ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Дифференциальные уравнения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

"Задача Римана в случае мероморфного коэффицента"

Работа завершена:

«___»_____________2015 г. ______________ Куряева А. Г.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

«___»_____________2015 г. ______________ Салехова И. Г.

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«___»_____________2015 г. ______________ Елизаров А. М.

Казань — 2015

Содержание

Введение

1. Некоторые сведения из теории целых и мероморфных функций.

Определение 1.1. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой функции* f, если существует такая проколотая окрестность этой точки (т. е. множество $\{0 < |z-a| < r\}$, если a конечна, или множество $\{R < |z| < \infty\}$, если $a = \infty$), в которой функция f голоморфна.

Определение 1.2. Изолированная особая точка a функции f называется

(1)*устранимой точкой*, если существует конечный

$$\lim_{z \to a} f(z) = A;$$

(2)*полюсом*, если существует

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

(3)*существенно особой точкой*, если fне имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Определение 1.3. *Целой* называется функция, голоморфная во всей плоскости $\mathbb{C}$, т. е. не имеющая конечных особых точек.

Определение 1.4. Функция, не имеющая в открытой плоскости $\mathbb{C}$ других особенностей, кроме полюсов, называется *мероморфной.*

Теорема 1.1. *Если мероморфная функция f в ∞ имеет устранимую точку или полюс (т. е. если она в $\overline{\mathbb{C}}$ не имеет других особенностей, кроме полюсов), то она является рациональной функцией.*

Через a_n $(n = 1,\ 2,\ \dots)$ мы будем обозначать полюсы мероморфной функции f, а через

$$g_n(z) = \sum_{v=1}^{p_n} \frac{c_{-v}^{(n)}}{(z-a_n)^v} \tag{1}$$

главную часть ее лорановского разложения a_n.

Если мероморфная функция f имеет лишь конечное число полюсов, то вычитая из f сумму ее главных частей в этих полюсах, мы получим, очевидно, целую функцию h. В этом случае поставленная задача решается тривиально: функция f разлагается в сумму целой функции h и своих главных частей. Представляет интерес лишь случай бесконечного числа полюсов. Здесь вместо конечной суммы мы имеем ряд из главных частей, и возникает вопрос о его сходимости. Этот ряд, вообще говоря, расходится, и для получения сходящегося ряда к главным частям приходится вводить поправки, которые, как мы увидим, можно брать в виде многочленов отрезков — тейлоровских разложений главных частей.

Определение 1.5. Ряд из мероморфных функций называется *сходящимся* (соответственно *равномерно сходящимся*) на множестве M, если лишь конечное число его членов имеет полюсы на M и после удаления этих членов ряд сходится (соответственно равномерно сходится) на M.

Задачу о разложении решает следующая *теорема существования* мероморфной функции с заданными полюсами и главными частями:

Теорема (Миттаг—Леффлер). *Каковы бы ни были последовательность точек $a_n \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ и последовательность функций g_n вида (1), существует мероморфная функция f, которая имеет полюсы во всех точках a_n и только в этих точках, причем главная часть f в каждом полюсе a_n совпадает с g_n.*

Следствие. Любую мероморфную функцию f можно разложить в ряд

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n - P_n) \tag{2}$$

равномерно сходящийся на любом компакте, где h — целая функция, g_n — главные части f и P_n — некоторые полиномы.

Приведем примеры разложений некоторых мероморфных функций:

1) $\dfrac{1}{e^z-1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2+4n^2\pi^2}$

2) $\operatorname{tg} z = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z-\frac{(2n-1)\pi}{2}} + \dfrac{1}{z+\frac{(2n-1)\pi}{2}}\right) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{z^2-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}$

3) $\operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z-n\pi} + \dfrac{1}{z+n\pi}\right) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$

4) $\dfrac{1}{\operatorname{sh} z} = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^2+n^2\pi^2} = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{z-n\pi i} + \dfrac{1}{z+n\pi i}\right)$

5) $\operatorname{cth} z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z}{z^2+n^2\pi^2}$

6) $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{z-n\pi} + \dfrac{1}{z+n\pi}\right) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$

7) $\dfrac{1}{\sin^2 z} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(z-n\pi)^2}$

В дальнейшем нам постоянно придется пользоваться некоторыми теоремами теории функций комплексного переменного, формулировку которых мы здесь приведем.

Теорема (об аналитическом продолжении). *Пусть две области D_1 и D_2 граничат вдоль некоторой гладкой кривой L, в областях D_1 и D_2 заданы аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Предположим, что при стремленииточки z к кривой L обе функции стремятся к предельным значениям, непрерывным на кривой L, причем эти предельные значения равны между собой. При этих условиях функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ будут аналитическим продолжением друг друга.*

Теорема Лиувилля (обобщенная). *Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости комплексного переменного, за исключением точек $a_0 = \infty$, $a_k (k = 1, 2, \ldots, n))$, где она имеет полюсы, причем главные части разложений функции $f(z)$ в окрестности полюсов имеют вид:*

в точке a_0

$$G_0(z) = c_1^0 z + c_1^0 z^2 + \cdots + c_{m_0}^0 z^{m_0},$$

в точках a_k

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z-a_k} + \frac{c_2^k}{(z-a_k)^2} + \cdots + \frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}}.$$

Тогда функция $f(z)$ есть рациональная функция и может быть представлена формулой

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right).$$

В частности, если единственная особенность функции $f(z)$ есть полюс порядка m в бесконечно удаленной точке, то $f(z)$ есть многочлен степени m:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m.$$

Формула Коши. Если $f(z)$ — функция, аналитическая в D^+ и непрерывная в $D^+ + L$, то согласно известной теории функций комплексного переменного формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \tag{3}$$

Если же $f(z)$ аналитична в области D^- и непрерывна в $D^- + L$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \tag{4}$$

Формула Коши дает возможность вычислить значения функции в любой точке области; она решает краевую задачу для аналитических функций. Интеграл, стоящий в левой части формул (3) и (4), называется *интегралом Коши*.

Теорема Коши о вычетах. Пусть функция f голоморфна в области D всюду, за исключением изолированного множества особых точек, и область $G \Subset D$, а ее граница ∂G не содержит особых точек; тогда

$$\int\limits_{\partial G} f dz = 2\pi i \sum_{(G)} \underset{a_v}{res} f,$$

где сумма распространяется на все особые точки a_v функции f, принадлежащие G.

Определение 1.6. Ряд (5), коэффициенты которого вычисляются по формулам (6), называется рядом Лорана функции F в кольце V. Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями называется его правильной частью, а совокупность членов с отрицательными степенями — главной частью.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \tag{5}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{6}$$

где $r < \rho < R$.

Пример. Мероморфная функция $\frac{1}{\sin^2 z}$ имеет полюсы второго порядка в точках $a_n = n\pi (n = 0, \pm 1, \dots)$, причем ее главная часть на полюсе a_n равна $g_n = \frac{1}{(z-n\pi)^2}$. Ряд из главных частей

$$f_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

сходится равномерно на любом компакте (по определению), ибо в любом круге $\{|z| < R\}$ мажорируется сходящимся рядом $\sum \frac{1}{(n\pi - R)^2}$. Поэтому поправочные многочлены P_n в разложении (2) не нужны, и остается найти целую функцию

$$h(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}.$$

Эта функция периодическая с периодом π, поэтому ее достаточно изучить в полосе $\{0 < \operatorname{Re} z \leq \pi\}$. В этой полосе $|z - n|\pi \leq \pi(n-1)$ для $n = 0, 1, 2 \dots$, следовательно,

$$|f_0(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} + \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{|z-n\pi|^2} + 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2\pi^2}$$

стремится к 0 при $z \to \infty$ в этой полосе. Так как $|\sin^2 z| = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y$ при этом стремится к бесконечности, то и $h(z)$ стремится к нулю при $z \to \infty$, $0 < \operatorname{Re} z \leq \pi$. Поэтому h ограничена в полосе, а в силу периодичности и в $\mathbb{C}$; по теореме Лиувилля h постоянна и, следовательно, равна нулю. Таким образом, разложение Миттаг—Леффлера имеет вид

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n\pi)^2}$$

2. Некоторые сведения из теории линейно-мероморфных функций.

Определение 2.1. Особую линию L, в окрестности которой функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = G_{p+1}(L; z) + \Omega(z),$$

где

$$G_{p+1}(L; z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - z)^{p+1}},$$

назовем полярной линией порядка $p+1$. $G_{p+1}(L; z)$ главная часть разложения $F(z)$ вблизи полярной линии, а $\Omega(z)$ — голоморфная функция в окрестности L.

Определение 2.2. Функцию $f(z)$, имеющую в качестве особенности полярные линии, будем называть *линейно-мероморфной функцией.*

Особую линию L_k, в окрестности которой $\Phi(z)$ отличается от интеграла типа Коши лишь аналитической в окрестности и на линии L_k функцией при $p = 0$ будем называть *полярной особой линией первого порядка.* В окрестности такой линии $\Phi(z)$ имеет представление

$$\Phi(z) = \Omega(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Будем рассматривать такую линию как коллективную особую точку и используем введеное В. В. Голубевым понятие вычета $\Phi(z)$ относительно линии L_k:

$$\underset{L_k}{res} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \Phi(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau) d\tau,$$

где Γ — некоторая замкнутая линия L_k, окружающая и не содержащая внутри себя других особых точек. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть C есть замкнутая линия, на которой $\Phi(z)$ непрерывна и внутри которой находятся особые точки $a_1, a_2, \ldots a_m$ и особые полярные линии $L_1, \ldots L_P$ или части этих линий. Тогда

$$\int\limits_C \Phi(z) dz = 2\pi i \Big\{ \sum_{j=1}^{m} \underset{a_j}{res} \Phi(z) + \sum_{k=1}^{p} \underset{L_k}{res} \Phi(z) \Big\}.$$

Теорема 2.2. Если функция $\Phi(z)$ имеет в расширенной плоскости конечное число особых точек и особых полярных линий, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в беконечности, равна нулю.

Пусть имеется счетное множество $\{L_k\}$ полярных линий $L_1, L_2, \ldots$, не имеющих общих точек (в том числе и концов), таких, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до $\{L_k\}$, то $0 < R_1 \leq R_2 \leq \ldots$, $\lim_{k\to\infty} R_k = \infty$, при этом предполагаем, что в конечной части плоскости находится конечное число линий. При наличии бесконечного множества $\{L_k\}$ полярных линий первого порядка имеет место теорема, являющаяся аналогом теоремы Миттаг—Леффлера.

Теорема 2.3. Существует однозначная функция, голоморфная в любой конечной точке плоскости, не лежащей на линиях L_k, главная часть которой в окрестности линии L_k есть интеграл типа Коши

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z}.$$

Функция, существование которой утверждается по теореме 2.3, имеет вид:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty}[F_k(z) - h_k(z)], \tag{7}$$

где $h_k(z) = \sum_{k=1}^{n_k-1} c_{kj}z^j$ — отрезок ряда Тейлора разложения $F_k(z)$ внутри круга $|z| < qR_k(q < 1)$, подобранный таким образом, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно в любой конечной области, если отбросить в нем конечное число членов.

3. Краевая задача Римана.

3.1 Определение и основные свойства индекса. Пусть L — гладкий замкнутый контур и $G(t)$ — заданная на нем непрерывная функция, не обращающаяся в нуль.

Определение 3.1. *Индексом функции $G(t)$ по контуру L называется разделенное на 2π приращение ее аргумента при обходе кривой L в положительном направлении.*

Если приращение некоторой величины ω при обходе контура L символически обозначить $[\omega]_L$, то индекс $G(t)$ можно записать в виде

$$\varkappa = IndG(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L.$$

Индекс легко выразить через изменение логарифма функции; имеем:

$$\ln G(t) = \ln |G(t)| + i \arg G(t).$$

После обхода контура $\ln |G(t)|$ возвращается к своему начальному значению. Поэтому

$$[\arg G(t)]_L = \frac{1}{i}[\ln G(t)]_L.$$

Отсюда

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L.$$

Индекс можно представить в виде интеграла

$$\varkappa = IndG(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L d\arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d\ln G(t),$$

причем интеграл понимается в смысле Стильтьеса. В силу непрерывности $G(t)$ приращение аргумента $G(t)$ при обходе контура должно быть кратным 2π; следовательно:

1. Индекс функции, непрерывной на замкнутом контуре и нигде не обращающейся в нуль, есть целое число или нуль.

Из определения индекса непосредственно получаем:

2. Индекс произведения функций равен сумме индексов сомножителей. Индекс частного равен разности индексов делимого и делителя.

Пусть теперь $G(t)$ дифференцируема и представляет собой краевое значение аналитической внутри или вне контура L функции. Тогда

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G'(t)}{G(t)}dt$$

оказывается равным логарифмическому вычету функции $G(t)$. Из теорем о логарифмическом вычете вытекают следующие свойства индекса:

3. Если $G(t)$ есть краевое значение функции, аналитической внутри или вне контура, то индекс ее равен числу нулей внутри контура или, соответственно, числу нулей вне контура, взятому со знаком минус.

4.Если функция $G(z)$ аналитическая внутри контура, за исключением конечного числа точек, где он может иметь полюсы, то число нулей нужно заменить на разность числа нулей и числа полюсов.

Нули и полюсы считаются при этом столько раз, какова их кратность.

Заметим еще, что индексы комплексно сопряженных функций обратны по знаку.

3.2. Постановка задачи. Даны простой гладкий замкнутый контур L, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-, и две функции точек контура $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $G(t)$ не обращается в нуль. Требуется *найти две функции:* $\Phi^+(z)$ *— аналитическую в области* D^+, *и* $\Phi^-(z)$ *— аналитическую в области* D^-, *включая* $z = \infty$ *,удовлетворяющие на контуре* L *линейному соотношению*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{(однородная задача)} \tag{8}$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(неоднородная задача)} \tag{9}$$

Функцию $G(t)$ будем называть *коэффициентом задачи Римана*, а функцию $g(t)$ — ее свободным членом.

3.3. Отыскание кусочно аналитической функции по заданному скачку. Рассмотрим предварительно задачу Римана частного вида. Пусть на замкнутом контуре L дана функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условию Гельдера. Требуется найти кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$ ($\Phi(z) = \Phi^+(z)$ при $z \in D^+$, $\Phi(z) = \Phi^-(z)$ при $z \in D^-$), исчезающую на бесконечности и испытывающую при переходе через контур L скачок $\varphi(t)$, т. е. удовлетворяющую условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t). \qquad t \in L$$

Функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - z)}$$

дает решение этой задачи. Легко показать единственность полученного решения. В самом деле, допуская существование двух решений и рассматривая их разность, получим, что для этой разности скачок на линии L равен нулю; следовательно, это будет функция, аналитическая во всей плоскости и обращающаяся в нуль на бесконечности. Отсюда по теореме Лиувилля следует, что она тождественно равна нулю.

Решению рассмотренной задачи можно дать еще следующую формулировку:

Заданную на замкнутом контуре произвольную функцию $\varphi(t)$, *удовлетворяющую условию Гельдера, можно единственным образом представить в виде разности функций* $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$, *являющихся краевыми значениями* $\Phi^+(z)$ $\Phi^-(z)$ *аналитических функций при дополнительном условии* $\Phi^-(\infty) = 0$.

Если отбросить дополнительное условие $\Phi^-(\infty) = 0$, то решение задачи, как легко видеть, будет даваться формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - z)} + \text{const}.$$

3.4. Решение однородной задачи. Допустим, что однородная краевая задача (8) разрешима и пусть функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ - ее решение. Обозначим число нулей функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ в областях их определения D^+, D^-, соответственно через N^+, N^-. Взяв индекс обеих частей равенства (8) получим:

$$N^+ + N^- = \mathrm{Ind}G(t) = \varkappa. \tag{10}$$

Индекс κ коэффициента задачи Римана будем называть *индексом задачи.*

В левой части последнего равенства стоит, очевидно, неотрицательное число. Отсюда получаем:

1.Для разрешимости однородной краевой задачи Римана необходимо, чтобы индекс задачи был неотрицателен (Функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ по условию полюсов не имеют).

2.Если $\varkappa > 0$, то функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, являющиеся решением задачи, имеют в совокупности κ нулей.

3. Если $\varkappa = 0$, то функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ не имеют нулей.

1^0. Случай $\varkappa = 0$. В этом случае $\ln G(t)$ есть функция однозначная, а $\ln \Phi^+(z)$ и $\ln \Phi^-(z)$ — функции аналитические. Логарифмируя краевое условие (8), будем иметь:

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t).$$

Для $\ln G(t)$ можно брать любую ветвь. Окончательный результат ,как легко проверить, не зависит от выбора ветви.

Мы пришли к задаче отыскания кусочно аналитической функции $\ln \Phi(z)$ по заданному на L скачку. Решение ее при дополнительном условии $\ln \Phi^-(\infty) = 0$ дается формулой

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G(\tau) d\tau}{(\tau - z)}. \tag{11}$$

Обозначим для краткости

$$\ln \Phi(z) = \Gamma(z).$$

Решениями краевой задачи (8), удовлетворяющими условию $\Phi^-(\infty) = 1$, будут, как это непосредственно вытекает из формул Сохоцкого, функции

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}$$

Если отбросить дополнительное условие $\Phi^-(\infty) = 1$, то в формуле (11) нужно добавить произвольное постоянное слагаемое и решение задачи будет иметь вид

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)} \tag{12}$$

где A — произвольное постоянное. Так как $\Gamma^-(\infty) = 0$, то A представляет собой значение $\Phi^-(z)$ на бесконечности.

Таким образом, в случае $\varkappa = 0$ и при условии $\Phi^-(\infty) \neq 0$ решение содержит одно произвольное постоянное, следовательно, линейно независимых решений одно. Если $\Phi^-(\infty) = 0$, то $A = 0$, и задача имеет только тривиальное решение — тождественный нуль.

Отсюда можно получить важное следствие. *Заданную на контуре L произвольную функцию $G(t)$, удовлетворяющую условию Гельдера и имеющую индекс нуль, можно представить в виде отношения функций $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$, являющихся краевыми значениями функций, аналитических в областях D^+, D^- и не имеющих в этих областях нулей. Функции эти определяются с точностью до произвольного постоянного множителя и даются формулами* (12).

2^0. Случай $\varkappa > 0$. Допустим для определенности, что начало координат лежит в области D^+. Функция $t^\varkappa$ имеет индекс $\varkappa$. Запишем краевое условие в виде

$$\Phi^+(t) = t^\varkappa [t^{-\varkappa} G(t)] \Phi^-(t).$$

Функция $G_1(t) = t^{-\varkappa} G(t)$ будет, очевидно, иметь индекс нуль.

Представляя ее в виде отношения $G_1(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}$, где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa} G(\tau)] d\tau}{(\tau - z)} \tag{13}$$

можно краевое условие записать еще и так:

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^\varkappa \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}.$$

Последнее равенство показывает, что функция $\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}}$ аналитическая в области D^+, и функция $z^\varkappa \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}$, аналитическая в области D^-, за исключением бесконечно удаленной точки, где она может иметь полюс порядка не выше $\varkappa$, являются аналитическим продолжением друг друга через контур. Следовательно, они являются ветвями единой аналитической функции, которая во всей плоскости может иметь единственную особенность — полюс порядка не выше $\varkappa$ в бесконечности. По обобщенной теореме Лиувилля эта функция есть многочлен степени не выше $\varkappa$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Отсюда получаем общее решение задачи:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_\varkappa(z), \qquad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-\varkappa} P_\varkappa(z), \tag{14}$$

Резюмируем окончательный результат.

Теорема 3.1. *Если индекс $\varkappa$ краевой задачи Римана положителен, то задача имеет $\varkappa + 1$ линейно независимых решений:*

$$\Phi_k^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} z^k, \qquad \Phi_k^+(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{k-\varkappa} \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa)$$

Общее решение содержит $\varkappa + 1$ произвольных постоянных и определяется формулой (14).

Рассмотренный ранее случай нулевого индекса является частным случаем сформулированной теоремы. Как уже было отмечено, если $\varkappa < 0$, то однородная задача неразрешима.

В дальнейшем, в приложениях задачи Римана к решению особых интегральных уравнений, нам придется искать решение этой задачи при дополнительном условии $\Phi^-(\infty) = 0$.

Из формулы (14) следует, что $\Phi^-(\infty)$ равно коэффициенту многочлена $P_\varkappa(z)$ при $z^\varkappa$.

При условии исчезновения решения на бесконечности оно представится в виде

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} P_{\varkappa-1}(z); \qquad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} z^{-\varkappa} P_{\varkappa-1}(z),$$

где $P_{\varkappa-1}$ — многочлен степени $\varkappa - 1$ с произвольными коэффициентами. Таким образом, в этом случае задача имеет $\varkappa$ линейно независимых решений.

3.5. Каноническая функция однородной задачи. Для получения решения неоднородной задачи удобно пользоваться специальным частным решением однородной задачи, к изучению которого мы переходим.

Определение 3.2. *Порядком аналитической функции $\Phi(z)$ в некоторой точке z_0 будем называть показатель низшей степени в разложении $\Phi(z)$ в ряд по степеням $(z - z_0)$* .

Из определения следует, что если $\Phi(z)$ имеет в точке z_0 нуль некоторого порядка m, то это число m будет порядком функции. Полюсу порядка m будет соответствовать отрицательный порядок $(-m)$. Если функция аналитична в z_0 и не равна нулю, то ее порядок есть нуль.

В окрестности бесконечно удаленной точки разложение производится по степеням $\frac{1}{z}$; соответственно этому порядком функции в бесконечно удаленной точке будем называть показатель низшей степени $\frac{1}{z}$ в разложении функции, т. е. опять-таки положительный порядок соответствует нулю функции, а отрицательный — полюсу.

Суммарным порядком аналитической функции $\Phi(z)$ назовем алгебраическую сумму ее порядков для всех точек области. Суммарный порядок, следовательно, равен разности числа нулей и числа полюсов функции.

Если временно допустить в отличие от п. 3.4 в качестве решения задачи Римана функции, имеющие полюсы, то, рассуждая так же, как при получении равенства (10), получим, что суммарный порядок решения однородной задачи Римана равен индексу задачи.

Будем теперь искать решение, которое имело бы нулевой порядок во всей плоскости, кроме одной исключительной точки, в которой его порядок должен быть равен индексу. В качестве, такой исключительной точки мы всюду в дальнейшем будем брать бесконечно удаленную точку.

Определение 3.3. *Канонической функцией однородной задачи Римана будем называть кусочно аналитическую функцию, удовлетворяющую краевому условию* (8) *и имеющую нулевой порядок всюду в конечной части плоскости. В бесконечно удаленной точке ее порядок будет, следовательно, равен $\varkappa$.* При $\varkappa \geq 0$ каноническая функция не имеет полюсов и является решением краевой задачи. Мы будем называть ее также *каноническим решением.*

При $\varkappa < 0$ каноническая функция имеет на бесконечности полюс и, следовательно, не является решением однородной задачи Римана (в смысле п. 3.2). Однако она будет использована как вспомогательная при решении неоднородной задачи.

Записывая краевое условие задачи Римана в виде

$$\Phi^+(t) = t^\varkappa [t^{-\varkappa} G(t)] \Phi^-(t),$$

легко получим, что при любом $\varkappa$ каноническая функция задачи $X(z)$ равна

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \qquad X^-(z) = z^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)}, \tag{15}$$

где $\Gamma(z)$ определено формулой (13). При $\varkappa \geq 0$ общее решение однородной задачи выразится через каноническую функцию так:

$$\Phi(z) = X(z) P_\varkappa(z)$$

3.6 Решение неоднородной задачи. Заменяя коэффициент $G(t)$ краевого условия

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{9}$$

отношением краевых значений канонической функции однородной задачи $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$, приведем его к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Функция $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ удовлетворяет условию Гельдера. Заменим ее согласно п. 3.3 разностью краевых значений аналитических функций:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau - z)}. \tag{16}$$

Краевое условие запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Заметим, что при $\varkappa \geq 0$ функция $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ будет иметь на бесконечности полюс, а при $\varkappa < 0$ нуль порядка $\varkappa$.

Рассуждая совершенно так же, как это делалось в п. 3.4 при решении однородной задачи, получим следующие результаты:

1^0. $\varkappa \geq 0$. Тогда

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = P_\varkappa(z)$$

Отсюда имеем решение

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\varkappa(z)] \tag{17}$$

причем $X(z)$, $\Psi(z)$ выражаются формулами (15), (16), а $P_\varkappa$ — многочлен степени $\varkappa$ с произвольными коэффициентами.

Легко видеть, что формула (17) дает общее решение неоднородной задачи, так как оно содержит в качестве слагаемого общее решение однородной задачи $X(z)P_\varkappa(z)$.

2^0. $\varkappa < 0$. В этом случае $\dfrac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ равно нулю на бесконечности и

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = 0,$$

откуда

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z).$$

В выражении функции $\Phi^-(z)$ первый множитель на основании формулы (15) имеет на бесконечности полюс порядка $-\varkappa$, а второй, как интеграл типа Коши (16), имеет на бесконечности в общем случае нуль первого порядка. Следовательно, $\Phi^-(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка не выше чем $-\varkappa - 1$. Таким образом, если $\varkappa < -1$, неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Она будет разрешима лишь тогда, когда свободный член удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Для получения их разложим в ряд интеграл типа Коши (16) в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k},$$

где

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau.$$

Для аналитичности $\Phi^-(z)$ в бесконечно удаленной точке нужно, чтобы первые $-\varkappa - 1$ коэффициентов разложения $\Psi^-(z)$ обратились в нуль. Отсюда получаем, что для разрешимости неоднородной задачи в случае отрицательного индекса ($\varkappa < -1$) необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие $-\varkappa - 1$ условий:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1) \tag{18}$$

В итоге исследования может быть сформулирован следующий вывод.

Теорема 3.2.*В случае $\varkappa \geq 0$ неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене и ее общее решение дается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_\varkappa(z), \tag{19}$$

где каноническая функция $X(z)$ определяется из (13),*а $P_\varkappa(z)$ — полином степени $\varkappa$ с произвольными комплексными коэффициентами. Если $\varkappa = -1$, то неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение.*

В случае $\varkappa < -1$ неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял $-\varkappa-1$ условиям (18). *При выполнении последних единственное решение задачи дается формулой* (19), *где нужно положить $P(z) \equiv 0$.*

В случае, если мы наложим на искомое решение дополнительное требование, чтобы оно *обращалось в нуль в бесконечно удаленной точке*, то, как уже указывалось в п. 3.5, вместо многочлена степени $\varkappa$ нужно взять многочлен степени $\varkappa - 1$. Для разрешимости задачи в случае отрицательного индекса придется потребовать равенство нулю также и коэффициента $c_{-\varkappa}$.

Следовательно, при условии $\Phi^-(\infty) = 0$ решение будет задаваться при $\varkappa \geq 0$ формулой

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)]$$

(при $\varkappa = 0$ нужно положить $P(z) \equiv 0$).

Если $\varkappa < 0$, то решение по-прежнему будет выражаться формулой (19), где $P(z) \equiv 0$, при соблюдении $-\varkappa$ условий разрешимости

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa)$$

Таким образом, теорема о разрешимости неоднородной задачи принимает более симметричный вид.

При $\varkappa \geq 0$ общее решение неоднородной задачи линейно зависит от $\varkappa$ произвольных постоянных.

При $\varkappa < 0$ число условий разрешимости равно $-\varkappa$.

Заметим, что здесь при $\varkappa = 0$ неоднородная задача безусловно разрешима и притом единственным образом.

4. Характеристическое уравнение.

4.1. Сведение к краевой задаче Римана. Начнем изложение теории особого интегрального уравнения с рассмотрения простейшего его типа — характеристического уравнения :

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = f(t). \tag{20}$$

В этом простейшем случае решение уравнения можно свести к решению краевой задачи Римана и дать решение уравнения в замкнутой форме.

Введем кусочно аналитическую функцию, заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит искомое решение характеристического уравнения

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{21}$$

Согласно формулам Сохоцкого

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= \Phi^+(t) - \Phi^-(t),\\ \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau &= \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Внося значения $\varphi(t), \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$ в уравнение (20) и решая его относительно $\Phi^+(t)$, получим, что кусочно аналитическая функция $\Phi(z)$ должна являться решением краевой задачи Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{23}$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{24}$$

В силу того, что искомая функция $\Phi(z)$ представлена интегралом типа Коши, она должна удовлетворять дополнительному условию

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{25}$$

Индекс коэффициента $\dfrac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$ задачи Римана (23) будем называть *индексом интегрального уравнения* (20).

Решив краевую задачу (23) по формуле (22) найдем решение уравнения (20).

Итак, интегральное уравнение (20) свелось к краевой задаче Римана (23). Решение исходного уравнения получим по первой из формул (22). Чтобы установить равносильность уравнения и краевой задачи, нужно доказать, что, обратно, $\varphi(t)$, найденная указанным образом из решения краевой задачи, удовлетворяет уравнению (20). Для этого нужно установить, что справедлива и вторая из формул (22). Докажем это.

Если решение задачи (23) представлено интегралом типа Коши (21), то будут справедливы обе формулы (22) и от краевой задачи можно однозначно прийти к исходному уравнению. Допустим теперь, что имеется другая функция $\Phi_1(z)$, удовлетворяющая тем же условиям. Тогда для разности $\Phi_2 = \Phi - \Phi_1$ будет справедливо равенство

$$\Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) = 0$$

4.2. Решение характеристического уравнения. Выпишем по формулам решение краевой задачи Римана (23), считая $\varkappa \geq 0$, и вычислим по формулам Сохоцкого предельные значения соответствующих функций

$$\Phi^+(t) = X^+(t)\Big[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\Big],$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t)\Big[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\Big],$$

где $\Psi(t)$ — особый интеграл, получаемый заменой в формуле (16) z на t. Произвольный многочлен взят в форме $-\frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)$ для удобства дальнейших обозначений.

Отсюда по формуле (22)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\Big]g(t) + X^+(t)\Big[1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\Big]\Big[\Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\Big].$$

На основании краевого условия заменяем $\frac{X^-(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{G(t)}$, а функцию $\Psi(t)$ ее выражением по формуле (22). Тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{1}{G(t)}\Big]g(t) + X^+(t)\Big[1 - \frac{1}{G(t)}\Big]\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\Big].$$

Используя выражения

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^{\varkappa}\Pi(t)}}e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)G(t)}}e^{\Gamma(t)}, \tag{26}$$

и подставляя, наконец, вместо $X^+(t)$ ее выражение из формулы (26) и значения $G(t)$ и $g(t)$ из (24), имеем:

$$\varphi(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),$$

где

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]X^+(t) = [a(t) - b(t)]X^-(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)}}.$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\ln\Big[\tau^{-\varkappa}\Pi(\tau)\dfrac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\Big]}{\tau - t}d\tau, \quad \Pi(t) = \prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\varkappa_k}$$

Если $\varkappa < 0$, то, как мы знаем, задача Римана (23), вообще говоря, неразрешима. Условия ее разрешимости

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa)$$

будут вместе с теми условиями разрешимости уравнения (20).

Глава I. Задача Римана и характеристическое уравнение в случае рациональных коэффициентов.

§1 Решение задачи Римана.

Рассмотрим задачу Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{1.1}$$

где L — совокупность конечного числа замкнутых кривых. Коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ — рациональные функции, причем $G(t)$ не имеет нулей и полюсов на контуре. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, исчезающую на бесконечности $\Phi^-(\infty) = 0$, удовлетворяющую условию (1.1).

Представим коэффициент $G(t)$ в виде отношения многочленов

$$G(t) = \frac{p(t)}{q(t)}.$$

Тогда условие (1.1) запишется в виде соотношения

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)}\Phi^-(t) + g(t).$$

Разложим $p(z), q(z)$ в произведение

$$p(z) = p_+(z)p_-(z), \quad q(z) = q_+(z)q_-(z),$$

где $p_+(z), q_+(z)$ — многочлены, корни которых лежат в D^+, а $p_-(z), q_-(z)$ — многочлены с корнями в D^-.

Вычисляем индекс $\kappa = m_+ - n_+$, где m_+, n_+ — числа нулей многочленов $p_+(z), q_+(z)$.

Ввиду того, что коэффициент задачи есть функция, аналитически продолжимая в области , здесь целесообразнее не пользоваться общими формулами решения, а получить последнее, непосредственно, пользуясь аналитическим продолжением. Представляя краевое условие в виде

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)}\Phi^+(t) = \frac{p_+(t)}{q_+(t)}\Phi^-(t) + \frac{q_-(t)}{p_-(t)}g(t), \tag{1.2}$$

(каноническими функциями здесь являются $X^+ = \frac{p_-}{q_-}, X^- = \frac{q_+}{p_+}$).

Функция $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ удовлетворяет условию Гельдера. Заменим ее согласно п. 3.3 разностью краевых значений аналитических функций:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{(\tau - z)}. \tag{16}$$

Получим решение в виде

$$\Phi^+(z) = \frac{p_-(z)}{q_-(z)}\left[\Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)}\left[\Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right],$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau)\frac{d\tau}{(\tau - z)},$$

$$(\Phi^-(\infty) = 0).$$

Если индекс окажется отрицательным, то нужно положить $P_{\varkappa-1} \equiv 0$ и добавить условия разрешимости:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g(\tau)\tau^{\kappa-1} d\tau = 0. \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

Примеры.

1. Решить задачу Римана (1.1), если:

$$G(t) = \frac{t}{t^2 - 1}, \quad g(t) = \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - 1},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 0$ и не содержит точек $z_2 = 1, z_3 = -1$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2 - 1}\Phi^-(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^2 - 1};$$

$p(t) = t$;
$q(t) = t^2 - 1$;
$p_+(t) = t, \quad p_-(t) = 1$;
$q_+(t) = 1, \quad q_-(t) = t^2 - 1$;
$m_+ = 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 1 - 0 = 1$;
Записываем краевое условие в виде

$$(t^2 - 1)\Phi^+(t) = t\Phi^-(t) + \frac{(t^3 - t^2 + 1)(t + 1)}{t}.$$

Отсюда

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(\tau^3 - \tau^2 + 1)(\tau + 1)}{\tau}\frac{d\tau}{(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau^3 - \tau + 1}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\frac{1}{\tau}}{\tau - z} d\tau,$$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = z^3 - z + 1,$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{z}.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи содержит одно произвольное постоянное. Решение нашей задачи запишется так:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z^2-1}\left[(z^3 - z + 1) + c\right] = \frac{z^3 - z + 1}{z^2-1} + \frac{c}{z^2-1},$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z} + c\right] = -\frac{1}{z^2} + \frac{c}{z},$$

где c — произвольное постоянное.

2. Решить задачу Римана (1.1), если:

$$G(t) = \frac{t^2}{(t-1)(t^2+1)}, \quad g(t) = \frac{1}{t^3 - t},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 0,_2 = 1$ и не содержит точек $z_3 = -1, z_4 = \pm i$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{t^2}{(t-1)(t^2+1)}\Phi^-(t) + \frac{1}{t^3-t};$$

$p(t) = t^2;$
$q(t) = (t-1)(t^2+1);$
$p_+(t) = t^2, \quad p_-(t) = 1;$
$q_+(t) = (t-1), \quad q_-(t) = (t^2+1);$
$m_+ = 2, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 2 - 1 = 1;$

Записываем краевое условие в виде

$$(t^2+1)\Phi^+(t) = \frac{t^2}{(t-1)}\Phi^-(t) + \frac{(t^2+1)}{t^3-t}.$$

Отсюда

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(\tau^2+1)}{(\tau(\tau^2-1))}\frac{d\tau}{(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{\tau+1}\frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{\tau-1}\frac{d\tau}{\tau-z}d\tau - $$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{\tau - z},$$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{z+1},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z}.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи содержит одно произвольное постоянное. Решение нашей задачи запишется так:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z^2+1}\left[\frac{1}{z+1} + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{z-1}{z^2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + c\right],$$

где c — произвольное постоянное.

3. Решить задачу Римана (1.1), если:

$$G(t) = \frac{t}{(t-1)(t+2)}, \quad g(t) = \frac{t-2i}{t^2+1},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 1$ и не содержит точек $z_2 = 0, z_3 = \pm i, z_4 = -2$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{(t-1)(t+2)}\Phi^-(t) + \frac{t-2i}{t^2+1};$$

$p(t) = t;$
$q(t) = (t+1)(t-2);$
$p_+(t) = 1, \quad p_-(t) = t;$
$q_+(t) = (t-1), \quad q_-(t) = (t+2);$
$m_+ = 0, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 0 - 1 = -1;$

Записываем краевое условие в виде

$$\frac{t+2}{t}\Phi^+(t) = \frac{1}{t-1}\Phi^-(t) + \frac{(-2i)(t+2)}{t(t^2+1)}.$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -\kappa)$$

$$\int\limits_L \frac{(\tau+2)(\tau-2i)}{\tau(\tau^2+1)}d\tau = -\int\limits_L \frac{4i}{\tau}d\tau + \int\limits_L \frac{(i-10)}{2i(\tau+i)}d\tau - \int\limits_L \frac{(2+i)}{2i(\tau-i)}d\tau = 0+0-0=0$$

Условие разрешимости выполняется.

$$\int\limits_L \frac{(\tau+2)(\tau-2i)}{\tau(\tau^2+1)}\frac{d\tau}{\tau-z} = -\int\limits_L \frac{4i}{\tau}\frac{d\tau}{\tau-z} + \int\limits_L \frac{(i-10)}{2i(\tau+i)}\frac{d\tau}{\tau-z} - \int\limits_L \frac{(2+i)}{2i(\tau-i)}\frac{d\tau}{\tau-z}$$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = -\frac{4i}{z} + \frac{(1+4i)z + 2(1-i)}{z^2+1},$$

$$\Psi^-(z) = 0.$$

Решение нашей задачи запишется так:

$$\Phi^+(z) = \frac{z}{z+2}\left[\frac{(1+4i)z+2(1-i)}{z^2+1} - \frac{4i}{z}\right],$$

$$\Phi^-(z) = 0.$$

4. Решить задачу Римана (1.1), если:

$$G(t) = \frac{t}{t+1}, \quad g(t) = \frac{t-1}{t+1},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 0, z_2 = 1$ и не содержит точек $z_3 = -1$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t+1}\Phi^-(t) + \frac{t-1}{t+1};$$

$p(t) = t;$
$q(t) = t + 1;$
$p_+(t) = t, \quad p_-(t) = 1;$
$q_+(t) = 1, \quad q_-(t) = t + 1;$
$m_+ = 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 1 - 0 = 1;$
Записываем краевое условие в виде

$$(t+1)\Phi^+(t) = t\Phi^-(t) + (t-1).$$

Отсюда
$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L (\tau - 1)\frac{d\tau}{(\tau - z)},$
Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = z - 1,$$

$$\Psi^-(z) = 0.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи содержит одно произвольное постоянное. Решение нашей задачи запишется так:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z+1}\left[(z - 1 + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z}\left[0 + c\right] = \frac{c}{z},$$

где c — произвольное постоянное.

5. Решить задачу Римана (1.1), если:

$$G(t) = \frac{1}{t}, \quad g(t) = \frac{t}{t-1},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = \pm 1$ и не содержит точек $z_2 = 0$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{t}\Phi^-(t) + \frac{t}{t-1};$$

$p(t) = 1;$
$q(t) = t;$
$p_+(t) = 1, \quad p_-(t) = 1;$
$q_+(t) = 1, \quad q_-(t) = t;$
$m_+ = 0, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 0 - 0 = 0;$
Записываем краевое условие в виде

$$t\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + \frac{t^2}{(t-1)}.$$

Отсюда

$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau^2}{\tau-1}\frac{d\tau}{(\tau-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L(\tau+1)\frac{d\tau}{(\tau-z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{\tau-1}\frac{d\tau}{(\tau-z)},$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = z+1,$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{z-1}.$$

Решение нашей задачи запишется так:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z}\left[z+1\right],$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{z+1}.$$

§2 Решение характеристического уравнения.

Примеры.

1. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv \left(t+\frac{1}{2}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} = t-1. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = 0, z_2 = 1$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{t}{t+1}, \quad g(t) = \frac{t-1}{t+1},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t+1}\Phi^-(t) + \frac{t+1}{t-1}.$$

В данном случае

$p(t) = t;$

$q(t) = t+1;$

$p_+(t) = t, \quad p_-(t) = 1;$

$q_+(t) = 1, \quad q_-(t) = t+1.$

$m_+ = 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 1-0 = 1.$

Записываем краевое условие в виде

$$(t+1)\Phi^+(t) = t\Phi^-(t) + \frac{(t+1)(t-1)}{(t+1)},$$

$$(t+1)\Phi^+(t) = t\Phi^-(t) + (t-1).$$

Отсюда

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L (\tau - 1)\frac{d\tau}{(\tau - z)},$$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = z - 1,$$

$$\Psi^-(z) = 0.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. По формуле находим:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z+1}[z - 1 + c] = \frac{z-1+c}{z+1}.$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z}\,[0 + c] = \frac{c}{z},$$

где c — произвольное постоянное.

Решение заданного интегрального уравнения будет функция

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{t-1+c}{t+1} - \frac{c}{t} = \frac{t^2 - t + tc - tc - c}{t(t+1)} = \frac{t^2 - t - c}{t(t+1)}.$$

2. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right)\varphi(t) + \frac{t^2 - t + 2}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{t^4 - t^2 + 1}{t^3 - t}. \qquad (20)$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = 0, z_1 = \pm 1, z_3 = \pm i$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2 - t + 2}{2}}{\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2 - t + 2}{2}} = \frac{\dfrac{2t-2}{2}}{\dfrac{2t+2}{2}} = \frac{2(t-1)}{2(t^2+1)} = \frac{t-1}{t^2+1},$$

$$g(t) = \frac{\dfrac{t^4 - t^2 + 1}{t^3 - t}}{t^2 + 1} = \frac{t^4 - t^2 + 1}{(t^3 - t)(t^2 + 1)} = \frac{t^4 - t^2 + 1}{t(t^4 - 1)},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{t-1}{t^2+1}\Phi^-(t) + \frac{t^4 - t^2 + 1}{t(t^4 - 1)}.$$

В данном случае
$p(t) = t - 1;$
$q(t) = t^2 + 1;$
$p_+(t) = t - 1, \quad p_-(t) = 1;$
$q_+(t) = t^2 + 1, \quad q_-(t) = 1.$
$m_+ = 1, \quad n_+ = 2, \quad \varkappa = 1 - 2 = -1.$
Записываем краевое условие в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{t-1}{t^2+1}\Phi^-(t) + \frac{t^4 - t^2 + 1}{(t^3 - t)(t^2+1)}.$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -\kappa)$$

$$\int\limits_L \frac{\tau^4 - \tau^2 + 1}{(\tau^3 - \tau)(\tau^2 + 1)}d\tau = \int\limits_L \frac{1}{4(\tau+1)}d\tau + \int\limits_L \frac{1}{4(\tau-1)}d\tau - \int\limits_L \frac{1}{\tau}d\tau + \int\limits_L \frac{3}{4(\tau+i)}d\tau +$$
$$+ \int\limits_L \frac{3}{4(\tau - i)}d\tau = \frac{1}{4} * 2\pi i + \frac{1}{4} * 2\pi i - 2\pi i + \frac{3}{4} * 2\pi i + \frac{3}{4} * 2\pi i \neq 0$$

Условие разрешимости не выполняется. Уравнение не имеет решений.

3. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv \left(\frac{2}{t+3}\right)\varphi(t) + \frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{t}{t+1}. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точку $z_1 = -4$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{\dfrac{2}{t+3} - 2}{\dfrac{2}{t+3} + 2} = \frac{\dfrac{2 - 2t - 6}{t+3}}{\dfrac{2 - 2t + 6}{t+3}} = \frac{-4 - 2t}{8 + 2t} = -\frac{2+t}{4+t},$$

$$g(t) = \frac{\dfrac{t}{t+1}}{\dfrac{8+2t}{t+3}} = \frac{t(t+3)}{2(t+1)(t+4)},$$

то

$$\Phi^+(t) = -\frac{2+t}{4+t}\Phi^-(t) + \frac{t(t+3)}{2(t+1)(t+4)}.$$

В данном случае
$p(t) = -2 - t = -(t+2);$
$q(t) = t + 4;$
$p_+(t) = 1, \quad p_-(t) = -(t+2);$
$q_+(t) = t + 4, \quad q_-(t) = 1.$

$m_+ = 0, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 0 - 1 = -1.$

Записываем краевое условие в виде

$$-\frac{1}{2+t}\Phi^+(t) = \frac{1}{4+t}\Phi^-(t) - \frac{t(t+3)}{2(t+1)(t+4)(2+t)}.$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -\kappa)$$

$\int\limits_L \frac{\tau(\tau+3)}{2(\tau+1)(\tau+4)(-2-\tau)}d\tau = \int\limits_L \frac{1}{2(\tau+2)}d\tau + \int\limits_L \frac{1}{3(\tau+4)}d\tau - \int\limits_L \frac{1}{3(\tau+1)}d\tau =$
$\frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{3} * 2\pi i - \frac{1}{3} * 0 \neq 0$

Условие разрешимости не выполняется. Уравнение не имеет решений.

4. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv (t+2)\varphi(t) + \frac{t+1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{t}{t-1}. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = -\frac{3}{2}, z_2 = 1$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{t+2-t-1}{t+2+t+1} = \frac{1}{2t+3}, \quad g(t) = \frac{t}{(2t+3)(t-1)},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2t+3}\Phi^-(t) + \frac{t}{(2t+3)(t-1)}.$$

В данном случае
$p(t) = 1;$
$q(t) = 2t + 3;$
$p_+(t) = 1, \quad p_-(t) = 1;$
$q_+(t) = 2t + 3, \quad q_-(t) = 1.$
$m_+ = 0, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 0 - 1 = -1.$

Записываем краевое условие в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2t+3}\Phi^-(t) + \frac{t}{(2t+3)(t-1)}.$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -\kappa)$$

$\int\limits_L \frac{\tau}{(2\tau+3)(\tau-1)}d\tau = \int\limits_L \frac{3}{5(2\tau+3)}d\tau + \int\limits_L \frac{1}{5(\tau-1)}d\tau = \frac{3}{10} * 2\pi i + \frac{1}{5} * 2\pi i \neq 0$

Условие разрешимости не выполняется. Уравнение не имеет решений.

5. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv 4t\varphi(t) + \frac{t^2+4}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{t-2}{t-1}. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = 1, z_2 = \pm 2$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{4t - t^2 - 4}{4t + t^2 + 4} = -\frac{(t-2)^2}{(t+2)^2},$$

$$g(t) = \frac{(t-2)}{(t+2)^2(t-1)},$$

то

$$\Phi^+(t) = -\frac{(t-2)^2}{(t+2)^2}\Phi^-(t) + \frac{(t-2)}{(t+2)^2(t-1)}.$$

В данном случае
$p(t) = -(t-2)^2$;
$q(t) = (t+2)^2$;
$p_+(t) = -(t-2)^2, \quad p_-(t) = 1$;
$q_+(t) = (t+2)^2, \quad q_-(t) = 1$.
$m_+ = 2, \quad n_+ = 2, \quad \varkappa = 2 - 2 = 0$.
Записываем краевое условие в виде

$$\Phi^+(t) = -\frac{(t-2)^2}{(t+2)^2}\Phi^-(t) + \frac{(t-2)}{(t+2)^2(t-1)}.$$

Отсюда

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(\tau-2)}{(\tau-1)(\tau+2)^2}\frac{d\tau}{(\tau - z)},$$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = 0,$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{(z-2)}{(z-1)(z+2)^2}.$$

Так как индекс равен 0, то общее решение задачи Римана не содержит произвольные постоянные. По формуле находим:

$$\Phi^+(z) = 0.$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{(z+2)^2}{(z-2)^2}\left[-\frac{z-2}{(z-1)(z+2)^2}\right] = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

Решение заданного интегрального уравнения будет функция

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = -\frac{1}{(t-1)(t-2)}.$$

6. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv t^3\varphi(t) + \frac{t}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = t - 4. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = 1, z_2 = i$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{t^3 - t}{t^3 + t} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$g(t) = \frac{t-4}{t^3+t},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}\Phi^-(t) + \frac{t-4}{t^3+t}.$$

В данном случае
$p(t) = t^2 - 1$;
$q(t) = t^2 + 1$;
$p_+(t) = t - 1, \quad p_-(t) = t + 1$;
$q_+(t) = t - i, \quad q_-(t) = t + i$.
$m_+ = 1, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 1 - 1 = 0$.
Записываем краевое условие в виде

$$\frac{t+i}{t+1}\Phi^+(t) = \frac{t-1}{t-i}\Phi^-(t) + \frac{(t-4)(t+i)}{t(t^2+1)(t+1)}.$$

$$\frac{t+i}{t+1}\Phi^+(t) = \frac{t-1}{t-i}\Phi^-(t) + \frac{(t-4)}{t(t-i)(t+1)}.$$

Отсюда
$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(\tau-4)}{\tau(\tau-i)(\tau+1)}\frac{d\tau}{(\tau-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{4}{i\tau}\frac{d\tau}{(\tau-z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{9i-4}{(1+i)(\tau-i)} *$
$* \frac{d\tau}{(\tau-z)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{5}{(i-1)(\tau+1)}\frac{d\tau}{(\tau-z)},$

Используя формулы Коши (3) и (4) имеем

$$\Psi^+(z) = \frac{4}{iz} + \frac{5}{(i-1)(z+1)},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{9i-4}{(1+i)(z-i)}.$$

Так как индекс равен 0, то общее решение задачи Римана не содержит произвольные постоянные. По формуле находим:

$$\Phi^+(z) = \frac{z+1}{z+i}\left[\frac{4}{iz} + \frac{5}{(i-1)(z+1)}\right] = \frac{4(z+1)}{iz(z+i)} + \frac{5}{(z+i)(i-1)}.$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{z-i}{z-1}\left[-\frac{9i-4}{(1+i)(z-i)}\right] = \frac{4-9i}{(z-1)(i+1)},$$

Решение заданного интегрального уравнения будет функция

$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \dfrac{4(t+1)}{it(t+i)} + \dfrac{5}{(t+i)(i-1)} - \dfrac{4-9i}{(t-1)(i+1)} =$
$= \dfrac{-26t^2 + 10it^2 - 18it + 8}{2it(1-t)(t+i)}.$

Глава II. Задача Римана и характеристическое уравнение в случае мероморфных коэффициентов.

§1 Решение задачи Римана.

Рассмотрим задачу Римана

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \tag{2.1}$$

где L — совокупность конечного числа замкнутых кривых. Коэффициенты $G(t)$ и $g(t)$ — мероморфные функции. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, исчезающую на бесконечности $\Phi^{-}(\infty) = 0$, удовлетворяющую условию (2.1). Представим коэффициент $G(t)$ в виде отношения целых функций

$$G(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}.$$

Тода условие (2.1) запишется в виде

$$\Phi^{+}(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}\Phi^{-}(t) + g(t).$$

Разложим $P(t), Q(t)$ в произведение

$$P(z) = p_{+}(z)P_{-}(z), \quad Q(z) = q_{+}(z)Q_{-}(z),$$

где $p_{+}(z), q_{+}(z)$ — многочлены, корни которых лежат в D^{+}, а $P_{-}(z), Q_{-}(z)$ — целые функции.

Вычисляем индекс $\kappa = m_{+} - n_{+}$, где m_{+}, n_{+} — числа нулей многочленов $p_{+}(z), q_{+}(z)$.

Ввиду того, что коэффициент задачи есть функция, аналитически продолжимая в области , здесь целесообразнее не пользоваться общими формулами решения, а получить последнее, непосредственно, пользуясь аналитическим продолжением. Представляя краевое условие в виде

$$\frac{Q_{-}(t)}{P_{-}(t)}\Phi^{+}(t) = \frac{p_{+}(t)}{q_{+}(t)}\Phi^{-}(t) + \frac{Q_{-}(t)}{P_{-}(t)}g(t) \tag{2.2}$$

(каноническими функциями здесь являются $X^{+} = \frac{P_{-}}{Q_{-}}, X^{-} = \frac{q_{+}}{p_{+}}$).

Далее решается задача о скачке

$$\Psi^{+}(t) - \Psi^{-}(t) = \frac{Q_{-}(t)}{P_{-}(t)}g(t)$$

Для этого достаточно правую часть разложить на сумму простых дробей. Тогда $\Psi + (t)$ и $\Psi - (t)$ будут соответственно суммами дробей с полюсами в $D^{+}(D^{-})$ областях. К полученному равенству

$$\frac{Q_{-}(t)}{P_{-}(t)}\Phi^{+}(t) - \Psi^{+}(t) = \frac{p_{+}(t)}{q_{+}(t)}\Phi^{-}(t) - \Psi^{-}(t),$$

применяем теорему об аналитическм продолжении и обобщенную теорему Лиувилля

$$\Phi^+(z) = \frac{P_-(z)}{Q_-(z)} \left[\Psi^+(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{q_+(z)}{p_+(z)} \left[\Psi^-(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right],$$

Если индекс окажется отрицательным, то нужно положить $P_{\varkappa-1} \equiv 0$ и добавить условия разрешимости:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Q_-(\tau)}{P_-(\tau)} g(\tau)\tau^{\kappa-1} d\tau = 0. \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

Примеры.

1. Решить задачу Римана (2.1), если:

$$G(t) = \operatorname{tg} t, \quad g(t) = \frac{1}{t\cos t},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 0$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \operatorname{tg} t\Phi^-(t) + \frac{1}{t\cos t};$$

$p(t) = \sin t$;
$q(t) = \cos t$;
$p_+(t) = t, \quad P_-(t) = \dfrac{\sin t}{t}$;
$q_+(t) = 1, \quad Q_-(t) = \cos t$;
$m_+ = 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 1 - 0 = 1$;
Записываем краевое условие в виде

$$\frac{t\cos t}{\sin t}\Phi^+(t) = t\Phi^-(t) + \frac{1}{\sin t}.$$

Разложение $\dfrac{1}{\sin z}$ примет вид

$$\frac{1}{sinz} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$$

$$\Psi^+(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{sinz},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{z}.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. Решение нашей задачи запишется так::

$$\Phi^+(z) = \frac{\sin z}{z\cos z}\left[\frac{1}{sinz} - \frac{1}{z} + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z} + c\right] = -\frac{1}{z^2} + \frac{c}{z}.$$

где c — произвольное постоянное.

2. Решить задачу Римана (2.1), если:

$$G(t) = \operatorname{tg} t, \quad g(t) = \frac{(1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2})}{(1 - \dfrac{t^2}{\pi^2})} \operatorname{tg} t \operatorname{cth} t,$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точки $z_1 = 0, z_2 = \pm\frac{\pi}{2}, z_3 = \pm\pi, z_4 = \pi i$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \operatorname{tg} t \Phi^-(t) + \frac{(1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2})}{(1 - \dfrac{t^2}{\pi^2})} \operatorname{tg} t \operatorname{cth} t;$$

$p(t) = \sin t;$
$q(t) = \cos t;$
$p_+(t) = t\left(1 - \dfrac{t^2}{\pi^2}\right), \quad P_-(t) = \dfrac{\sin t}{t\left(1 - \dfrac{t^2}{\pi^2}\right)};$
$q_+(t) = \left(1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}\right), \quad Q_-(t) = \dfrac{\cos t}{\left(1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}\right)};$
$m_+ = 3, \quad n_+ = 2, \quad \varkappa = 3 - 2 = 1;$

Записываем краевое условие в виде

$$\frac{t\left(1 - \dfrac{t^2}{\pi^2}\right)\cos t}{\left(1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}\right)\sin t}\Phi^+(t) = \frac{t\left(1 - \dfrac{t^2}{\pi^2}\right)}{\left(1 - \dfrac{4t^2}{\pi^2}\right)}\Phi^-(t) + t \operatorname{cth} t.$$

Разложение $z \operatorname{cth} z$ примет вид

$\operatorname{cth} z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2z}{z^2 + n^2\pi^2} = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{z + n\pi i} + \dfrac{1}{z - n\pi i}\right)$

$z \operatorname{cth} z = z\left(\dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z + n\pi i} + \dfrac{1}{z - n\pi i}\right)\right) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{z + n\pi i} + \dfrac{z}{z - n\pi i}\right)$

$$\Psi^+(z) = z \operatorname{cth} z - \frac{z}{z - \pi i},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{z}{z - \pi i}.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. Решение нашей задачи запишется так::

$$\Phi^+(z) = \frac{\left(1 - \dfrac{4z^2}{\pi^2}\right)\sin z}{z\left(1 - \dfrac{z^2}{\pi^2}\right)\cos z}\left[z \operatorname{cth} z - \frac{z}{z - \pi i} + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{\left(1 - \dfrac{4z^2}{\pi^2}\right)}{z\left(1 - \dfrac{z^2}{\pi^2}\right)} \left[-\frac{z}{z - \pi i} + c\right].$$

где c — произвольное постоянное.

3. Решить задачу Римана (2.1), если:

$$G(t) = \operatorname{ctg} t, \quad g(t) = \frac{\operatorname{ctg}^2 t}{(\pi - 2t)},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = \frac{\pi}{2}$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \operatorname{ctg} t \Phi^-(t) + \frac{\operatorname{ctg}^2 t}{(\pi - 2t)};$$

$p(t) = \cos t;$
$q(t) = \sin t;$
$p_+(t) = \pi - 2t, \quad P_-(t) = \dfrac{\cos t}{\pi - 2t};$
$q_+(t) = 1, \quad Q_-(t) = \sin t;$
$m_+ = 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 1 - 0 = 1;$

Записываем краевое условие в виде

$$\frac{(\pi - 2t)\sin t}{\cos t}\Phi^+(t) = (\pi - 2t)\Phi^-(t) + \operatorname{ctg} t.$$

Разложение $z \operatorname{ctg} z$ примет вид

$\operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z - n\pi} + \dfrac{1}{z + n\pi}\right) = \dfrac{1}{z} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2z}{z^2 - n^2\pi^2},$

$$\Psi^+(z) = \operatorname{ctg} z,$$

$$\Psi^-(z) = 0.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. Решение нашей задачи запишется так::

$$\Phi^+(z) = \operatorname{ctg} z(\pi - 2z)\left[\operatorname{ctg} z + c\right] = \operatorname{ctg}^2 z(\pi - 2z) + c \operatorname{ctg} z(\pi - 2z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\pi - 2z}\left[c\right] = \frac{c}{\pi - 2z},$$

где c — произвольное постоянное.

4. Решить задачу Римана (2.1), если:

$$G(t) = \frac{1}{\sin t}, \quad g(t) = \frac{1}{\sin^2 t},$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 0$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{\sin t}\Phi^-(t) + \frac{1}{\sin^2 t};$$

$p(t) = 1;$
$q(t) = \sin t;$
$p_+(t) = 1, \quad P_-(t) = 1;$
$q_+(t) = t, \quad Q_-(t) = \dfrac{\sin t}{t};$
$m_+ = 0, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 0 - 1 = -1;$
Записываем краевое условие в виде

$$\frac{\sin t}{t}\Phi^+(t) = \frac{1}{t}\Phi^-(t) + \frac{1}{\sin t}.$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa)$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_L \frac{d\tau}{\sin\tau} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-\pi}\frac{1}{\sin z} = 2\pi i\frac{1}{\cos(-\pi)} = 2\pi i \neq 0$$

Условие не выполняется. Решений нет.

5. Решить задачу Римана (2.1), если:

$$G(t) = \frac{(t^2-1)^2\cos t}{t}; \quad g(t) = \frac{\sin\frac{1}{t}\cos t}{(t-2)^2}; \quad |t| = \frac{3}{2};$$

при условии, что $\Phi^-(\infty) = 0$, а L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точку $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1$.

В данном случае

$$\Phi^+(t) = \frac{(t^2-1)^2\cos t}{t}\Phi^-(t) + \frac{\sin\frac{1}{t}\cos t}{(t-2)^2};$$

$p(t) = \cos t;$
$q(t) = t;$
$p_+(t) = (t^2-1)^2, \quad P_-(t) = \cos t;$
$q_+(t) = t, \quad Q_-(t) = 1.$
$m_+ = 4, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 4 - 1 = 3.$
Записываем краевое условие в виде

$$\frac{1}{\cos t}\Phi^+(t) = \frac{(t^2-1)^2}{t}\Phi^-(t) + \frac{sin\dfrac{1}{t}}{(t-2)^2}.$$

Для нахождения функции $\Psi(z)$ разложим $\dfrac{sin\frac{1}{z}}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана. В нашем случае

$$\frac{sin\frac{1}{z}}{(z-2)^2} = \frac{c_{-2}}{(z-2)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-2)^2} + c_0 + c_1(z-2) + \ldots$$

На основании известных формул коэффициенты c_{-2}, c_{-1} вычисляютс следующим образом

$$c_{-1} = \left[\sin\frac{1}{z}\right]\Big|_{z=2} = \sin\frac{1}{2},$$

$$c_{-2} = \left[\sin\frac{1}{z}\right]'\Big|_{z=2} = \left[-\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}\right]\Big|_{z=2} = -\frac{\cos\frac{1}{2}}{4}.$$

Отсюда

$$\frac{sin\frac{1}{z}}{(z-2)^2} = -\frac{\cos\frac{1}{2}}{4(z-2)^2} + \frac{\sin\frac{1}{2}}{(z-2)^2} + c_0 + c_1(z-2) + \ldots$$

Выразим $\Psi^+(z)$ и $\Psi^-(z)$

$$\Psi^+(z) = -\frac{\cos\frac{1}{2}}{4(z-2)^2} + \frac{\sin\frac{1}{2}}{(z-2)^2},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{sin\frac{1}{z}}{(z-2)^2} - \frac{\cos\frac{1}{2}}{4(z-2)^2} + \frac{\sin\frac{1}{2}}{(z-2)^2}.$$

Так как индекс равен 3, то общее решение задачи содержит три произвольных постоянных. Решение нашей задачи запишется так:

$$\Phi^+(z) = \cos z\left[(z^3 - z + 1) + c + c_1 z + c_2 z^2\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{z}{(z^2-1)^2}\left[\frac{1}{z} + c + c_1 z + c_2 z^2\right],$$

где c, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

§2 Решение характеристического уравнения.

Примеры.

1. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv \pi t\varphi(t) + \frac{t^2}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \operatorname{tg} t. \qquad (20)$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точку $z_1 = \pi$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{\pi t - t^2}{\pi t + t^2} = \frac{\pi - t}{\pi + t}, \quad g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{t(\pi + t)},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{\pi - t}{\pi + t}\Phi^-(t) + \frac{\operatorname{tg} t}{t(\pi + t)}.$$

В данном случае
$p(t)=\pi-t;$
$q(t)=\pi+t;$
$p_+(t)=\pi-t, \quad P_-(t)=1;$
$q_+(t)=1, \quad Q_-(t)=\pi+t.$
$m_+=1, \quad n_+=0, \quad \varkappa=1-0=1.$
Записываем краевое условие в виде

$$(\pi+t)\Phi^+(t)=(\pi-t)\Phi^-(t)+\frac{\operatorname{tg} t}{t}.$$

Разложение $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ примет вид

$$\operatorname{tg} z=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{z-\frac{2n+1}{2}\pi}\right);$$

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z(z-\frac{2n-1}{2}\pi)}+\frac{1}{z(z-\frac{2n+1}{2}\pi)}\right);$$

$$\Psi^+(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z},$$

$$\Psi^-(z)=0.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. По формуле находим:

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{\pi+z}\left[\frac{\operatorname{tg} z}{z}+c\right].$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{\pi-z}\left[0+c\right]=\frac{c}{\pi-z},$$

где c — произвольное постоянное.

Решение заданного интегрального уравнения будет функция
$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\frac{\operatorname{tg} t}{t(\pi+t)}+\frac{c}{\pi+t}-\frac{c}{\pi-t}=\frac{\operatorname{tg} t}{t(\pi+t)}+\frac{c\pi-ct-c\pi-ct}{\pi^2-t^2}=\frac{\operatorname{tg} t}{t(\pi+t)}-\frac{2ct}{\pi^2-t^2}.$

2. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi\equiv\pi^2\varphi(t)+\frac{t^2}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\frac{t-\pi i}{\sin^2 t}. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1=\pm\pi, z_2=\pi i$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t).$$

Так как

$$G(t)=\frac{\pi^2-t^2}{\pi^2+t^2}, \quad g(t)=\frac{t-\pi i}{(\pi^2+t^2)\sin^2 t}=\frac{1}{(t+\pi i)\sin^2 t},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{\pi^2 - t^2}{\pi^2 + t^2}\Phi^-(t) + \frac{1}{(t+\pi i)\sin^2 t}.$$

В данном случае
$p(t) = \pi^2 - t^2$;
$q(t) = \pi^2 + t^2$;
$p_+(t) = \pi^2 - t^2, \quad P_-(t) = 1$;
$q_+(t) = t - \pi i, \quad Q_-(t) = t + \pi i$.
$m_+ = 2, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 2 - 1 = 1$.
Записываем краевое условие в виде

$$(t+\pi i)\Phi^+(t) = \frac{\pi^2 - t^2}{t - \pi i}\Phi^-(t) + \frac{1}{\sin^2 t}.$$

Разложение $\dfrac{1}{\sin^2 z}$ примет вид

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2};$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{(z-\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{(z-\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2}.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. По формуле находим:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z+\pi i}\left[\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{(z-\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2} + c\right].$$

$$\Phi^-(z) = \frac{z - \pi i}{\pi^2 - z^2}\left[-\frac{1}{(z-\pi)^2} - \frac{1}{(z+\pi)^2} + c\right],$$

где c — произвольное постоянное.

Решение заданного интегрального уравнения будет функция
$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{1}{t+\pi i}\left[\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{(t-\pi)^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} + c\right] - \frac{t-\pi i}{\pi^2 - t^2} *$$
$$* \left[-\frac{1}{(t-\pi)^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} + c\right] = \frac{1}{\sin^2 t(t+\pi i)} + \frac{1}{(t-\pi)^2}\left[\frac{t-\pi i}{\pi^2 - t^2} - \frac{1}{t+\pi i}\right] +$$
$$+ \frac{1}{(t+\pi)^2}\left[\frac{t-\pi i}{\pi^2 - t^2} - \frac{1}{t+\pi i}\right] + c\left[\frac{t-\pi i}{\pi^2 - t^2} - \frac{1}{t+\pi i}\right] = \frac{1}{\sin^2 t(t+\pi i)} +$$

$$+ \frac{t^2}{(t-\pi)^2(\pi^2 - t^2)(t+\pi i)} + \frac{t^2}{(t+\pi)^2(\pi^2 - t^2)(t+\pi i)} - \frac{t^2 c}{(\pi^2 - t^2)(t+\pi i)} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 t(t+\pi i)} + \frac{t^2(2(t^2+\pi^2) - c(t^2 - \pi^2)^2)}{(t-\pi)^2(t+\pi)^2(\pi^2 - t^2)(t+\pi i)}$$

3. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv t^2\varphi(t) - \frac{\pi t}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = t\,\mathrm{cth}\,t. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, который содержит внутри себя точки $z_1 = -\pi, z_2 = 0$, и не содержит точку $z_3 = \pi$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как
$$G(t) = \frac{t^2 + \pi t}{t^2 - \pi t} = \frac{t + \pi}{t - \pi}, \quad g(t) = \frac{t \operatorname{cth} t}{t(t + \pi)} = \frac{\operatorname{cth} t}{t - \pi},$$
то
$$\Phi^+(t) = \frac{t + \pi}{t - \pi}\Phi^-(t) + \frac{\operatorname{cth} t}{t - \pi}.$$

В данном случае
$p(t) = t + \pi$;
$q(t) = t - \pi$;
$p_+(t) = t + \pi, \quad P_-(t) = 1$;
$q_+(t) = 1, \quad Q_-(t) = t - \pi$.
$m_+ = 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 1 - 0 = 1$.
Записываем краевое условие в виде

$$(t - \pi)\Phi^+(t) = (t + \pi)\Phi^-(t) + \operatorname{cth} t.$$

Разложение $\operatorname{cth} z$ примет вид

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2};$$

$$\Psi^+(z) = -\frac{1}{z} + \operatorname{cth} z,$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{z}.$$

Так как индекс равен 1, то общее решение задачи Римана содержит одно произвольное постоянное. По формуле находим:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z - \pi}\left[\frac{1}{\operatorname{cth} z} - \frac{1}{z} + c\right].$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z + \pi}\left[-\frac{1}{z} + c\right],$$

где c — произвольное постоянное.

Решение заданного интегрального уравнения будет функция
$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{\operatorname{cth} t}{t - \pi} - \frac{1}{t(t - \pi)} + \frac{c}{t - \pi} + \frac{1}{t(t + \pi)} - \frac{c}{t + \pi} = \frac{\operatorname{cth} t}{t - \pi} + \frac{\pi(c - t)}{(t^2 - \pi^2)}$.

4. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv 4\varphi(t) + \frac{t^2}{\pi^3 i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{\pi^2(e^t - 1)}. \tag{20}$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = \pm 2\pi, z_2 = 0$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{4 - \frac{t^2}{\pi^2}}{4 + \frac{t^2}{\pi^2}} = \frac{4\pi^2 - t^2}{4\pi^2 + t^2}, \quad g(t) = \frac{\pi^2}{\pi^2(e^t - 1)(4\pi^2 + t^2)} = \frac{1}{(e^t - 1)(4\pi^2 + t^2)},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{4\pi^2 - t^2}{4\pi^2 + t^2}\Phi^-(t) + \frac{1}{(e^t - 1)(4\pi^2 + t^2)}.$$

В данном случае
$p(t) = 4\pi^2 - t^2$;
$q(t) = 4\pi^2 + t^2$;
$p_+(t) = 4\pi^2 - t^2, \quad P_-(t) = 1$;
$q_+(t) = 1, \quad Q_-(t) = 4\pi^2 + t^2$.
$m_+ = 2, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = 2 - 0 = 2$.
Записываем краевое условие в виде

$$(4\pi^2 + t^2)\Phi^+(t) = (4\pi^2 - t^2)\Phi^-(t) + \frac{1}{e^t - 1}.$$

Разложение $\dfrac{1}{e^z - 1}$ примет вид

$$\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4n^2\pi^2};$$

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z},$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{z}.$$

Так как индекс равен 2, то общее решение задачи Римана содержит две произвольные постоянные. По формуле находим:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{4\pi^2 + z^2}\left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z\right].$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{4\pi^2 - z^2}\left[-\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z\right],$$

где c_0, c_1 — произвольные постоянные.

Решение заданного интегрального уравнения будет функция
$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{4\pi^2 - t^2 - 4\pi^2 - t^2}{16\pi^4 - t^4}\left[\frac{1}{t} + c_0 + c_1 t\right] +$$
$$+ \frac{1}{(4\pi^2 + t^2)(e^t - 1)} = \frac{1}{(4\pi^2 + t^2)(e^t - 1)} + \frac{t(1 - tc_0 - t^2 c_1)}{16\pi^4 - t^4}$$

5. Пусть дано интегральное уравнение

$$K^0\varphi \equiv (4t^2+3\pi^2)\varphi(t) + \frac{8\pi t}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \frac{(\pi^2-4t^2)(3\pi-2t)}{\sin t}. \qquad (20)$$

L — произвольный гладкий замкнутый контур, содержащий внутри себя точки $z_1 = -\frac{\pi}{2}, z_2 = -\pi$.

На основании вышеизложенного решения уравнение (20) сведется к решению эквивалентному задаче Римана.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t).$$

Так как

$$G(t) = \frac{4t^2+3\pi^2-8\pi t}{4t^2+3\pi^2+8\pi t} = \frac{(2t-3\pi)(2t-\pi)}{(2t+\pi)(2t+3\pi)},$$

$$g(t) = \frac{(\pi^2-4t^2)(3\pi-2t)}{\dfrac{1}{4}(2t+\pi)(3\pi+2t)\sin t} = \frac{4(\pi-2t)(3\pi-2t)}{(3\pi+2t)\sin t},$$

то

$$\Phi^+(t) = \frac{(2t-3\pi)(2t-\pi)}{(2t+\pi)(2t+3\pi)}\Phi^-(t) + \frac{4(\pi-2t)(3\pi-2t)}{(3\pi+2t)\sin t}.$$

В данном случае
$p(t) = (2t-3\pi)(2t-\pi)$;
$q(t) = (2t+\pi)(2t+3\pi)$;
$p_+(t) = 1, \quad P_-(t) = (2t-3\pi)(2t-\pi)$;
$q_+(t) = (2t+\pi), \quad Q_-(t) = (2t+3\pi)$.
$m_+ = 0, \quad n_+ = 1, \quad \varkappa = 0 - 1 = -1$.
Записываем краевое условие в виде

$$\frac{(2t+3\pi)}{(2t-\pi)(2t-3\pi)}\Phi^+(t) = \frac{1}{(2t+\pi)}\Phi^-(t) + \frac{4}{\sin t}.$$

Решение задачи существует лишь при выполнении условий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -\kappa)$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_L \frac{d\tau}{\sin\tau} = 2\pi i \mathop{res}_{z=-\pi}\frac{1}{\sin z} = 2\pi i\frac{1}{\cos -\pi} = 2\pi i \neq 0$$

Условие не выполняется. Решений нет.

Глава III. Задача Римана в случае линейно-меро-морфного коэффициента.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \tag{3.1}$$

при условии, что $G(t)$ и $g(t)$ — линейно-мероморфные функции, не имеющие особенностей на L, L — гладкий замкнутый контур. Пусть

$$G(t) = \frac{\Pi(t)}{Q(t)},$$

причем $\Pi(t) = \Pi_1^+(t)\Pi_2^-(t)$, $\quad Q(t) = Q_1^+(t)Q_2^-(t)$ — линейно-мероморфные функции, имеющие особые полярные линии первого порядка соответственно. Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую условию (3.1) и исчезающую на бесконечности $\Phi^-(\infty) = 0$, Для решения задачи перепишем граничное условие в виде

$$\frac{Q_2^-(t)}{\Pi_2^-(t)}\Phi^+(t) = \frac{\Pi^+(t)}{Q_1^+(t)}G(t)\Phi^-(t) + \frac{Q_2^-(t)}{\Pi_2^-(t)}g(t). \tag{3.2}$$

Тогда каноническими функциями будут

$$X^+(t) = \frac{\Pi_2^-(t)}{Q_2^-(t)}, \quad X^-(t) = \frac{Q_1^+(t)}{\Pi_1^+(t)},$$

так как

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = \frac{\Pi_1^+(t)\Pi_2^-(t)}{Q_1^+(t)Q_2^-(t)} = \frac{\Pi(t)}{Q(t)} = G(t).$$

Индекс задачи есть порядок канонической функции на бесконечности с обратным знаком

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{Q_2^-(z)}\left[\Psi^+(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{Q_1^+(z)}{\Pi_1^+(z)}\left[\Psi^-(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right],$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Q_2^-(z)}{\Pi_2^-(z)}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Если индекс $\varkappa < 0$, то нужно положить $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$ и добавить условие разрешимости

$$\int\limits_L \frac{Q_2^-(z)}{\Pi_2^-(z)}g(\tau)\tau^{\kappa-1}d\tau = 0. \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

2. Решение задачи Римана в случае линейно-мероморф- -ного коэффициента.

Задача 1. Найти кусочно-голоморфную функцию, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую условию (3.1), если

$$\Pi_1^+(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k1}} \frac{\varphi_{k1}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$\Pi_2^-(z) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k2}} \frac{\varphi_{k2}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$Q_1^+(z) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k3}} \frac{\varphi_{k3}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$Q_2^-(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k4}} \frac{\varphi_{k4}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$g(t) = \frac{\Pi_2^-(t)}{Q_2^-(t)} f(t),$$

где f — функция голоморфная в D^+ и непрерывная в $\bar{D}^+$, а функции $\varphi_{kj} \in H(A,\lambda), t \in \bar{L}_{kj}, j = \overline{1,4}$.

Полярные линии $L_{k1}, k = 1,\dots,p$, $L_{k3}, k = 1,\dots,s$ лежат в D^+, $L_{k2}, k = 1,\dots,q$, $L_{k4}, k = 1,\dots,m$ соответственно в D^-. Перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)Q_2^-(t)}{\Pi_2^-(t)} - \frac{\Phi^-(t)Q_1^+(t)}{\Pi_1^+(t)} = \frac{Q_2^-(t)}{\Pi_2^-(t)} \frac{\Pi_2^-(t)}{Q_2^-(t)} f(t).$$

Тогда

$$X^+(t) = \frac{\Pi_2^-(t)}{Q_2^-(t)}, \quad X^-(t) = \frac{Q_1^+(t)}{\Pi_1^+(t)},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} f(z) \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} f(z), & z\epsilon D^+ \\ 0, & z\epsilon D^- \end{cases}$$

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{Q_2^-(z)} f(z),$$

$$\Phi^-(z) = 0.$$

В классе ограниченных на бесконечности

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{Q_2^-(z)} \left[f(z) + c \right],$$

$$\Phi^-(z) = C \frac{Q_1^+(z)}{\Pi_1^+(z)},$$

где c — произвольное постоянное.

В частности, если

$$f(z) = \frac{1}{\Pi_5^-(z)},$$

где

$$\Pi_5^-(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k5}} \frac{\varphi_{k5}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

где $L_{k5} \in D^-, \varphi_{k5} \in H(A, \lambda), t \in \bar{L}_{k5}$. Тогда

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{Q_2^-(z)} \left[\frac{1}{\Pi_5^-(z)} + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = C\frac{Q_1^+(z)}{\Pi_1^+(z)},$$

где c — произвольное постоянное.

Задача 2. Найти кусочно-голоморфную функцию, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую условию (3.1), если

$$\Pi_1^+(z) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k1}} \frac{\varphi_{k1}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$\Pi_2^-(z) = \prod_{k=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k2}} \frac{\varphi_{k2}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$\Pi_3^+(z) = \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k3}} \frac{\varphi_{k3}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$\Pi_4^-(z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{k4}} \frac{\varphi_{k4}(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

$$g(t) = \Pi_2^-(t),$$

где функции $\varphi_{kj} \in H(A, \lambda), t \in \bar{L}_{kj}, j = \overline{1,4}$.

Полярные линии $L_{k1}, k = \overline{1,p}$, $L_{k3}, k = \overline{1,s}$ лежат в D^+, $L_{k2}, k = = \overline{1,q}$, $L_{k4}, k = \overline{1,m}$ соответственно в D^-. Тогда

$$X^+(t) = \frac{\prod_2^-(t)}{\prod_4^-(t)}, \quad X^-(t) = \frac{\prod_3^+(t)}{\prod_1^+(t)},$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\Pi_4^-(t)}{\Pi_2^-(t)} \Pi_2^-(t) \frac{d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int \Pi_4^-(t) \frac{d\tau}{\tau - z}$$

$$\Psi^+(z) = \Pi_4^-(z),$$

$$\Psi^-(z) = 0.$$

Индекс задачи равен $\varkappa = p - s$.

Рассмотрим 3 случая:

1) $p > s$, тогда $\varkappa > 0$.

В классе исчезающих на бесконечности

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{\Pi_4^-(z)}\left[\Pi_4^-(z) + P_{\varkappa-1}(z)\right] = \Pi_2^-(z) + \frac{\Pi_2^-(z)}{\Pi_4^-(z)}P_{\varkappa-1}(z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{\Pi_3^+(z)}{\Pi_1^+(z)}\left[0 + P_{\varkappa-1}(z)\right] = \frac{\Pi_3^+(z)}{\Pi_1^+(z)}P_{\varkappa-1}(z).$$

В классе ограниченных функций

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{\Pi_4^-(z)}\left[\Pi_4^-(z) + P_{\varkappa}(z)\right] = \Pi_2^-(z) + \frac{\Pi_2^-(z)}{\Pi_4^-(z)}P_{\varkappa}(z),$$

$$\Phi^-(z) = \frac{\Pi_3^+(z)}{\Pi_1^+(z)}\left[0 + P_{\varkappa}(z)\right] == \frac{\Pi_3^+(z)}{\Pi_1^+(z)}P_{\varkappa}(z).$$

2) $p = s$, тогда $\varkappa = 0$.

В классе исчезающих на бесконечности

$$\Phi^+(z) = \frac{\Pi_2^-(z)}{\Pi_4^-(z)}\left[\Pi_4^-(z))\right] = \Pi_2^-(z),$$

$$\Phi^-(z) = 0.$$

В классе ограниченных функций

$$\Phi^+(z) = \Pi_2^-(z) + c,$$

$$\Phi^-(z) = c,$$

где c — произвольное постоянное.

3) $p < s$, тогда $\varkappa < 0$.

$$\Phi^+(z) = \Pi_2^-(z),$$

$$\Phi^-(z) = 0.$$

Список используемой литературы.

[1] Шабат Б.В. *Введение в комлексный анализ*, (часть I, изд-во "Наука М., 1976).
[2] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*, (часть III, изд-во "Наука М., 1977).
[3] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.*(изд-во "Наука М., 1978).
[4] Салехова И.Г. *Задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг*, сборник статей "Теория функций комплексного переменного и краевые задачи"(Чебоксары, Изд-во ЧГУ, 1974), выпуск 2, с.131-140.
[5] Салехова И.Г., Афонина А.И *Задача Римана для функций с полярными линиями высших порядков.* Известия вузов. Математика, с.3-12, (2014).