

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное учреждение
высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной деятельности КФУ
Проф. Д.К. Нургалiev



" 10 " 2015 г.

Программа дисциплины

Б1.В.ДВ.2 Современные численные методы линейной алгебры

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика

Профиль подготовки: 01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»

Форма обучения: очная

Язык обучения: русский

Казань 2015

1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

В рамках этого курса предполагается рассмотреть такие разделы, как численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений прямыми и итерационными методами, решения частичной и полной проблемы на собственные значения.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОПОП

Курс «Современные численные методы линейной алгебры» входит в разряд дисциплин по выбору.

Осваивается на 2 курсе в 4 семестре.

Для успешного освоения данной дисциплины нужно освоение в качестве предшествующих следующих дисциплин: общие курсы математического и функционального анализа, алгебры и геометрии.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Знать:

- основные понятия, приемы и методы численных методов линейной алгебры

Уметь:

- решать на компьютеры большие системы линейных алгебраических уравнений, используя для этого современные численные методы решений

Владеть:

- математическим аппаратом решения задач линейной алгебры с использованием современных пакетов прикладных программ.

Демонстрировать способность и готовность:

- применять полученные знания в своей профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины формируются компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
ПК- 3	способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований

4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов (лекции 18 ч., практика 18 ч., самостоятельная работа 72 ч.).

Итоговая форма контроля: зачет.

№	Раздел Дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)		
				лекции	практика	самост. работа
1	Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Выбор ведущего элемента.	4	1-2	2	2	8
2	LU-разложение матрицы. Разложение Холецкого для симметричных матриц. Схемы треугольной факторизации с выбором ведущего элемента.	4	3-4	2	2	8
3	QR-разложение матрицы. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства.	4	5-7	2	2	8
4	Прямые методы решения СЛАУ для разреженных, профильных, ленточных матриц. Ускорение солверов и оптимизация оперативной памяти с учетом разреженной структуры матрицы.	4	8	2	2	8
5	Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя, релаксации и их сходимость.	4	9	2	2	8
6	Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Методы минимальных невязок и поправок. Метод наискорейшего спуска. Предобусловленный метод сопряженных градиентов.	4	10	2	2	8
7	Частичная проблема собственных значений. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение следующих по порядку собственных	4	11-12	2	2	8

	чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом.					
8	Полная проблема собственных значений. Метод Якоби. Сходимость.	4	13-14	2	2	8
9	Решение систем нелинейных уравнений. Двухслойные итерационные методы. Метод Ньютона и его модификации. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих.	4	15	2	2	8

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1. Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Выбор ведущего элемента.

Решение тестовых СЛАУ из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и/или с MatLab решением ($x=A\backslash b$, $x=A\backslash b$). Итерационное уточнение решения, программная реализация.

Тема 2. LU-разложение матрицы. Разложение Холецкого для симметричных матриц. Схемы треугольной факторизации с выбором ведущего элемента.

Программирование в MatLab факторизации матрицы с выбором ведущего элемента по столбцу. Решение тестовых систем из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ($x=L\backslash b$, $x=U\backslash b$).

Тема 3. QR-разложение матрицы. Метод ортогонализации Грама-Шмидта. Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства.

Программирование в Матлаб QR-разложения. Тестирование метода. Сравнение прямых методов решения СЛАУ для полных и разреженных матриц.

Тема 4. Прямые методы решения СЛАУ для разреженных, профильных, ленточных матриц. Ускорение солверов и оптимизация оперативной памяти с учетом разреженной структуры матрицы.

Использование в Матлаб формата sparse для разреженных матриц. Реализация прямых методов с учетом разреженной структуры матриц. Тестирование методов решения разреженных СЛАУ.

Тема 5. Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя, релаксации и их сходимость.

Программная реализация базовых итерационных методов. Тестирование программ. Подбор итерационных параметров, влияние итерационных параметров на сходимость итераций.

Тема 6. Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Методы минимальных невязок и поправок. Метод наискорейшего спуска. Предобусловленный метод сопряженных градиентов.

Понятие предобсловливателя. Реализация методов минимальных поправок и наискорейшего спуска с предобсловливателем. Реализация предословленного метода сопряженных градиентов.

Тема 7. Частичная проблема собственных значений. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение следующих по порядку собственных чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом.

Реализация методов прямых и обратных итераций решения частичной проблемы собственных значений.

Тема 8. Полная проблема собственных значений. Метод Якоби. Сходимость.

Программная реализация метода Якоби. Решение тестовых задач. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц).

Тема 9. Решение систем нелинейных уравнений. Двухслойные итерационные методы. Метод Ньютона и его модификации. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих.

Сведение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач. Реализация метода простой итерации. Реализация метода Ньютона. Реализации различных модификаций метода Ньютона.

5. Образовательные технологии

Обучение происходит в форме лекционных и практических занятий, а также самостоятельной работы студентов.

Теоретический материал излагается на лекциях. Причем конспект лекций, который остается у студента в результате прослушивания лекции не может заменить учебник. Его цель - формулировка основных утверждений и определений. Прослушав лекцию, полезно ознакомиться с более подробным изложением материала в учебнике. Список литературы разделен на две категории: необходимый для сдачи экзамена минимум и дополнительная литература.

Изучение курса подразумевает не только овладение теоретическим материалом, но и получение практических навыков для более глубокого понимания разделов дисциплины "Современные численные методы линейной алгебры" на основе решения задач и упражнений, иллюстрирующих доказываемые теоретические положения, а также развитие абстрактного мышления и способности самостоятельно доказывать частные утверждения.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних работ. Практические задания, выполненные в аудитории, предназначены для указания общих методов решения задач определенного типа. Закрепить навыки можно лишь в результате самостоятельной работы. Кроме того, самостоятельная работа включает подготовку к экзамену. При подготовке к сдаче экзамена весь объем работы рекомендуется распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки к экзамену, контролировать каждый день выполнения работы. Лучше, если можно перевыполнить план. Тогда всегда будет резерв времени.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА АСПИРАНТОВ (СРА) включает следующие виды работ:

Тема 1. Метод исключения Гаусса. Трудоемкость. Условия осуществимости. Выбор ведущего элемента.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул метода исключения Гаусса. Подсчет трудоемкости метода. Написание программы метода.

Тема 2. LU-разложение матрицы. Разложение Холецкого для симметричных матриц. Схемы треугольной факторизации с выбором ведущего элемента.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул треугольных разложений. Написание программ факторизации матрицы с выбором ведущего элемента по столбцу. Решение тестовых систем из библиотеки gallery разной размерности, измерение погрешности и времени решения, сравнение алгоритмов между собой и с MatLab решением ($x=L\backslash b$, $x=U\backslash b$).

Тема 3. QR-разложение матрицы. Метод ортогонализации Грама-Шмидта.

Модифицированный алгоритм Грама-Шмидта. Матрицы отражения и их свойства.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул QR-разложения. Написание программы в Матлаб QR-разложения.

Тестирование метода. Сравнение прямых методов решения СЛАУ для полных и разреженных матриц.

Тема 4. Прямые методы решения СЛАУ для разреженных, профильных, ленточных матриц. Ускорение солверов и оптимизация оперативной памяти с учетом разреженной структуры матрицы.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Формат sparse для разреженных матриц. Написание программ в Матлаб прямых методов с учетом разреженной структуры матриц. Тестирование методов решения разреженных СЛАУ.

Тема 5. Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя, релаксации и их сходимость.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Написание программ базовых итерационных методов. Тестирование программ. Подбор итерационных параметров, влияние итерационных параметров на сходимость итераций.

Тема 6. Методы вариационного типа. Сведение СЛАУ к задаче минимизации. Градиентные методы. Методы минимальных невязок и поправок. Метод наискорейшего спуска. Предобусловленный метод сопряженных градиентов.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Изучение методов, основанных на минимизации функционала невязки. Понятие предобусловливателя. Написание программ методов минимальных поправок и наискорейшего спуска с предобусловливателем. Написание программы предобусловленного метода сопряженных градиентов.

Тема 7. Частичная проблема собственных значений. Степенной метод определения максимального по модулю собственного числа. Сходимость. Определение

следующих по порядку собственных чисел. Обратные итерации с постоянным сдвигом.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Написание программ методов прямых и обратных итераций решения частичной проблемы собственных значений.

Тема 8. Полная проблема собственных значений. Метод Якоби. Сходимость.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Вывод формул метода Якоби. Программная реализация метода Якоби. Решение тестовых задач. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц).

Тема 9. Решение систем нелинейных уравнений. Двухслойные итерационные методы. Метод Ньютона и его модификации. Приближенное вычисление матрицы производных: аналог метода секущих.

Домашнее задание, примерные вопросы:

Изучение литературы по итерационным методам решения нелинейных уравнений.

Сведение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач. Реализация метода простой итерации. Реализация метода Ньютона. Реализации различных модификаций метода Ньютона.

7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

7.1. Регламент дисциплины

Форма контроля: зачет

Промежуточная форма контроля – оценка успешности выполнения самостоятельных заданий

7.2. Оценочные средства текущего контроля

Примеры вопросов для самостоятельной работы

1. Вывести формулы метода исключения Гаусса.
2. Подсчитать трудоемкость метода исключения Гаусса.
3. Вывести формулы треугольных разложений.
4. Написать программу факторизации матрицы с выбором ведущего элемента по столбцу.
5. Вывести формулу QR-разложения.
6. Написать программу в Матлаб QR-разложения.
7. Вывести формулы метода Якоби.
8. Привести пример программной реализации метода Якоби.
9. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц).
10. Сведение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач.
11. Реализация метода простой итерации.
12. Реализация метода Ньютона.
13. Реализации различных модификаций метода Ньютона.

7.3. Вопросы к зачету

1. Вывести формулы метода исключения Гаусса.
2. Подсчитать трудоемкость метода исключения Гаусса.
3. Вывести формулы треугольных разложений.

4. Написать программу факторизации матрицы с выбором ведущего элемента по столбцу.
5. Вывести формулу QR-разложения.
6. Написать программу в Матлаб QR-разложения.
7. Вывести формулы метода Якоби.
8. Привести пример программной реализации метода Якоби.
9. Понятие о QR-методе (для симметричных матриц).
10. Сведение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач.
11. Реализация метода простой итерации.
12. Реализация метода Ньютона.
13. Реализации различных модификаций метода Ньютона.

7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции для данной дисциплины	Оценочное средство
ПК-3	способность к преподаванию дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований	С учетом полученных знаний, аспирант способен наметить пути организации и проведения преподавательской деятельности в области информатики и вычислительной техники, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований	Проведение занятий аспирантом под руководством научного руководителя

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В процессе обучения аспирантов по дисциплине основными формами обучения являются: аудиторные занятия, включающие лекции, и самостоятельная работа. Тематика лекций соответствует содержанию программы дисциплины

Обязательным условием освоения дисциплины является самостоятельная работа аспиранта, выполнение которой аспирант демонстрирует при выполнении самостоятельных работ. Подобная форма обучения развивает навыки поиска научной литературы, ее анализа, составления резюме прочитанного текста, приемов аргументации защищаемых гипотез, т.е. ведения научно-исследовательской работы и ее защиты в рамках профессиональных дискуссий. Аналогичные цели должны преследоваться и при ориентации аспирантов на самостоятельный поиск новых материалов по текущим разделам и чтение дополнительной литературы.

Методические рекомендации по самостоятельной работе аспирантов

Самостоятельная работа является обязательной составляющей деятельности аспиранта по изучению дисциплины. Самостоятельная работа направлена на более глубокое изучение отдельных тем дисциплины, систематизацию полученных знаний. Задания для самостоятельной работы включают виды работ, перечисленные выше. В программе дисциплины также указана трудоемкость самостоятельной работы по каждой из тем. Это – время, необходимое для выполнения всех заданий по теме аспирантом с хорошей успеваемостью и средним темпом работы. Время, затрачиваемое каждым конкретным аспирантом, может существенно отличаться от указанного. В связи с этим, планирование рабочего времени каждым аспирантом должно осуществляться самостоятельно. Однако можно выделить некоторые общие рекомендации. Начинать самостоятельные занятия следует с начала семестра и проводить их регулярно. Не следует откладывать работу из-за «нерабочего настроения». Не следует пытаться выполнить всю самостоятельную работу за один день, накануне представления ее результатов. В большинстве случаев это просто физически невозможно. Гораздо более эффективным является распределение работы на несколько дней: это способствует более качественному выполнению заданий и лучшему усвоению материала. Важно полнее учесть обстоятельства своей работы, уяснить, что является главным на данном этапе, какую последовательность работы выбрать, чтобы выполнить ее лучше и с наименьшими затратами времени и энергии. Для плодотворной работы немаловажное значение имеет обстановка, организация рабочего места. Место работы, по возможности, должно быть постоянным. Работа на привычном месте более плодотворна. Продуктивность работы зависит от правильного чередования труда и отдыха. Помните, что максимальная длительность устойчивости внимания – 45 минут. При появлении рассеянности есть необходимость прервать работу на 3 – 5 минут, но не следует покидать рабочее место. Каждые 1.5 – 2 часа необходимо делать перерыв на 10-15 минут. Желательно сопровождать перерыв интенсивной физической активностью.

9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

9.1. Основная литература

1. Численные методы. Курс лекций : Учебное пособие/ Срочко В.А. - СПб.: Издательство "Лань", 2010. - 208 с. ISBN 978-5-8114-1014-9 e.lanbook.com http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=378
2. Лекции по численным методам математической физики: Учебное пособие / М.В. Абакумов, А.В. Гулин; МГУ им. М.В. Ломоносова - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 158 с.: 60x88 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (обложка) ISBN 978-5-16-006108-5, 500 экз. www.znaniy.com <http://znaniy.com/go.php?id=364601>
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.:Бином. Лаборатория знаний, 2012. - 636 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4397
4. Глазырина Л. Л. Введение в численные методы: 3. учебное пособие / Л. Л. Глазырина, М. М. Карчевский; Казан. федер. ун-т. Казань: Казанский университет, 2012. 121 с.
5. Шевцов Г.С., Крюкова О.Г., Мызникова Б.И. Численные методы линейной алгебры. - СПб.: Лань, 2011. - 496 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/1800/>

9.2. Дополнительная литература

1. Формалеев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 400 с. ЭБС "Лань": <http://e.lanbook.com/view/book/48183/>

3. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. - М.:Бином. Лаборатория знаний, 2010. - 240 с. URL: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4399

9.3. Интернет-ресурсы:

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.math.ru/>

Портал математических интернет-ресурсов - <http://www.allmath.com/>

Портал ресурсов по естественно-научным дисциплинам - <http://en.edu.ru/>

Сайт образовательных ресурсов по математике - <http://www.exponenta.ru/>

Справочник по компьютерной математике - <http://www.users.kaluga.ru/math/>

10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Компьютерный класс, представляющий собой рабочее место преподавателя и не менее 15 рабочих мест студентов, включающих компьютерный стол, стул, персональный компьютер, лицензионное программное обеспечение. Каждый компьютер имеет широкополосный доступ в сеть Интернет. Все компьютеры подключены к корпоративной компьютерной сети КФУ и находятся в едином домене.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры (Приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 № 866)

Автор(ы): Тимербаев М.Р.

Рецензенты:

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института ВМиИТ КФУ от 9 сентября 2015 года, протокол № 1.