операторы, которые позволят короче и нагляднее представить исходный гамильтониан. Более компактная запись гамильтониана удобна для последующего анализа и может позволить найти подход к аналитическому решению задачи.

Естественно ввести новые операторы X_{\pm} , позволяющие говорить именно об атомно-фотонном кластере:

$$X_- = cR_-, \quad X_+ = c^+R_+, \quad X_0 = \frac{R_3 + N}{2}. \quad (19)$$

Тогда гамильтониан атомно-фотонного кластера, как и оператор его взаимодействия с внешним электромагнитным полем, можно переписать как

$$H_{\text{cl}} = \hbar(\omega_0 + \omega_c)X_0 + \hbar(\omega_0 - \omega_c)\frac{r - X}{2} + \hbar\Pi^{(\text{St})} \left(X_0^2 - \frac{(r - X)^2}{4} \right),$$

$$V_{\text{cl}-\Gamma} = \sum_{\omega} G_{\omega}(b_{\omega}X_+ + b_{\omega}^+X_-).$$

При этом операторы X_0 , X_- и X_+ являются образующими полиномиальной алгебры третьего порядка с коммутационными соотношениями

$$[X_0, X_{\pm}] = \pm X_{\pm}, \quad [X_-, X_+] = p_n(X_0 + 1) - p_n(X_0) \quad (20)$$

и характеристическим полиномом

$$X_+X_- = p_n(X_0) = c_0 \prod_{i=1}^n (X_0 - q_i) \quad (21)$$

третьего порядка ($n = 3$) с параметрами

$$c_0 = -1, \quad q_1 = (r - X)/2, \quad q_2 = (X - 3r)/2, \quad q_3 = (X + r)/2 + 1. \quad (22)$$

Операторы

$$X = N - R_3 + r, \quad R^2 = R_+R_- + R_3^2 - R_3 = R_-R_+ + R_3^2 + R_3$$

являются операторами Казимира рассматриваемой полиномиальной алгебры, причем на неприводимом представлении собственные значения оператора X неотрицательны, а оператора R^2 равны $r(r + 1)$.

Полиномиальные алгебры введены В.П. Карасевым в 1993 г. [3] и представляют собой адекватный аппарат для описания кластерных состояний. В рассматриваемом случае атомно-фотонного излучателя полиномиальная алгебра совпала с полиномиальной алгеброй, возникающей в задаче Тависа–Каммингса [4], поэтому можно воспользоваться неприводимыми представлениями, найденными в [4]. В данной статье следуем обозначениям лекции [5].

3. Кинетические уравнения атомно-фотонного излучателя

Для вывода кинетических уравнений атомно-фотонного излучателя будем считать, что начальное состояние $|\Phi_0\rangle$ внешнего электромагнитного поля δ -коррелировано:

$$\langle \Phi_0 | b_{\omega}^+ b_{\omega'} | \Phi_0 \rangle = n(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad \langle \Phi_0 | b_{\omega} b_{\omega'}^+ | \Phi_0 \rangle = (1 + n(\omega)) \delta(\omega - \omega'), \quad (23)$$

$$\langle \Phi_0 | b_{\omega} b_{\omega'} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | b_{\omega}^+ b_{\omega'}^+ | \Phi_0 \rangle = 0.$$

Это означает, что внешнее электромагнитное поле рассматривается как термостат с плотностью фотонов $n(\omega)$ на частоте ω . Обычному электромагнитному вакууму отвечает $n(\omega) = 0$.

Введем квантовые винеровские процессы $B(t, t_0)$ и их инкременты dB и dB^+ следующим образом:

$$B(t, t_0) = \int_{t_0}^t b(t') dt', \quad b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega(t-t_0)} b_{\omega}(t_0) d\omega,$$

$$[B(t, t_0), B^+(t, t_0)] = (t - t_0), \quad dB \equiv B(t + dt, t_0) - B(t, t_0),$$

причем произведения инкрементов винеровских процессов подчиняются алгебре

$$\begin{aligned} dB^+(t) dB(t) &= N dt, \quad dB(t) dB^+(t) = (1 + N) dt, \\ dB(t) dB(t) &= dB^+(t) dB^+(t) = dt dt = dt dB(t) = \\ &dt dB^+(t) = dB(t) dt = dB^+(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение Гейзенберга для произвольного оператора A атомно-фотонного кластера имеет вид квантового стохастического дифференциального уравнения

$$dA = -\frac{i}{\hbar}[A, H_{cl}] dt - \frac{i}{\hbar}\sqrt{\chi}[A, X_+] dB(t) + \frac{i}{\hbar}\sqrt{\chi}[A, X_-] dB_+(t) + I dt, \quad (25)$$

$$I = \frac{\chi}{2}\{(n+1)(X_+[A, X_-] + [X_+, A]X_-) + n(X_-[A, X_+] + [X_-, A]X_+)\},$$

$$\chi = 2\pi G^2(\omega_\Gamma), \quad n = n(\omega_\Gamma).$$

При этом выполняется правило дифференцирования Ито

$$d(A_1 A_2) = (dA_1)A_2 + A_1 dA_2 + (dA_1)(dA_2).$$

Из уравнения (25) стандартным образом получаем уравнение для матрицы плотности ρ атомно-фотонного излучателя

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\rho, H_{cl}] - \hat{\Gamma}\rho \quad (26)$$

с релаксационным оператором

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}\rho &= \frac{\chi}{2}(n+1)(\rho X_+ X_- + X_+ X_- \rho - 2X_- \rho X_+) + \\ &+ \frac{\chi}{2}n(\rho X_- X_+ + X_- X_+ \rho - 2X_+ \rho X_-). \end{aligned} \quad (27)$$

Полученный релаксационный оператор имеет форму Линдблада [6], и поэтому его вид совпадает с релаксационным оператором [7, 8], описывающим спонтанный распад атома или группы атомов при резонансном взаимодействии с термостатом. Разница лишь в коммутационных соотношениях для операторов, образующих релаксационный оператор. В случае атомно-фотонного кластера образующие принадлежат полиномиальной алгебре третьего порядка, тогда как в случае обычного спонтанного излучения атомов или группы атомов образующие подчиняются коммутационным соотношениям $su(2)$ -алгебры или алгебры углового момента. Последнюю, впрочем, можно также представлять как полиномиальную алгебру второго порядка [3–5]. При этом полиномиальные алгебры третьего и более высокого порядков – бесконечномерные, то есть вообще говоря не являются алгебрами Ли.

От случая спонтанного излучения атома или группы атомов отличается также «невозмущенный» гамильтониан атомно-фотонного кластера H_{cl} . Он является нелинейным!

4. К решению кинетических уравнений

Чтобы иметь возможность как аналитического, так и численного решения кинетических уравнений (26)–(27), необходимо иметь представление полиномиальной алгебры (20)–(22). Здесь следуем работе [4] (см. также [5]).

Будем обозначать полиномиальную алгебру второго порядка, порожденную алгеброй $su(2)$ с заменой оператора Казимира R^2 на его значение $r(r+1)I$ на некотором неприводимом представлении (I – единичный оператор), как \mathbb{R}_r . При этом генераторы алгебры и параметр неприводимого представления отмечаем тильдой: \tilde{R}_- , \tilde{R}_+ , \tilde{R}_3 и \tilde{r} . Коммутационные соотношения и структурный полином алгебры $\mathbb{R}_{\tilde{r}}$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} [\tilde{R}_3, \tilde{R}_{\pm}] &= \pm \tilde{R}_{\pm}, \quad [\tilde{R}_+, \tilde{R}_-] = 2\tilde{R}_3 = p_2(\tilde{R}_3) - p_2(\tilde{R}_3 + 1), \\ \tilde{R}_+ \tilde{R}_- &= p_2(\tilde{R}_3) = \sum_{i=0}^2 C_{n-i}(\tilde{R}_3)^i = -(\tilde{R}_3 + \tilde{r})(\tilde{R}_3 - \tilde{r} - 1), \\ C_0 &= -1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = \tilde{r}(\tilde{r} + 1). \end{aligned}$$

Следуя [4], будем говорить о представлении с заданным X как о зоне с номером X . Если $X < 2r$, то это ближние зоны, если $X > 2r$, то дальние зоны, если $X = 2r$, то граничная зона. Начальные данные обычно содержат большое число ближних и дальних зон, поэтому средние различных операторов, как правило, мало изменяются при учете или неучете еще одной граничной зоны.

Представление в дальних зонах ($X > 2r$) через генераторы $\mathbb{R}_{\tilde{r}}$ ($\tilde{r} = r$) имеет вид:

$$X_0 = \frac{X-r}{2} + \tilde{R}_3, \quad X_+ = \sqrt{X-r + \tilde{R}_3} \tilde{R}_+, \quad X_- = \tilde{R}_- \sqrt{X-r + \tilde{R}_3}. \quad (28)$$

Эти отображения аналитичны и обратимы, поскольку множество собственных значений \tilde{R}_3 принадлежит отрезку $[-r, r]$, так что подкоренные выражения положительны.

В дальних зонах размерность представления совпадает с размерностью атомного представления. В терминах атомно-полевых операторов имеем

$$\tilde{R}_3 = R_3, \quad \tilde{R}_+ = \frac{1}{\sqrt{N}} c^+ R_+ = c^+ R_+ \frac{1}{\sqrt{N+1}}, \quad \tilde{R}_- = c R_- \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} c R_-.$$

Равенство операторов $c \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} c$ верно на состояниях, не имеющих проекции на вакуумный вектор поля.

Поскольку представление $X_- = \tilde{R}_- \sqrt{X-r + \tilde{R}_3}$ можно переписать в виде $X_- = \sqrt{X-r+1 + \tilde{R}_3} \tilde{R}_-$, то для середины спектра подкорневых выражений следует из одного выражения $X-r$, а из другого выражения $X-r+1$. Поэтому в качестве нулевого приближения для X_- правильнее взять среднее арифметическое: $X_- \approx \sqrt{X-r+1/2} \tilde{R}_-$ [4]. Тогда

$$X_- = (\Omega_z/2) \sqrt{1 + \beta_z(\tilde{R}_3 + 1/2)} \tilde{R}_-, \quad X_+ = \tilde{R}_+ (\Omega_z/2) \sqrt{1 + \beta_z(\tilde{R}_3 + 1/2)}, \quad (29)$$

$$\Omega_z = 2\sqrt{X-r+1/2}, \quad \beta_z = \frac{1}{X-r+1/2}. \quad (30)$$

Представление в ближних зонах ($X < 2r$) через генераторы $\mathbb{R}_{\tilde{r}}$ ($\tilde{r} = X/2$) имеет вид:

$$X_0 = \frac{r}{2} + \tilde{R}_3, \quad X_+ = \sqrt{2r - \frac{X}{2} + \tilde{R}_3} \tilde{R}_+, \quad X_- = \tilde{R}_- \sqrt{2r - \frac{X}{2} + \tilde{R}_3}. \quad (31)$$

В ближних зонах размерность неприводимого представления меньше размерности инвариантного атомного подпространства, соответствующего данному кооперативному числу r . В терминах атомно-полевых операторов имеем

$$\begin{aligned}\tilde{R}_3 &= N - \frac{X}{2}, \\ \tilde{R}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2r - X + N}} c^+ R_+ = c^+ \frac{1}{\sqrt{r + R_3}} R_+, \\ \tilde{R}_- &= c R_- \frac{1}{\sqrt{2r - X + N}} = R_- \frac{1}{\sqrt{r + R_3}} c.\end{aligned}$$

Справедливы также формулы (29) с параметрами

$$\Omega_z = 2\sqrt{\frac{4r - X + 1}{2}}, \quad \beta_z = \frac{2}{4r - X + 1}.$$

В ряде случаев удобно рассматривать параметры β_z в качестве параметра малости и использовать методы теории возмущений, рассматривая случаи ближней и дальней зон единым образом. Тогда в качестве нулевого приближения имеем

$$X_- = \Omega_z \tilde{R}_+ / 2, \quad X_+ = \Omega_z \tilde{R}_- / 2$$

и релаксационный оператор атомно-фотонного кластера отличается от оператора в обычном случае спонтанного распада атомов лишь наличием обобщенной частоты Раби Ω_z .

Автор выражает благодарность профессору В.В. Самарцеву за приглашение прочитать лекцию на XII Международной молодежной научной школе «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия».

Summary

A.M. Basharov. The Lindblad Equation within the Framework of Polynomial Algebra for Radiation Description from Atom-Photon Cluster.

Kinetic equation was obtained for description of radiation from atom-photon cluster localized in a single mode cavity.

Key words: single mode cavity, Raman resonance, broadband radiation, effective Hamiltonian, representation of polynomial algebra, quantum stochastic differential equation, atom-photon emitter.

Литература

1. *Dicke R.H.* Coherence in spontaneous radiation processes // Phys. Rev. – 1954. – V. 93. – P. 99–111.
2. *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 650 p.
3. *Карасев В.П.* Полиномиальные деформации алгебры Ли $sl(2)$ в задачах квантовой оптики // Теор. и мат. физика. – 1993. – Т. 95, № 1. – С. 3–19.
4. *Vadeiko I.P., Miroshnichenko G.P., Rybin A.V., Timonen J.* Polynomial algebra of excitations in quantum optics // Phys. Rev. A – 2003. – V. 67. – P. 053808.
5. *Башаров А.М.* Теория сверхизлучения в резонаторе как пример применения полиномиальных алгебр // XII Междунар. молод. науч. шк. «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия»: Сб. ст. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. – Вып. 12. – С. 34–42.

6. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // *Comm. Math. Phys.* – 1976. – V. 48. – P. 119–130.
7. *Gardiner C.W.* *Quantum Noise.* – Berlin: Springer, 1991. – XIX+365 p.
8. *Gardiner C.W., Zoller P.* *Quantum noise.* – Berlin: Springer, 2004. – XXII+440 p.

Поступила в редакцию
23.01.09

Башаров Асхат Масхудович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории нелинейной оптики РНЦ «Курчатовский институт», г. Москва.

E-mail: *basharov@gmail.com*