Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2019, №4, с. 73–84 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С.В. СВИНИНА, А.К. СВИНИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация. Рассматривается линейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных со специальными матричными коэффициентами. Исследуются два случая. Первый случай, когда система имеет малый индекс и в каноническом виде системы матрица при искомой вектор-функции произвольная. Второй случай, когда система имеет произвольный индекс, а матрица при искомой вектор-функции в каноническом виде системы имеет треугольную форму. В обоих случаях с помощью метода характеристик и метода последовательных приближений доказывается существование единственного классического решения смешанных задач для рассматриваемых дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, индекс пучка, матричный пучок, метод характеристик.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-73-84

Введение

При описании поведения сплошной среды (газ, жидкость, твердое тело) возникают различные модели, которые приводят как правило к системам уравнений в частных производных, к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными или к дифференциально-алгебраическим системам уравнений в частных производных [1]–[5]. Под дифференциально-алгебраической системой уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными понимают систему вида

$$\mathcal{F}_s\left(x, t, u^1, u^2, \dots, u^n, p^1, p^2, \dots, p^n, q^1, q^2, \dots, q^n\right) = 0, \tag{1}$$

$$p^s = \partial_t u^s, \quad q^s = \partial_x u^s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

в которой предполагается, что матрицы Якоби

$$\partial_p \mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{s_1}}{\partial p^{s_2}}\right), \quad \partial_q \mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{s_1}}{\partial q^{s_2}}\right), \quad s_1 = 1, 2, \dots, n, \quad s_2 = 1, 2, \dots, n,$$

Поступила в редакцию 16.02.2018, после доработки 16.02.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта Сибирского отделения Российской академии наук “Качественная теория и численный анализ дифференциально-алгебраических уравнений”, № 0348-216-0009.

тождественно вырождены в области определения U. Если в каждой точке области U пучок матриц $\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}$ при любом значении u является регулярным, то его индекс или, иначе говоря, индекс системы (1) определяется парой чисел $(k, 0)$, где k — это максимальная степень элементарных делителей пучка $\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}$, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена $\det(\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F})$ во всей области U. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $\partial_p\mathcal{F}+\lambda\partial_q\mathcal{F}$ не содержит сингулярной составляющей. Будем рассматривать именно такие системы. Это определение индекса основано на структурных свойствах матричного пучка, построенного по коэффициентам системы и поэтому называется алгебраическим. Таким определением будем пользоваться в данной работе. В действительности, индекс системы имеет разнообразные трактовки даже в отечественной литературе. Так, например, в работе [6] он определяется порядком левого регулизирующего оператора системы. В зарубежной литературе существует несколько терминологий и трактовок индекса [7], [8]. Отметим, что если один из параметров индекса дифференциально-алгебраической системы выше единицы, то решение начально-краевой задачи для такой системы содержит не только правую часть и начально-краевые функции, но также их производные. Поэтому исследование и численное решение систем, для которых хотя бы один из параметров индекса выше единицы, существенно отличается от систем, каждый параметр индекса которых не превосходит единицу. Для линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных индекса $(1, 0)$ и $(k, 0)$, где $k \geq 2$, разработаны эффективные методы численного решения, обладающие высокой точностью [9]–[11]. Вопрос существования решения начально-краевых задач для таких систем пока остался без внимания. Ранее были попытки доказать существование решения для линейных уравнений с матричным пучком частного вида, имеющим индекс $(1, 0)$ [12], [6]. Для доказательства применялся достаточно громоздкий метод конечных разностей, который вполне можно было заменить методом характеристик. В данной работе исследован вопрос существования решения смешанных задач для линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных, имеющих индекс $(1, 0)$ и $(k, 0)$, где $k \geq 2$, с применением метода характеристик [13]–[15].

Коротко о структуре работы. Кроме введения, статья состоит из трех разделов и заключения. В первом разделе формулируем начально краевую задачу, которая является объектом исследования, и приводим необходимые дополнительные сведения об индексе системы. Во втором разделе доказываем теорему существования и единственности классического решения смешанной задачи для системы индекса $(1, 0)$. В третьем разделе при определенных условиях на матрицу при искомой вектор-функции в канонической форме системы доказываем теорему существования и единственности классического решения смешанной задачи для системы индекса $(k, 0)$, где $k \geq 2$. В заключительном разделе обсуждаем полученные в работе результаты и делаем некоторые выводы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему уравнений в частных производных

$$A(x,t)\partial_t u + B(x,t)\partial_x u + C(x,t)u = f(x,t) \tag{2}$$

с начально-краевыми условиями

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \phi(x), \tag{3}$$

где $A(x,t)$, $B(x,t)$ и $C(x,t)$ – заданные квадратные матрицы порядка n с элементами, зависящими от переменных $x \in \mathbb{R}^1$ и $t \in \mathbb{R}^1$, $(x,t) \in U = [x_0; X] \times [t_0; T]$. Предполагается, что $f(x,t)$, $\psi(t)$ и $\phi(x)$ – заданные n-мерные вектор-функции, определенные в той же области

U, а $u = u(x,t)$ – искомая n-мерная вектор-функция. Также предполагаем, что элементы матриц $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ и вектор-функций $f(x,t)$, $\psi(t)$ и $\phi(x)$ являются достаточно гладкими в области U.

Пусть

$$\det A(x,t) = 0 \;\text{ и }\; \det B(x,t) = 0 \;\; \forall\ (x,t) \in U. \tag{4}$$

Очевидно, система (2) с условием (4) является частным случаем дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных. Во введении отметили, что если в каждой точке области U пучок матриц $\mathtt{P}(\lambda,x,t) = A(x,t) + \lambda B(x,t)$ является регулярным, то его индекс или индекс системы (2) определяется парой чисел $(k,0)$, где k – максимальная степень элементарных делителей пучка $\mathtt{P}(\lambda,x,t)$, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена $\det \mathtt{P}(\lambda,x,t)$ во всей области U. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $\mathtt{P}(\lambda,x,t)$ не содержит сингулярной составляющей [10]. Сформулируем достаточные условия, при выполнении которых пучок $\mathtt{P}(\lambda,x,t)$ имеет индекс $(k,0)$.

Теорема 1 ([16]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *все корни характеристического многочлена* $\det(\mathtt{A}(x)+\lambda\mathtt{B}(x))$, *где* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \bar{U}$, $\bar{U}$ *– замыкание некоторой области, содержащейся в* $\mathbb{R}^m$, *являются вещественными и имеют постоянную кратность в области определения* $\bar{U}$*;*
2) *старший коэффициент многочлена* $\det(\mathtt{A}(x)+\lambda\mathtt{B}(x))$ *относительно параметра* λ *не обращается в нуль ни в одной точке* $\bar{U}$*;*
3) *ранги матриц* $\mathtt{A}(x)$ *и* $\mathtt{B}(x)$ *являются постоянными в каждой точке области* $\bar{U}$ *и меньше размерности* n.

Тогда пучок $\mathtt{A}(x) + \lambda\mathtt{B}(x)$ *s-гладко эквивалентен пучку следующего канонического вида:*

$$\operatorname{diag}\{E_d, \mathtt{M}(x), E_p\} + \lambda \operatorname{diag}\{\mathtt{J}(x), E_l, \mathtt{N}(x)\}, \tag{5}$$

где E_d *– единичная матрица порядка* d*;* $\mathtt{M}(x)$ *и* $\mathtt{N}(x)$ *— верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка* l *и* p *соответственно;* $\mathtt{J}(x) = \operatorname{diag}\{\mathtt{J}_1(x), \mathtt{J}_2(x), \ldots, \mathtt{J}_{\tilde{s}}(x)\}$ *— блочно-диагональная матрица порядка* d*, в которой* $\mathtt{J}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, \tilde{s}$, *— невырожденные верхние (правые) треугольные матрицы порядков* p_i *соответственно,* $d = \sum\limits_{\nu=1}^{\tilde{s}} p_\nu$*; каждый блок* $\mathtt{J}_i(x)$ *имеет единственное собственное значение* $-1/\lambda_i(x)$ *в области определения* $\bar{U}$*;* $\lambda_i(x)$ *— собственные значения характеристического многочлена* $\det(\mathtt{A}(x) + \lambda\mathtt{B}(x))$*, не обращающиеся в нуль в области* $\bar{U}$*;* $p = n - d - l$.

Замечание. В утверждении теоремы 1 диагональные блоки матрицы $\mathtt{J}(x)$ имеют верхнюю (правую) треугольную форму. Это следует из условий теоремы 1 и теоремы 2 из [16].

Из теоремы 1 следует, что $\mathtt{M}(x)$ и $\mathtt{N}(x)$ в (4) являются нильпотентными матрицами в области определения $\bar{U}$. Пусть $\operatorname{ind} \mathtt{M}(x) = k_1$ и $\operatorname{ind} \mathtt{N}(x) = k_2$ в области $\bar{U}$, т. е. $k_1 = \min\{\bar{k} : \mathtt{M}(x)^{\bar{k}} = 0 \quad \forall x \in \bar{U}\}$. Аналогично определяется k_2. Тогда пучок $\mathtt{P}(\lambda,x,t)$, для которого выполняются все условия теоремы 1, имеет индекс $(k,0)$, где $k = \max\{k_1,k_2\}$, и соответственно система (2) по определению имеет индекс $(k,0)$.

В данной работе рассмотрим два случая. В первом случае предполагаем, что система (2) имеет индекс $(1,0)$, а во втором случае имеет индекс $(k,0)$, где $k \geq 2$, накладывая при этом некоторые условия на матрицу при искомой вектор-функции в канонической форме системы.

2. Случай I. Индекс (1,0)

В этом разделе будет доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) для матричного пучка $\mathtt{P}(\lambda, x, t)$ *выполнены все условия теоремы 1;*
2) все корни характеристического многочлена $\det(A(x,t)+\lambda B(x,t))$ *неположительные;*
3) степени элементарных делителей пучка $\mathtt{P}(\lambda, x, t)$ *не превосходят единицы;*
4) элементы матрицы $C(x,t)$ *и вектор-функций* $f(x,t)$*,* $\psi(t)$ *и* $\phi(x)$ *принадлежат пространству* $C^1(U)$*, а элементы матриц* $A(x,t)$ *и* $B(x,t)$ *принадлежат пространству* $C^2(U)$*;*
5) начально-краевые условия (3) *являются согласованными в точке* (x_0, t_0) *вместе со своими производными.*
Тогда задача $(2)-(3)$ *имеет единственное классическое решение в области* U*.*

Доказательство. В силу условий 1) и 3) теоремы найдутся невырожденные в области U матрицы $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ с элементами из $C^2(U)$, которые приведут пучок $\mathtt{P}(\lambda, x, t)$ к следующему каноническому виду:

$$\mathrm{diag}\{E_d, \mathcal{O}_l, E_p\} + \lambda \mathrm{diag}\{J(x,t), E_l, \mathcal{O}_p\},$$

где $\mathcal{O}_l$ – нулевой квадратный блок порядка l. Умножим систему (2) слева на матрицу $P(x,t)$ и выполним замену переменной $u = Q(x,t)v$, где $v = v(x,t)$ – некоторая неизвестная n-мерная вектор-функция. В результате получим систему

$$\mathcal{A}(x,t)\partial_t v + \mathcal{B}(x,t)\partial_x v + \mathcal{C}(x,t)v = g(x,t), \tag{6}$$

где $\mathcal{A}(x,t) = \mathrm{diag}\{E_d, \mathcal{O}_l, E_p\}$, $\mathcal{B}(x,t) = \mathrm{diag}\{J(x,t), E_l, \mathcal{O}_p\}$, $\mathcal{C}(x,t) = P(x,t)C(x,t)Q(x,t) + P(x,t)A(x,t)\partial_t Q(x,t) + P(x,t)B(x,t)\partial_x Q(x,t)$ и $g(x,t) = P(x,t)f(x,t)$.

В силу условия 3) доказываемой теоремы, матрица $J(x,t)$ имеет диагональный вид $J(x,t) = \mathrm{diag}\{k_1(x,t), k_2(x,t), \ldots, k_l(x,t)\}$. Начально-краевые условия (3) при этом преобразуются к виду

$$v(x_0, t) = \Psi(t), \quad v(x, t_0) = \Phi(x), \tag{7}$$

где $\Psi(t) = Q(x_0,t)^{-1}\psi(t)$ и $\Phi(x) = Q(x,t_0)^{-1}\phi(x)$. Заметим, что по теореме 1 элементы матриц $\mathcal{A}(x,t)$ и $\mathcal{B}(x,t)$ принадлежат пространству $C^2(U)$, а элементы матрицы $\mathcal{C}(x,t)$ и вектор-функций $g(x,t)$, $\Psi(t)$ и $\Phi(t)$ принадлежат пространству $C^1(U)$. Разобьем векторы v и $g(x,t)$ на три блока: $v = (v^1, v^2, v^3)^\top$ и $g(x,t) = (g^1(x,t), g^2(x,t), g^3(x,t))^\top$ размеров d, l и p соответственно. Согласно этому разбиению запишем матрицу $\mathcal{C}(x,t)$ следующим образом: $\mathcal{C}(x,t) = \mathrm{colon}(\mathcal{C}_1(x,t), \mathcal{C}_2(x,t), \mathcal{C}_3(x,t))$, где блоки $\mathcal{C}_j(x,t)$ имеют размеры $d \times n$, $l \times n$ и $p \times n$ соответственно. Тогда систему (6) можно переписать в расщепленном виде

$$\begin{gathered} \partial_x v^2 = g^2(x,t) - \mathcal{C}_2(x,t)v, \quad \partial_t v^3 = g^3(x,t) - \mathcal{C}_3(x,t)v, \\ \partial_t v^1 + J(x,t)\partial_x v^1 = g^1(x,t) - \mathcal{C}_1(x,t)v. \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть l_i – кривые, заданные параметрически уравнениями

$$x_i = x_i(\tau), \quad t = \tau, \quad i = 1, \ldots, d. \tag{9}$$

Предполагается, что каждая кривая $l_i: \ x = x_i(x_i^0, t_0, \tau)$ является решением соответствующей задачи Коши

$$\frac{dx_i}{d\tau} = k_i(x_i, \tau), \quad x_i|_{t=\tau_0} = x_i^0, \tag{10}$$

где $k_i(x,\tau) \in C^1(U)$ – диагональные элементы матрицы $J(x,t)$. По условию 2) теоремы $k_i(x,\tau) > 0 \ \ \forall (x,\tau) \in U$. Так как $k_i(x,\tau)$ – ограниченные в области U функции, то решение задачи Коши существует и единственно для каждого i на отрезке $[t_0, T]$. Применим к системе (8) метод последовательных приближений [17]. Пусть $v_0(x,t) = \Phi(x)$, а $v_{k+1}(x,t)$ определяется как решение следующей задачи:

$$\begin{gathered} \partial_t v_{i,k+1} + k_i(x,t)\partial_x v_{i,k+1} = g_i(x,t) - \mathcal{C}_{1,i}(x,t)v_k, \quad i = \overline{1,d}, \\ \partial_x v^2_{k+1} = g^2(x,t) - \mathcal{C}_2(x,t)v_k, \quad \partial_t v^3_{k+1} = g^3(x,t) - \mathcal{C}_3(x,t)v_k, \\ v_{k+1}(x_0,t) = \Psi(t), \quad v_{k+1}(x,t_0) = \Phi(x), \quad k = 0,1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{11}$$

где $v_{k+1} = (v^1_{k+1}, v^2_{k+1}, v^3_{k+1})^\top$ с блоком $v^1_{k+1} = (v_{1,k+1}, v_{2,k+1}, \ldots, v_{d,k+1})^\top$ и $\mathcal{C}_1(x,t) = \operatorname{colon}(\mathcal{C}_{1,1}(x,t), \mathcal{C}_{1,2}(x,t), \ldots, \mathcal{C}_{1,d}(x,t))$. С учетом (10) перепишем систему (11) в виде

$$\begin{gathered} \partial_x v^2_{k+1} = g^2(x,t) - \mathcal{C}_2(x,t)v_k, \quad \partial_t v^3_{k+1} = g^3(x,t) - \mathcal{C}_3(x,t)v_k, \\ dv_{i,k+1}/d\tau = g_i(x,t) - \mathcal{C}_{1,i}(x,t)v_k, \end{gathered} \tag{12}$$

где $dv_{i,k+1}/d\tau$ – производная i-й компоненты искомой функции v^1_{k+1} по переменной t в направлении характеристики $l_i: \quad x = x_i(x_i^0, t_0, \tau)$. Проинтегрируем уравнения системы (12) вдоль соответствующих характеристических линий. В результате получим систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} v_{i,k+1}(x,t) = v_{i,k+1}(x_i(x,t,t_0),t_0) + \int_{t_0}^t g_i(x_i(x,t,\tau),\tau)d\tau - \int_{t_0}^t \mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau)v_k(x_i(x,t,\tau),\tau)d\tau, \\ v^2_{k+1}(x,t) = v^2_{k+1}(x_0,t) + \int_{x_0}^x g^2(s,t)ds - \int_{x_0}^x \mathcal{C}_2(s,t)v_k(s,t)ds, \\ v^3_{k+1}(x,t) = v^3_{k+1}(x,t_0) + \int_{t_0}^t g^3(x,\tau)d\tau - \int_{t_0}^t \mathcal{C}_3(x,\tau)v_k(x,\tau)d\tau, \\ v_0(x,t) = \Phi(x), \quad v_{k+1}(x_0,t) = \Psi(t), \quad v_{k+1}(x,t_0) = \Phi(x), \quad k = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{13}$$

Рекуррентные соотношения (13), начиная с $v_0(x,t)$, однозначно определяют бесконечную последовательность функций $\{v_k(x,t) : k = 0,1,2,\ldots\}$. Очевидно, что в силу условия 4) настоящей теоремы все элементы этой последовательности являются непрерывными функциями. Покажем, что эта последовательность равномерно сходится к некоторой непрерывной функции. Очевидно, равномерная сходимость последовательности $\{v_k(x,t)\}$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$v_0(x,t) + \sum_{k=0}^{\infty} (v_{k+1}(x,t) - v_k(x,t)). \tag{14}$$

Покажем, что ряд (14) сходится абсолютно и равномерно. Из (13) находим соотношения

$$\begin{gathered} v_{i,k+1}(x,t) - v_{i,k}(x,t) = -\int_{t_0}^t \mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau)(v_k(x_i(x,t,\tau),\tau) - v_{k-1}(x_i(x,t,\tau),\tau))d\tau, \\ v^2_{k+1}(x,t) - v^2_k(x,t) = -\int_{x_0}^x \mathcal{C}_2(s,t)(v_k(s,t) - v_{k-1}(s,t))ds, \\ v^3_{k+1}(x,t) - v^3_k(x,t) = -\int_{t_0}^t \mathcal{C}_3(x,\tau)(v_k(x,\tau) - v_{k-1}(x,\tau))d\tau. \end{gathered} \tag{15}$$

В пространстве $C^1(U)$ используем норму $\|v(x,t)\|_{C(U)} = \max\{\|v(x,t)\| \quad \forall (x,t) \in U\}$, где $\|v(x,t)\| = \max\{|v_i(x,t)| \ \ \forall i = 1,\ldots,n\}$. Используя неравенство $\|Az\| \le \|Ae\| \cdot \|z\|$, где A –

некоторая произвольная матрица, z – некоторый произвольный вектор соответствующего размера, e – вектор, состоящий из единиц, из (15) получаем неравенства

$$\begin{gathered}
\|v^1_{k+1} - v^1_k\|_{C(U)} \leq \xi \int_{t_0}^{t} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} d\tau, \\
\|v^2_{k+1} - v^2_k\|_{C(U)} \leq \xi \int_{x_0}^{x} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} ds, \\
\|v^3_{k+1} - v^3_k(x,t)\|_{C(U)} = \xi \int_{t_0}^{t} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} d\tau,
\end{gathered} \tag{16}$$

где $\xi = \|\mathcal{C}(x,t)e\|_{C(U)}$. Заметим, что обозначив $\hat{v} = (v^1, v^3)^\top$, можем объединить первое и третье неравенства из (16) в одно. В результате, получаем

$$\begin{gathered}
\|v^2_{k+1} - v^2_k\|_{C(U)} \leq \xi \int_{x_0}^{x} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} ds. \\
\|\hat{v}_{k+1} - \hat{v}_k\|_{C(U)} \leq \xi \textstyle\int_{t_0}^{t} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} d\tau,
\end{gathered} \tag{17}$$

Из (17) следует

$$\|v_{k+1} - v_k\|_{C(U)} \leq \xi \cdot \max_{\forall (x,t)\in U} \left\{ \int_{t_0}^{t} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} d\tau,\ \int_{x_0}^{x} \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} ds \right\}. \tag{18}$$

Обозначим $\kappa = 1/2 \cdot \max\{\|v_0\|_{C(U)}, \|v_1\|_{C(U)}\}$. Тогда можем записать $\|v_1 - v_0\|_{C(U)} \leq \kappa$. Из (18) последовательно находим

$$\|v_2 - v_1\|_{C(U)} \leq \xi\kappa \cdot \max_{\forall (x,t)\in U} \left\{ (t-t_0),\ (x-x_0) \right\},$$

$$\|v_3 - v_2\|_{C(U)} \leq \xi^2\kappa \cdot \max_{\forall (x,t)\in U} \left\{ (t-t_0)^2/2,\ (x-x_0)(t-t_0),\ (x-x_0)^2/2 \right\}$$

и т. д. Нетрудно заметить, что эти неравенства записываются в общем виде

$$\|v_{k+1} - v_k\|_{C(U)} \leq \xi^k\kappa \cdot \max_{\forall s=1,\ldots,k} \frac{\tilde{X}^s \tilde{T}^{k-s}}{s!(k-s)!},$$

где $\tilde{X} = X - x_0$ и $\tilde{T} = T - t_0$. Так как числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k \tilde{X}^s \tilde{T}^{k-s}}{s!(k-s)!} \tag{19}$$

сходится при любом значении s, то и ряд (14), мажорируемый рядом (19), сходится абсолютно и равномерно. Поэтому последовательность функций $\{v_k(x,t)\}$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $v(x,t)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенствах (13), получаем, что предельная функция $v(x,t)$ удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\begin{gathered}
v_i(x,t) = v_i(x_i(x,t,t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t} g_i(x_i(x,t,\tau),\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau) v(x_i(x,t,\tau),\tau) d\tau, \\
v^2(x,t) = v^2(x_0,t) + \int_{x_0}^{x} g^2(s,t) ds - \int_{x_0}^{x} \mathcal{C}_2(s,t) v(s,t) ds, \\
v^3(x,t) = v^3(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} g^3(x,\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}_3(x,\tau) v(x,\tau) d\tau
\end{gathered} \tag{20}$$

и начально-краевым условиям

$$v(x_0,t) = \Psi(t), \quad v(x,t_0) = \Phi(x).$$

Из непрерывности подинтегральных функций в (20) следует непрерывная дифференцируемость правой части первого и третьего уравнений в (20) по переменной t и правой части второго уравнения в (20) по переменной x. Таким образом, компоненты v_i, где $i = 1, \dots, d$, первой блочной компоненты $v^1 = (v_1, v_2, \dots, v_d)^\top$ предельной функции $v(x,t) = (v^1, v^2, v^3)^\top$ непрерывно дифференцируемы по переменной t вдоль соответствующего характеристического направления $x_i = x_i(x,t)$. Вторая блочная компонента v^2 предельной функции $v(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменной x и третья блочная компонента v^3 непрерывно дифференцируема по переменной t.

Покажем, что предельная функция $v(x,t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией в области U. Продифференцируем первое и третье уравнения системы (13) по переменной x. В результате получим

$$\begin{gathered}
\partial_x v_{i,k+1} = \partial_x v_{i,k+1}(x_i(x,t,t_0),t_0)\partial_x x_i(x,t,t_0) + \int_{t_0}^t \partial_x g_i(x_i(x,t,\tau),\tau)\partial_x x_i d\tau - \\
- \int_{t_0}^t \left\{\partial_x \mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau) v_k(x_i(x,t,\tau),\tau) + \mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau)\partial_x v_k(x_i(x,t,\tau),\tau)\right\} \partial_x x_i d\tau, \\
\partial_x v^3_{k+1}(x,t) = \partial_x v^3_{k+1}(x,t_0)\partial_x x_i(x,t_0) + \int_{t_0}^t \partial_x g^3(x,\tau)\partial_x x_i d\tau - \\
- \int_{t_0}^t \left\{\partial_x \mathcal{C}_3(x,\tau) v_k(x,\tau) + \mathcal{C}_3(x,\tau)\partial_x v_k(x,\tau)\partial_x x_i\right\} d\tau.
\end{gathered} \tag{21}$$

Разобьем блоки $\mathcal{C}_{1,i}(x,t)$ и $\mathcal{C}_3(x,t)$ вертикальными линиями, отделяя по d, l и p столбцов соответственно. В результате получим $\mathcal{C}_{1,i}(x,t) = (\mathcal{C}^1_{1,i}(x,t), \mathcal{C}^2_{1,i}(x,t), \mathcal{C}^3_{1,i}(x,t))$ и $\mathcal{C}_3(x,t) = (\mathcal{C}^1_3(x,t), \mathcal{C}^2_3(x,t), \mathcal{C}^3_3(x,t))$. Исключая из (21) компоненту $\partial_x v^2_{k+1}(x,t)$ и используя второе уравнение из (11), получаем систему (с обозначением $x_i(\cdot) = x_i(x,t,\tau)$)

$$\begin{gathered}
\partial_x v_{i,k+1} = \partial_x v_{i,k+1}(x_i(x,t,t_0),t_0)\partial_x x_i(x,t,t_0) + \int_{t_0}^t \left\{\partial_x g_i(x_i(\cdot),\tau) - \mathcal{C}^2_{1,i}(x_i(\cdot),\tau)\times\right. \\
\left.\times\, g^2(x_i(\cdot),\tau)\right\}\partial_x x_i d\tau - \int_{t_0}^t \left\{\partial_x \mathcal{C}_{1,i}(x_i(\cdot),\tau) - \mathcal{C}^2_{1,i}(x_i(\cdot),\tau)\mathcal{C}_2(x,\tau)\right\} v_k(x_i(\cdot),\tau)\times \\
\times \partial_x x_i d\tau - \int_{t_0}^t \left\{\mathcal{C}^1_{1,i}(x_i(\cdot),\tau)\partial_x v^1_k(x_i(\cdot),\tau) + \mathcal{C}^3_{1,i}(x_i(\cdot),\tau)\partial_x v^3_k(x_i(\cdot),\tau)\right\}\partial_x x_i d\tau, \\
\partial_x v^3_{k+1}(x,t) = \partial_x v^3_{k+1}(x,t_0)\partial_x x_i(x,t_0) + \int_{t_0}^t \left\{\partial_x g^3(x,\tau) - \mathcal{C}^2_3(x,\tau) g^2(x,\tau)\right\}\partial_x x_i d\tau - \\
- \int_{t_0}^t \left\{\partial_x \mathcal{C}_3(x,\tau) + \mathcal{C}^2_3(x,\tau)\mathcal{C}_2(x,\tau)\right\} v_k(x,\tau) d\tau + \\
+ \int_{t_0}^t \left\{\mathcal{C}^1_3(x,\tau)\partial_x v^1_k(x,\tau) + \mathcal{C}^3_3(x,\tau)\partial_x v^3_k(x,\tau)\right\}\partial_x x_i d\tau
\end{gathered} \tag{22}$$

с неизвестной $\partial_x \tilde{v}_{k+1} = (\partial_x v^1_{k+1}, \partial_x v^3_{k+1})^\top$. Из (22) следует оценка

$$\|\partial_x \tilde{v}_{k+1} - \partial_x \tilde{v}_k\|_{C(U)} \le \|\mathcal{H}_1(x,t)e\|_{C(U)} \int_{t_0}^t \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} d\tau +$$

$$+\|\mathcal{H}_2(x,t)e\|_{C(U)}\int_{t_0}^{t}\|\partial_x\tilde{v}_k-\partial_x\tilde{v}_{k-1}\|_{C(U)}d\tau,$$

где элементы матриц $\mathcal{H}_1(x,t)$ и $\mathcal{H}_2(x,t)$ в силу условия 4) теоремы являются непрерывными функциями в области U. Так как последовательность $\{v_k(x,t)\}$ сходится в области U и матрицы $\mathcal{H}_1(x,t)$ и $\mathcal{H}_2(x,t)$ ограничены в этой области, то аналогично доказывается равномерная сходимость последовательности $\{\partial_x\tilde{v}_k(x,t)\}$. Таким образом, предельная функция $v(x,t)$ непрерывно дифференцируема по переменной x. Непрерывная дифференцируемость первой $v^1(x,t)$ и третьей $v^3(x,t)$ компонент предельной вектор-функции $v(x,t)$ следует из первого и третьего уравнений системы (11). Для того чтобы доказать непрерывную дифференцируемость второй блочной компоненты $v^2(x,t)$ предельной вектор-функции $v(x,t)$ по переменной t, нужно продифференцировать второе уравнение из (13) по переменной t, исключить из него производные $\partial_t v_k^1(x,t)$ и $\partial_t v_k^3(x,t)$, используя первое и третье уравнения из (11), и аналогично проделанным выше рассуждениям доказать равномерную сходимость последовательности $\partial_t v_k^3(x,t)$. Итак, доказали существование классического решения задачи (6), (7), а следовательно, и задачи (2), (3) при выполнении условий настоящей теоремы. Докажем, что это решение является единственным. Это можно сделать несколькими способами, например, построением энергетического равенства (интеграла энергии) [18], [19] или применением метода последовательных приближений [14]. Поступим именно так. Предположим, что при сделанных в условиях теоремы предположениях существуют два различных решения задачи (2), (3), начально-краевые условия которых совпадают. Обозначим эти решения $v(x,t)$ и $v^*(x,t)$. Тогда каждая из функций $v(x,t)$ и $v^*(x,t)$ удовлетворяет системе (6), а следовательно, и системе (20). Обозначим $w(x,t)=v(x,t)-v^*(x,t)$. Из (20) следует, что $w(x,t)$ удовлетворяет следующим интегральным соотношениям:

$$\begin{gathered}w_i(x,t)=-\int_{t_0}^{t}\mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau)w(x_i(x,t,\tau),\tau)d\tau,\\ w^2(x,t)=-\int_{x_0}^{x}\mathcal{C}_2(s,t)w(s,t)ds,\quad w^3(x,t)=-\int_{t_0}^{t}\mathcal{C}_3(x,\tau)w(x,\tau)d\tau.\end{gathered}\tag{23}$$

Применим к системе (23) метод последовательных приближений

$$\begin{gathered}w_{i,k+1}(x,t)=-\int_{t_0}^{t}\mathcal{C}_{1,i}(x_i(x,t,\tau),\tau)w_k(x_i(x,t,\tau),\tau)d\tau,\\ w_{k+1}^2(x,t)=-\int_{x_0}^{x}\mathcal{C}_2(s,t)w_k(s,t)ds,\quad w_{k+1}^3(x,t)=-\int_{t_0}^{t}\mathcal{C}_3(x,\tau)w_k(x,\tau)d\tau,\end{gathered}\tag{24}$$

где за начальное приближение возьмем некоторую функцию $w_0(x,t)=\tilde{\Phi}(x,t)$, для которой $\tilde{\Phi}(x_0,t)=0$ и $\tilde{\Phi}(x,t_0)=0$. Предположим, что $\|w_k(x,t)\|_{C(U)}=\theta$, где $\theta>0$. Тогда из (24) аналогичными рассуждениями получаем

$$\theta\le\theta\cdot\max_{\forall s=1,\ldots,k}\frac{\xi^k\tilde{X}^s\tilde{T}^{k-s}}{s!(k-s)!}.\tag{25}$$

Так как в правой части (25) находятся общие члены сходящихся рядов при каждом значении s, то при достаточно большом k из (25) получаем $\theta\le 0$. Таким образом, получили противоречие. Значит, $\theta=0$ и $v^*(x,t)\equiv v(x,t)$. Следовательно, решение задачи (6), (7) в условиях настоящей теоремы является единственным. Отсюда имеем единственность решения задачи (2), (3). □

3. Случай II. Индекс $(k, 0)$, где $k \geq 2$

Рассмотрим ситуацию, когда система имеет индекс $(k, 0)$. При этом будем предполагать, что $k \geq 2$.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *для матричного пучка* $\mathtt{P}(\lambda, x, t)$ *выполнены все условия теоремы 1;*
2) *все корни характеристического многочлена* $\det(A(x,t) + \lambda B(x,t))$ *неположительные;*
3) *матрица* $P(x,t)C(x,t)Q(x,t)+P(x,t)A(x,t)\partial_t Q(x,t)+P(x,t)B(x,t)\partial_x Q(x,t)$ *имеет верхнюю правую треугольную форму;*
4) *элементы матрицы* $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$ *и вектор-функций* $f(x,t)$, $\psi(t)$ *и* $\phi(x)$ *принадлежат пространству* $C^m(U)$, *где* $m = \max\{k_1, k_2 + \tilde{s}\}$*;*
5) *начально-краевые условия* (3) *являются согласованными в точке* (x_0, t_0) *вместе со своими производными.*
Тогда задача (2) $-$ (3) *имеет единственное классическое решение в области* U.

Доказательство. Так как выполнены все условия теоремы 1, то найдутся невырожденные в области U матрицы $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ с элементами из $C(U)$, которые приведут пучок $\mathtt{P}(\lambda, x, t)$ к каноническому виду (4). Умножим систему (2) слева на матрицу $P(x,t)$ и выполним замену переменной $u = Q(x,t)v$, где $v = v(x,t)$ – некоторая неизвестная n-мерная вектор-функция. Получим систему

$$\mathcal{A}(x,t)\partial_t v + \mathcal{B}(x,t)\partial_x v + \mathcal{C}(x,t)v = g(x,t), \tag{26}$$

где $\mathcal{A}(x,t) = \operatorname{diag}\{E_d, M(x,t), E_p\}$ и $\mathcal{B}(x,t) = \operatorname{diag}\{J(x,t), E_l, N(x,t)\}$ с блоками из (5); матрицы $J(x,t)$ и $\mathcal{C}(x,t)$ верхнего (правого) треугольного вида, $\mathcal{C}(x,t) = P(x,t)C(x,t)Q(x,t) + P(x,t)A(x,t)\partial_t Q(x,t) + P(x,t)B(x,t)\partial_x Q(x,t)$ и $g(x,t) = P(x,t)f(x,t)$.

Начально-краевые условия для системы (26) имеют вид (7). Разобьем векторы v и $g(x,t)$ на три блока: $v = (v^1, v^2, v^3)^\top$ и $g(x,t) = (g^1(x,t), g^2(x,t), g^3(x,t))^\top$ размеров d, l и p соответственно. Разобьем матрицу $\mathcal{C}(x,t)$ вертикальными линиями на блоки, содержащие d, l и p столбцов соответственно, и горизонтальными линиями на блоки, содержащие по d, l и p строк соответственно. Получим $\mathcal{C}(x,t) = (\mathcal{C}_{l_1,l_2})$, где $l_1, l_2 = 1, 2, 3$. В силу условия 3) теоремы блоки $\mathcal{C}_{l_1,l_2} = \mathcal{O}$ при $l_1 > l_2$, где $\mathcal{O}$ – нулевая матрица подходящего размера. Диагональные блоки $\mathcal{C}_{l_1,l_1}$ имеют верхнюю (правую) треугольную форму. Расщепим матрицу $J(x,t)$ на две матрицы: $J(x,t) = \mathcal{J}(x,t)+R(x,t)$, где $\mathcal{J}(x,t) = \operatorname{diag}\{k_1(x,t)E_{p_1}, k_2(x,t)E_{p_2}, \ldots, k_{\tilde{s}}(x,t)E_{p_{\tilde{s}}}\}$, $R(x,t)$ – верхняя (правая) треугольная матрица с нулевой диагональю. Запишем систему (26) в расщепленном виде

$$\begin{gathered}\partial_t v^1 + \mathcal{J}(x,t)\partial_x v^1 + \mathcal{C}_1(x,t)v = g^1(x,t) - R(x,t)\partial_x v^1,\\ \partial_x v^2 + \mathcal{C}_2(x,t)v = g^2(x,t) - M(x,t)\partial_t v^2, \quad \partial_t v^3 + \mathcal{C}_3(x,t)v = g^3(x,t) - N(x,t)\partial_x v^3,\end{gathered} \tag{27}$$

где $\mathcal{C}_{l_1} = (\mathcal{C}_{l_1,1}, \mathcal{C}_{l_1,2}, \mathcal{C}_{l_1,3})$. Применяя к первому уравнению системы (27) метод характеристик, перейдем к системе вида

$$\begin{gathered}\frac{dv_i}{d\tau} + \mathcal{C}^i(x,t)v = g_i(x,t) - R_i(x,t)\partial_x v^1, \quad i = 1, \ldots, s,\\ \partial_x v^2 + \mathcal{C}_2(x,t)v = g^2(x,t) - M(x,t)\partial_t v^2, \quad \partial_t v^3 + \mathcal{C}_{3,3}(x,t)v^3 = g^3(x,t) - N(x,t)\partial_x v^3,\end{gathered} \tag{28}$$

где v_i – блочные компоненты вектора $v^1 = (v_1, v_2, \ldots, v_{\tilde{s}})^\top$; $\mathcal{C}_1(x,t) = \operatorname{colon}(\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \ldots, \mathcal{C}^{\tilde{s}})$ и $R(x,t) = \operatorname{colon}(R_1(x,t), R_2(x,t), \ldots, R_{\tilde{s}}(x,t))$ — матрицы, которые состоят из блоков $\mathcal{C}^i$ и

$R_i(x,t)$ размеров $(p_i \times n)$. В (28) $dv_i/d\tau$ — производная блочной компонеты v_i по характеристическому направлению l_i, определенному в (9) и (10). В этом случае объединили одинаковые направления в группы. Всего таких групп $\tilde{s}$.

Итак, доказательство существования решения задачи (2)–(3) в этом случае сводится к обоснованию существования решения задачи (28), (7). Покажем, что система (28) с условиями (7) имеет решение. Из третьего уравнения системы (28) находим блочную компоненту v^3 в следующей форме:

$$v^3 = \Omega_{t_0}^t(-C_{3,3})v^3(x,t_0) + \int_{t_0}^t K_3(x,t,\tau)(g^3(x,\tau) - N(x,\tau)\partial_x v^3)d\tau,$$

где $\Omega_{t_0}^t(-C_{3,3})$ – матрицант [20], абсолютно сходящийся ряд вида

$$\Omega_{t_0}^t(D(x,t)) = E + \int_{t_0}^t D(x,t)dt + \int_{t_0}^t D(x,t)dt \int_{t_0}^t D(x,t_1)dt_1 + \dots$$

и $K_3(t,\tau) = \Omega_{t_0}^t(-C_{3,3})\left[\Omega_{t_0}^\tau(-C_{3,3})\right]^{-1}$ – матрица Коши.

Обозначим $\omega^3(x,t,t_0) = \Omega_{t_0}^t(-C_{3,3})v^3(x,t_0)$, $q^3(x,t,\tau) = K_3(x,t,\tau)g^3(x,\tau)$ и $\mathcal{H}_3(x,t,\tau) = K_3(x,t,\tau)N(x,\tau)$, тогда вектор v^3, следуя теореме 1 из [9], запишем в виде

$$v^3 = \sum_{l=0}^{k_2-1} \mathcal{P}^l\left[\omega^3(x,t) + \mathcal{P}_1[q^3(x,t)]\right], \tag{29}$$

где $\mathcal{P}[\omega^3(x,t)]$ и $\mathcal{P}_1[q^3(x,t)]$ – линейные операторы, определенные на $C^2(U)$,

$$\mathcal{P}[\omega^3(x,t)] = -\int_{t_0}^t \mathcal{H}_3(x,t,\tau)\partial_x\omega^3(x,\tau)d\tau, \quad \mathcal{P}_1[q^3(x,t)] = \int_{t_0}^t q(x,\tau)d\tau.$$

Из (29) и условия 4) настоящей теоремы следует, что вектор-функция v^3 является непрерывно дифференцируемой в области U. Второе уравнение из (28) будет иметь вид

$$\partial_x v^2 + \mathcal{C}_{2,2}(x,t)v^2 = g^2(x,t) - \mathcal{C}_{2,3}(x,t)v^3 - M(x,t)\partial_t v^2, \tag{30}$$

где v^3 определена соотношением (29). Снова находим решение уравнения (30), используя матрицант

$$v^2 = \Omega_{x_0}^x(-C_{2,2})v^2(x_0,t) + \int_{x_0}^x K_2(x,t,s)(g^2(s,t) - \mathcal{C}_{2,3}(s,t)v^3 - M(s,t)\partial_t v^2)ds,$$

где $K_2(x,t,s) = \Omega_{x_0}^x(-\mathcal{C}_{2,2})\left[\Omega_{x_0}^s(-\mathcal{C}_{2,2})\right]^{-1}$.

Обозначим $\omega^2(x,t,x_0) = \Omega_{x_0}^x(-\mathcal{C}_{2,2})v^2(x_0,t)$, $q^2(x,t,s) = K_2(x,t,s)(g^2(x,t) - \mathcal{C}_{2,3}(x,t)v^3)$ и $\mathcal{H}_2(x,t,s) = K_2(x,t,s)M(s,t)$, тогда вектор v^2 по теореме 1 из [9] будет иметь вид

$$v^2 = \sum_{l=0}^{k_1-1} \bar{\mathcal{P}}^l\left[\omega^2(x,t) + \bar{\mathcal{P}}_1[q^2(x,t)]\right], \tag{31}$$

где

$$\bar{\mathcal{P}}[\omega^2(x,t)] = -\int_{x_0}^x \mathcal{H}_2(x,t,s)\partial_t\omega^2(s,t)ds, \quad \bar{\mathcal{P}}_1[q^2(x,t)] = \int_{x_0}^x q(s,t)ds.$$

Из (31) и условия 4) настоящей теоремы следует, что блочная компонента v^2 также является непрерывно дифференцируемой функцией в области U.

Подставляя найденные компоненты v^3 и v^2 искомого вектора v в первые $\tilde{s}$ уравнений системы (28), аналогично проделанным выше рассуждениям, последовательно, начиная с последнего уравнения $\tilde{s}$, находим все компоненты $v_{\tilde{s}}$, $v_{\tilde{s}-1}, \dots, v_1$ векторного блока v^1.

Вектор v^1 в силу условия 4) настоящей теоремы также является непрерывно дифференцируемой функцией в области U. Итак, доказали существование классического решения задачи (28), (7). Возвращаясь к переменной $u(x,t)$, выполняя преобразование $u(x,t) = Q(x,t)v(x,t)$, доказываем существование классического решения задачи (2), (3).

Покажем, что решения $u(x,t)$ и соответственно $v(x,t)$ являются единственными. Для этого предположим, что существует два различных решения: $u^*(x,t)$ и $u^{**}(x,t)$ задачи (28), (7). Тогда их разность $w(x,t) = u^*(x,t) - u^{**}(x,t)$ удовлетворяет соответствующей (26) однородной системе с нулевыми начально-краевыми условиями. Находя решение однородной системы аналогичным образом, убеждаемся, что вектор $w(x,t) \equiv 0$. Таким образом, оба решения совпадают. $\square$

Заметим, что теорему 3 можно доказать, применяя к системе (28) метод последовательных приближений. В этом случае ряд (14) в силу структуры матрицы $\mathcal{C}$ будет конечной суммой.

4. Заключение

Из доказательства теоремы 3 хорошо видно, что в структуру решения дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, один из параметров индекса которых превышает единицу, входят производные от правых частей и начально-краевых условий. Максимальный порядок этих производных на единицу меньше наибольшего параметра индекса уравнения. Присутствие производных в структуре решения усложняет исследование задачи. Поэтому в теореме 3 пришлось ввести ограничение на матрицу $\mathcal{C}$. В случае, если матрица $\mathcal{C}$ имеет произвольный вид, то доказательство теоремы 3 выполнить, применяя метод последовательных приближений совместно с методом характеристик, а тем более непосредственным способом, не представляется возможным. В этом случае необходимы более трудоемкие методы, которые возможно дадут более эффективный результат. Аналогичная ситуация возникает при исследовании классических уравнений в частных производных, коэффициенты которых образуют пучок с элементарными делителями со степенью выше единицы.

Литература

[1] Соболев С.Л. *Об одной новой задаче математической физики*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **18** (1), 3–50 (1954).

[2] Демиденко Г.А., Успенский С.В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной* (Научн. книга, Новосибирск, 1998).

[3] Рущинский В.М. *Пространственные линейные и нелинейные модели котлогенераторов*, Вопр. идентификации и моделирования, 8–15 (1968).

[4] Soto M. Selva, Tischendorf C. *Numerical analysis of DAEs from coupled circuit and semiconductor simulation*, Appl. Numer. Math. **53**, 471–488 (2005).

[5] Lucht W. *Partial differential-algebraic systems of second order with symmetric convection*, Appl. Numer. Math. **53**, 357–371 (2005).

[6] Гайдомак С.В., Чистяков В.Ф. *О системах не типа Коши–Ковалевской индекса* $(1,k)$, Вычисл. технологии **10** (2), 45–59 (2005).

[7] Lucht W., Strehmel K., Eichler-Liebenow C. *Indexes and special discretization methods for linear partial differential algebraic equations*, BIT **39** (3), 484–512 (1999).

[8] Campbell S.L., Marszalek W. *The index of an infinite dimensional impliscit system*, Math. and Comp. Model. of Syst. **5** (1), 18–42 (1999).

[9] Гайдомак С.В. *Об одной краевой задаче для линейной параболической системы первого порядка*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **54** (4), 608–618 (2014).

[10] Гайдомак С.В. *Об одном алгоритме численного решения линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **55** (9), 1530–1544 (2015).

[11] Гайдомак С.В. *Об устойчивости неявной сплайн-коллокационной разностной схемы для линейных дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **53** (9), 44–63 (2013).

[12] Бормотова О.В., Гайдомак С.В., Чистяков В.Ф. *О разрешимости вырожденных систем дифференциальных уравнений в частных производных*, Изв. вузов. Матем. **4**, 18–29 (2005).

[13] Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики. Т.*2 (ГТТИ, М.-Л., 1933).

[14] Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными* (ГИФМЛ, Л., 1961).

[15] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике* (Наука, М., 1978).

[16] Гайдомак С.В. *О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций*, Изв. вузов. Матем. **2**, 23–33 (2012).

[17] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1971).

[18] Годунов С.К. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1979).

[19] Гайдомак С.В. *Метод сплайн-коллокации для линейных вырожденных гиперболических систем*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **48** (7), 1230–1249 (2008).

[20] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (Физматлит, М., 2004).

Светлана Валерьевна Свинина

Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: svinina@icc.ru

Андрей Кириллович Свинин

Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: svinin@icc.ru

S.V. Svinina and A.K. Svinin

On the existence of a solution to some mixed problems for linear differential-algebraic partial differential equations

Abstract. In the paper we consider a linear differential-algebraic system of partial differential equations with special matrix coefficients. Two cases are investigated. The first case is when the system has a small index and a matrix at unknown vector-function in the canonical form is arbitrary. The second case is when the system has an arbitrary index, while a matrix at the small term in the canonical form has a triangular form. In both cases, using the method of characteristics and the method of successive approximations, we prove the existence of a unique classical solution of mixed problems for the considered differential-algebraic systems of partial differential equations.

Keywords: differential-algebraic system, index of system, matrix pencil, method of characteristics.

Svetlana Valeryevna Svinina,

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,

e-mail: svinina@icc.ru

Andrey Kirillovich Svinin,

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,
e-mail: svinin@icc.ru