УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2018, Т. 160, кн. 4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 718–730 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.6

МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ РЫНОЧНОГО РАВНОВЕСИЯ С ЦЕНОВЫМИ ГРУППАМИ

О.В. Пинягина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе рассматривается модель рыночного равновесия с ценовыми группами в форме вариационного неравенства для однопродуктового рынка бесконечно делимого продукта. Предполагается, что каждый участник рынка может разбить множество своих контрагентов на непересекающиеся группы и для каждой группы назначить отдельную ценовую функцию. Для рассматриваемой модели сформулированы и доказаны условия равновесия. Сформулированы и обоснованы условия существования решения задачи, опирающиеся на свойство коэрцитивности.

Для модели рыночного равновесия с ценовыми группами, в которой ценовые функции для каждой группы зависят только от объема покупок/продаж в данной группе, предложен метод покоординатного спуска для отыскания равновесных состояний, доказана его сходимость. Предварительные тестовые расчеты подтверждают эффективность предложенного метода по сравнению с методом проекции градиента.

Ключевые слова: модель рыночного равновесия, ценовые группы, метод покоординатного спуска

Введение

Напомним модель рыночного равновесия в виде вариационного неравенства, предложенную для аукционов в [1] и развитую далее в ряде работ (см., например, [2–4]). Будем рассматривать ее простейший вариант – однопродуктовый рынок бесконечно делимого продукта без ограничений (кроме неотрицательности) на объемы покупок и продаж.

Обозначим через I и J конечные множества индексов продавцов и покупателей. Для каждого продавца $i \in I$ имеется некоторая непрерывная ценовая функция g_i, а величина предложения x_i должна быть неотрицательной. Аналогично, для каждого покупателя $j \in J$ имеется некоторая непрерывная ценовая функция h_j, а величина спроса y_j должна быть неотрицательной. В общем случае ценовые функции могут зависеть от всех величин спроса-предложения.

Допустимое множество задачи представлено уравнением баланса и условиями неотрицательности:

$$W = \left\{ (x, y) \;\Big|\; \sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} y_j,\ x_i \geq 0,\ i \in I,\ y_j \geq 0,\ j \in J \right\}.$$

Условие равновесия для этой задачи выглядит следующим образом. Вектор спроса-предложения $w^* = (x^*, y^*) \in W$ представляет собой точку равновесия, если существует такое число p^*, что

$$g_i(w^*) \begin{cases} \geq p^*, & \text{если} \quad x_i^* = 0, \\ = p^*, & \text{если} \quad x_i^* > 0 \end{cases} \tag{1}$$

и

$$h_j(w^*) \begin{cases} \leq p^*, & \text{если} \quad y_j^* = 0, \\ = p^*, & \text{если} \quad y_j^* > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Величина p^* представляет собой равновесную цену.

В работе [1] показано, что условия равновесия (1), (2) для некоторой точки $w^* \in W$ выполняются тогда и только тогда, когда эта точка является решением следующего вариационного неравенства: найти точку $w^* \in W$ такую, что

$$\sum_{i \in I} g_i(w^*)(x_i - x_i^*) - \sum_{j \in J} h_j(w^*)(y_j - y_j^*) \geq 0 \quad \forall\, w \in W. \tag{3}$$

Таким образом, при решении задачи (3) требуется найти общие объемы покупок/продаж $w^* \in W$ и равновесную цену $p^* \geq 0$. Заметим, что в данной модели ничего не говорится о том, между какими конкретными продавцами и покупателями будут осуществляться сделки, поскольку все взаимосвязи здесь равноправны: для продавцов нет различия между покупателями и для покупателей не различаются продавцы. Поэтому на основе равновесной точки w^* можно сформировать множество разнообразных планов поставок любым из многочисленных способов. А что делать в том случае, когда у участников рынка имеются какие-то предпочтения по выбору партнеров?

1. Модель рыночного равновесия с ценовыми группами

Будем считать, что для учета своих предпочтений каждый продавец $i \in I$ разбивает множество покупателей на m_i непересекающихся групп. Обозначим эти группы через M_{is}, $s = 1, \ldots, m_i$. Для каждой группы каждого продавца введем ценовую функцию $\widetilde{g}_{is}$. Аналогично, каждый покупатель $j \in J$ разбивает множество продавцов на n_j непересекающихся групп. Обозначим эти группы через $N_{j\,t}$, $t = 1, \ldots, n_j$. Для каждой группы каждого покупателя введем ценовую функцию $\widetilde{h}_{j\,t}$. Заметим, что каждый продавец i входит в некоторую группу t покупателя j и наоборот, каждый покупатель j входит в некоторую группу s продавца i. Иными словами, для каждого $i \in I$ и каждого $j \in J$ найдется индекс $s \in \{1, \ldots, m_i\}$ такой, что $j \in M_{is}$, и индекс $t \in \{1, \ldots, n_j\}$ такой, что $i \in N_{j\,t}$.

Введем переменные x_{is} – объем поставок i-го продавца в s-й группе покупателей, $s = 1, \ldots, m_i$, $i \in I$ и $y_{j\,t}$ – объем покупок j-го покупателя в t-й группе продавцов, $t = 1, \ldots, n_j$, $j \in J$. Ценовые функции продавцов и покупателей, как и ранее, могут зависеть от всех объемов покупок/продаж.

Вариационное неравенство примет вид: найти точку $w^* \in \widetilde{W}$ такую, что

$$\sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} \widetilde{g}_{is}(w^*)(x_{is} - x_{is}^*) - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} \widetilde{h}_{j\,t}(w^*)(y_{j\,t} - y_{j\,t}^*) \geq 0 \quad \forall\, w \in \widetilde{W}, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{W} = \left\{ w = (x, y) \;\middle|\; \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} x_{is} = \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} y_{j\,t}, \\ x_{is} \geq 0,\ s = 1, \ldots, m_i,\ i \in I, \\ y_{j\,t} \geq 0,\ t = 1, \ldots, n_j,\ j \in J \end{array} \right\}.$$

Данную задачу можно сформулировать и по-другому, если ввести новые переменные z_{ij} – объемы поставок от i-го продавца j-му покупателю, $i \in I,\ j \in J$.

Старые и новые переменные связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{is} &= \sum_{j \in M_{is}} z_{ij}, \quad s = 1, \ldots, m_i, \quad i \in I \\ y_{j\,t} &= \sum_{i \in N_{j\,t}} z_{ij}, \quad t = 1, \ldots, n_j, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{5}$$

Вариационное неравенство примет вид: найти точку $z^* \in Z$ такую, что

$$\sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} g_{is}(z^*) \sum_{j \in M_{is}} (z_{ij} - z_{ij}^*) - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} h_{j\,t}(z^*) \sum_{i \in N_{j\,t}} (z_{ij} - z_{ij}^*) \geq 0 \quad \forall\, z \in Z, \tag{6}$$

где

$$Z = \left\{ z \;\middle|\; z_{ij} \geq 0,\ i \in I,\ j \in J \right\}.$$

Здесь, как и ранее, $g_{is},\ s = 1, \ldots, m_i,\ i \in I$, и $h_{j\,t},\ t = 1, \ldots, n_j,\ j \in J$, означают ценовые функции продавцов и покупателей соответственно.

При решении этой задачи находим объемы покупок/продаж $z_{ij}^*, (i,j) \in I \times J$ и вектора равновесных цен $G(z^*)$ и $H(z^*)$ с размерностями $\sum\limits_{i \in I} m_i$ и $\sum\limits_{j \in J} n_j$ соответственно.

Очевидно, что если положить $\widetilde{g}_{is}(w) = g_{is}(z),\ s = 1, \ldots, m_i,\ i \in I$ и $\widetilde{h}_{j\,t}(w) = h_{j\,t}(z),\ t = 1, \ldots, n_j,\ j \in J,\ w \in W,\ z \in Z$, то любое решение задачи (6) в силу соотношений (5) соответствует решению задачи (4). С другой стороны, каждому решению задачи (4) может соответствовать множество решений задачи (6).

В отличие от исходной задачи (3), где все равновесные цены сводились к одной величине, здесь могут получиться и разные значения.

Матрица поставок $z^* \in Z$ представляет собой точку равновесия задачи (6) тогда и только тогда, когда для каждой пары $(i,j),\ i \in I,\ j \in J$, существует такое число $p_{ij},\ j \in M_{is},\ i \in N_{j\,t}$, что

$$g_{is}(z^*) \begin{cases} \geq p_{ij}^*, & \text{если} \quad z_{ij}^* = 0, \\ = p_{ij}^*, & \text{если} \quad z_{ij}^* > 0 \end{cases} \tag{7}$$

и

$$h_{j\,t}(z^*) \begin{cases} \leq p_{ij}^*, & \text{если} \quad z_{ij}^* = 0, \\ = p_{ij}^*, & \text{если} \quad z_{ij}^* > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Сформулируем условия равновесия (7), (8) более компактно, а также приведем для них формальное доказательство.

Предложение 1. *Матрица поставок $z^* \in Z$ представляет собой точку равновесия задачи (6) тогда и только тогда, когда для всех пар $(i,j) \in I \times J,\ j \in M_{is}$, $i \in N_{j\,t}$, выполняются условия*

$$g_{is}(z^*) - h_{j\,t}(z^*) \begin{cases} \geq 0, & \textit{если} \quad z_{ij}^* = 0, \\ = 0, & \textit{если} \quad z_{ij}^* > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть для некоторой матрицы $z^* \in Z$ условия (9) выполняются. Покажем, что z^* является решением задачи (6). Из условий (9) следует, что

$$(g_{is}(z^*) - h_{j\,t}(z^*)) z_{ij}^* = 0 \quad \forall\, (i,j) \in I \times J, \quad j \in M_{is}, \quad i \in N_{j\,t}, \tag{10}$$

$$(g_{is}(z^*) - h_{j\,t}(z^*))z_{ij} \geq 0 \quad \forall\,(i,j) \in I \times J, \quad j \in M_{is}, \quad i \in N_{j\,t}, \quad \forall\,z \in Z. \qquad (11)$$

Просуммируем неравенства (11) по всем i, j и вычтем из них равенства (10), просуммированные по всем i, j. Получим основное выражение вариационного неравенства (6).

Пусть теперь некоторая матрица $z^* \in Z$ является решением задачи (6). Покажем, что для z^* условия (9) выполняются. Предположим обратное. Пусть найдется такая пара $(k, l) \in I \times J$, $l \in M_{kp}$, $k \in N_{lr}$, что $g_{kp}(z^*) - h_{lr}(z^*) < 0$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и построим матрицу z^ε по следующему правилу:

$$z^\varepsilon_{ij} = \begin{cases} z^*_{ij} + \varepsilon, & \text{если} \quad i = k, \quad j = l, \\ z^*_{ij} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} g_{is}(z^*) \sum_{j \in J} (z^\varepsilon_{ij} - z^*_{ij}) - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} h_{j\,t}(z^*) \sum_{i \in I} (z^\varepsilon_{ij} - z^*_{ij}) = \varepsilon(g_{kp}(z^*) - h_{lr}(z^*)) < 0.$$

Получили противоречие, поэтому для всех $(i, j) \in I \times J$, $j \in M_{is}$, $i \in N_{j\,t}$, выполняется условие $g_{is}(z^*) - h_{j\,t}(z^*) \geq 0$.

Предположим теперь, что найдется такая пара $(k, l) \in I \times J$, $j \in M_{kp}$, $i \in N_{l\,r}$, что $z^*_{kl} > 0$ и $g_{kp}(z^*) - h_{lr}(z^*) > 0$. Выберем произвольное число $\varepsilon < z^*_{kl}$ и построим z^ε по следующему правилу:

$$z^\varepsilon_{ij} = \begin{cases} z^*_{ij} - \varepsilon, & \text{если} \quad i = k, \quad j = l, \\ z^*_{ij} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} g_{is}(z^*) \sum_{j \in J} (z^\varepsilon_{ij} - z^*_{ij}) - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} h_{j\,t}(z^*) \sum_{i \in I} (z^\varepsilon_{ij} - z^*_{ij}) = -\varepsilon(g_{kp}(z^*) - h_{lr}(z^*)) < 0.$$

Получили противоречие, поэтому для всех $(i, j) \in I \times J$, $j \in M_{is}$, $i \in N_{j\,t}$, таких, что $z^*_{ij} > 0$, выполняется равенство $g_{is}(z^*) - h_{j\,t}(z^*) = 0$. Утверждение доказано. $\square$

Следует отметить, что если для продавца какие-то покупатели являются нежелательными, он может назначить для их группы ценовую функцию с неприемлемо большими значениями. Аналогично, покупатель может собрать в группу нежелательных продавцов и связать с ней функцию с неприемлемо маленькими значениями. Таким образом, в одностороннем порядке можно запретить нежелательные взаимосвязи.

Поскольку допустимое множество задачи (6) неограничено, условия непрерывности ценовых функций недостаточно для существования решения. Для доказательства существования решения будем использовать подход из [3] и опираться на общие результаты о существовании решений нелинейных равновесных задач из [5].

Определение 1. Функция $\varphi : R^n \to R$ называется *слабо коэрцитивной* по отношению к множеству $U \in R^n$, если существует такое число γ, что множество $U_\gamma = \{u \in U \mid \varphi(u) \leq \gamma\}$ непусто и ограничено.

Предложение 2 (см. теоремы 1 и 4 из [5]). *Пусть U – непустое выпуклое замкнутое множество в пространстве R^n; $\Phi : U \times U \to R$ – равновесная функция, то есть $\Phi(u,u) = 0$ для всех $u \in U$; $\Phi(\cdot, v)$ полунепрерывна сверху для всех $v \in U$, $\Phi(w, \cdot)$ выпукла для всех $w \in U$. Пусть также существует выпуклая функция $\varphi : R^n \to R$, слабо коэрцитивная по отношению к множеству U, и число ρ такое, что для любой точки $w \in U \setminus U_\rho$ найдется точка $\widetilde{w} \in U$, $\varphi(\widetilde{w}) \le \varphi(w)$ такая, что $\Phi(w, \widetilde{w}) \le 0$. Тогда существует точка $w^* \in W$ такая, что*

$$\Phi(w^*, w) \ge 0 \quad \forall\, w \in W.$$

Будем также использовать условие коэрцитивности следующего вида:

(C1) *Существует число $\rho > 0$ такое, что для любой точки $z \in Z$ и для всех $l \in J$ выполняется следующее условие*

$$\sum_{t=1}^{n_l} y_{l\,t} > \rho \implies \exists\, k \in I, \quad z_{kl} > 0, \quad l \in M_{kp}, \quad k \in N_{lr}, \quad g_{kp}(z) \ge h_{lr}(z).$$

Теорема 1. *Пусть функции g_{is} для всех $s = 1, 2, \ldots, m_i$, $i \in I$, и h_{jt} для всех $t = 1, 2, \ldots, n_j$, $j \in J$, непрерывны. Если выполняется условие* (C1)*, то задача* (6) *имеет решение.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы покажем, что выполняются все условия предложения 2. Определим функцию

$$\varphi(z) = \max_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} y_{j\,t},$$

которая, очевидно, является выпуклой и слабо коэрцитивной по отношению к множеству Z. Обозначим

$$Z_\rho = \{z \in Z \mid \varphi(z) \le \rho\}, \quad \widetilde{J}(z) = \left\{ l \in J \;\middle|\; \varphi(z) = \sum_{t=1}^{n_j} y_{lt} \right\}.$$

Выберем любую точку $z \in Z \setminus Z_\rho$. По построению, для любого индекса $l \in \widetilde{J}(z)$ выполняется неравенство $\varphi(z) = \sum\limits_{t=1}^{n_j} y_{lt} > \rho$. В силу (C1) для каждого $l \in \widetilde{J}(z)$ найдется индекс $k \in I$ такой, что $z_{kl} > 0$, $l \in M_{kp}$, $k \in N_{lr}$, $g_{kp}(z) \ge h_{lr}(z)$. Обозначим множество всех этих пар индексов (k, l) через $\widetilde{C}$. Выберем

$$0 < \varepsilon < \min_{\substack{z_{ij} > 0, \\ (i,j) \in I \times J}} z_{ij}.$$

Построим точку $\widetilde{z}$ по формуле

$$\widetilde{z}_{ij} = \begin{cases} z_{ij} - \varepsilon, & \text{если} \quad (i,j) \in \widetilde{C}, \\ z_{ij} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, $\widetilde{z} \in Z$ и $\varphi(\widetilde{z}) < \varphi(z)$. Далее положим

$$\Phi(z, \widetilde{z}) = \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} g_{is}(z) \sum_{j \in M_{is}} (\widetilde{z}_{ij} - z_{ij}) - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} h_{j\,t}(z) \sum_{i \in N_{j\,t}} (\widetilde{z}_{ij} - z_{ij})$$
$$= (-\varepsilon) \sum_{(k,l) \in \widetilde{C}} [g_{kp(kl)}(z) - h_{lr(kl)}(z)] \le 0.$$

Здесь $p(kl)$ – номер группы продавца k, в которую входит покупатель l, $r(kl)$ – номер группы покупателя l, в которую входит продавец k, для всех $(k,l) \in \widetilde{C}$. Очевидно, что функция $\Phi(\cdot, z)$ полунепрерывна сверху для всех $z \in Z$, $\Phi(z, \cdot)$ выпукла для всех $z \in Z$. Таким образом, все условия предложения 2 выполнены, следовательно, задача (6) имеет решение. Теорема доказана. $\square$

Итак, задача (6) представляет собой обычное вариационное неравенство, но его специфические свойства позволили получить простой и эффективный метод, который будет рассматриваться в следующем разделе.

2. Метод покоординатного спуска

В дальнейшем будем рассматривать такие ценовые функции продавцов g_{is}, которые зависят только от величин x_{is}, то есть от объема продаж продавца $i \in I$ в группе $s = 1, \dots, m_i$, и ценовые функции покупателей $h_{j\,t}$, которые зависят только от величин $y_{j\,t}$, то есть от объема покупок покупателя $j \in J$ в группе $t = 1, \dots, n_j$. Тогда эти функции являются интегрируемыми, и существуют функции

$$\mu_{is}(x_{is}) = \int\limits_0^{x_{is}} g_{is}(\tau)\,d\tau \quad \forall\, i \in I, \quad s = 1, \dots, m_i;$$

$$\sigma_{j\,t}(y_{j\,t}) = \int\limits_0^{y_{j\,t}} h_{j\,t}(\tau)\,d\tau \quad \forall\, j \in J, \quad t = 1, \dots, n_j.$$

В этом случае вариационное неравенство (6) представляет собой условие оптимальности для следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{z \in Z} \longrightarrow \psi(z) = \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{s=1}^{m_i} \mu_{is}(x_{is}) - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{n_j} \sigma_{j\,t}(y_{j\,t}) \right\}. \tag{12}$$

Таким образом, любое решение задачи (12) одновременно является решением задачи (6). Обратное утверждение верно, если, например, отображения G и $-H$ являются монотонными.

Из условий равновесия (9) ясно видно, что при ненулевых объемах сделок z_{ij} в равновесной точке цены продавца и покупателя совпадают: $g_{is}(z) = h_{j\,t}(z)$ для $z_{ij} > 0$, $i \in N_{j\,t}$, $j \in M_{is}$. Таким образом, если мы не достигли равновесного состояния, имеет смысл «выравнивать» отклонения в ценах, изменяя на каждом шаге только одну координату из множества Z. Сформируем правила выбора этой координаты, используя подход из работ [6, 7], где для решения задачи распределения ресурсов с ограничениями типа симплекса был предложен вариант метода *би-координатного* спуска со специальным пороговым управлением и допусками.

Для того чтобы пара индексов $(i,j) \in I \times J$ могла быть использована для спуска по координате z_{ij}, требуется, чтобы разница цены i-го продавца в группе s, в которую входит j-й покупатель и цена j-го покупателя в группе t, в которую входит i-й продавец, была достаточно велика:

$$|g_{is}(x_{is}) - h_{j\,t}(y_{j\,t})| \geq \delta$$

для заданного $\delta > 0$.

Таким образом, если выполняется условие $g_{is}(x_{is}) - h_{j\,t}(y_{j\,t}) \leq -\delta$, то можем увеличивать компоненту z_{ij}; а если выполняется условие $g_{is}(x_{is}) - h_{j\,t}(y_{j\,t}) \geq \delta$, то для корректного уменьшения этой компоненты требуется также выполнение условия $z_{ij} > \varepsilon$ при некотором заданном $\varepsilon > 0$.

Для выбора длины шага можно использовать, например, неточный линейный поиск типа Армихо.

Обозначим $C = \{(i,j) \mid i \in I,\ j \in J\}$, $C_\varepsilon(z) = \{(i,j) \mid z_{ij} \ge \varepsilon, i \in I,\ j \in J\}$.

Метод 1

Шаг 0. Выберем критерий останова, начальную точку $z^0 \in Z$, последовательности $\{\varepsilon_k\} \searrow 0$, $\{\delta_k\} \searrow 0$, $k = 1, 2, \dots$, параметры $\beta \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$. Положим $k = 1$.

Шаг 1. Положим $l = 0$, $u^l = z^{k-1}$. Обозначим, как и ранее, $x^l_{is} = \sum\limits_{j \in M_{is}} u^l_{ij}$, $s = 1, \dots, m_i$, $i \in I$ и $y^l_{j\,t} = \sum\limits_{i \in N_{j\,t}} u^l_{ij}$, $t = 1, \dots, n_j$, $j \in J$.

Шаг 2. Если для точки u^l выполнен критерий останова, то мы достигли заданной точности вычислений, итерационный процесс останавливается.

Шаг 3. Выберем пару индексов (i_l, j_l) таких, что либо

$$g_{i_l s}(x^l_{i_l s}) - h_{j_l t}(y^l_{j_l t}) \ge \delta_k, \quad (i_l, j_l) \in C_{\varepsilon_k}(u^l), \quad i_l \in N_{j_l t}, \quad j_l \in M_{i_l s}$$

(тогда положим $K^-_l = \{(i_l, j_l)\}$), либо

$$g_{i_l s}(x^l_{i_l s}) - h_{j_l t}(y^l_{j_l t}) \le -\delta_k, \quad (i_l, j_l) \in C, \quad i_l \in N_{j_l t}, \quad j_l \in M_{i_l s}$$

(тогда положим $K^+_l = \{(i_l, j_l)\}$). Если такие индексы выбрать невозможно, то положим $z^k = u^l$, $k = k + 1$, и перейдем к шагу 1.

Шаг 4. Построим направление спуска $d^{\,l}$ с компонентами

$$d^l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad (i,j) \in K^-_l, \\ 1, & \text{если} \quad (i,j) \in K^+_l, \\ 0, & \text{если} \quad (i,j) \in C \setminus \{K^-_l \bigcup K^+_l\}. \end{cases}$$

Заметим, что только одна компонента в направлении спуска является ненулевой.

Шаг 5. Найдем наименьшее неотрицательное целое число b такое, что выполняется условие

$$\psi(u^l + \theta^b \varepsilon_k d^l) - \psi(u^l) \le \beta \theta^b \varepsilon_k \langle \psi'(u^l), d^{\,l} \rangle\,. \tag{13}$$

Положим $\lambda_l = \theta^b \varepsilon_k$, $u^{l+1} = u^l + \lambda_l d^l$. Положим $l = l + 1$ и перейдем к шагу 2.

Предложенный метод имеет двухуровневую схему. Во внутреннем процессе (шаги 2–5) происходит минимизация целевой функции при фиксированных значениях параметров ε и δ, а на внешнем уровне – уменьшение этих параметров.

Установим свойства сходимости предложенного метода, опираясь на результаты из [6, 7].

Предложение 3. *Процедура линейного поиска на шаге* 5 *метода* 1 *конечна.*

Доказательство. Предположим, что процедура линейного поиска на шаге 5 метода 1 бесконечна. Тогда для всех $b \ge 0$ имеем

$$\psi(u^l + \theta^b \varepsilon_k d^l) - \psi(u^l) > \beta \theta^b \varepsilon_k \langle \psi'(u^l), d^l \rangle. \tag{14}$$

Обозначим $\gamma_l = \langle \psi'(u^l), d^l \rangle$, тогда получим

$$\gamma_l = g_{is}(x^l_{is}) - h_{j\,t}(y^l_{j\,t}) \le -\delta_k < 0, \quad (i,j) \in K^-_l \cup K^+_l, \quad i \in N_{j\,t}, \quad j \in M_{is}.$$

Переходя в (14) к пределу при $b \to \infty$, имеем $\gamma_l \ge \beta \gamma_l$, то есть $\gamma_l \ge 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Предложение 4. *Пусть функция* ψ *коэрцитивна на* Z [8]. *Тогда внутренний процесс* (*шаги* 2–5) *метода 1 является конечным.*

Доказательство. По построению имеем

$$-\infty < \psi^* \le \psi(u^l), \quad \psi(u^{l+1}) \le \psi(u^l) - \beta\delta_k\lambda_l,$$

следовательно, итерационная последовательность $\{u_l\}$ ограничена и имеет предельные точки. Кроме того, $\lim\limits_{l\to\infty}\lambda_l = 0$. Предположим, что последовательность $\{u_l\}$ бесконечна. Поскольку множество индексов $C = I \times J$ конечно, найдется такое его подмножество $\bar{K}^-$ или $\bar{K}^+$, которое выбирается на шаге 3 бесконечное множество раз. Возьмем соответствующую этим итерациям подпоследовательность, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{u^{l_s}\}$, предел которой обозначим через $\bar{u}$. Имеем при этом $d^{l_s} = \bar{d}$, где

$$\bar{d}_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad (i,j) \in \bar{K}^-, \\ 1, & \text{если} \quad (i,j) \in \bar{K}^+, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда получим $\langle\psi'(\bar{u}), \bar{d}\rangle = \lim\limits_{s\to\infty}\langle\psi'(u^{l_s}), \bar{d}\rangle \le -\delta_k < 0$. Однако условие Армихо (13) не выполняется для шага $\theta^{b-1}\varepsilon_k = \lambda_l/\theta$. Положим $l = l_s$, получим

$$(\lambda_{l_s}/\theta)^{-1}(\psi(u^{l_s} + (\lambda_{l_s}/\theta)\bar{d}) - \psi(u^{l_s})) > \beta\langle\psi'(u^{l_s}), \bar{d}\rangle.$$

Устремим s к бесконечности. Тогда имеем

$$\langle\psi'(\bar{u}), \bar{d}\rangle = \lim_{s\to\infty}(\lambda_{l_s}/\theta)^{-1}(\psi(u^{l_s} + (\lambda_{l_s}/\theta)\bar{d}) - \psi(u^{l_s})) \ge \beta\langle\psi'(\bar{u}), \bar{d}\rangle,$$

отсюда следует $(1-\beta)\langle\psi'(\bar{u}), \bar{d}\rangle \ge 0$. Получили противоречие, которое завершает доказательство. □

Теорема 2. *Пусть функция* ψ *коэрцитивна на* Z. *Тогда последовательность* $\{z^k\}$, *генерируемая методом* 1, *имеет предельные точки, все они являются решениями вариационного неравенства* (6). *Если, кроме того, функция* ψ *выпукла, они являются также решениями задачи оптимизации* (12).

Доказательство. Как и в предложении 4, отметим, что последовательность $\{z^k\}$ ограничена и имеет предельные точки. Кроме этого, $\psi(z^{k+1}) \le \psi(z^k)$, поэтому существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\psi(z^k) = \bar{\psi}$. Возьмем любую предельную точку $\bar{z}$ последовательности $\{z^k\}$, обозначим через $\{z^{k_l}\}$ подпоследовательность, сходящуюся к этой точке. Далее, по построению для всех $k > 0$ выполняется условие

$$g_{is}(x^k_{is}) - h_{j\,t}(y^k_{j\,t}) > -\delta_k \quad \forall\,(i,j) \in I \times J, \quad i \in N_{j\,t}, \quad j \in M_{is}.$$

Перейдем к пределу при $k = k_l \to \infty$, получим

$$g_{is}(\bar{x}_{is}) \ge h_{j\,t}(\bar{y}_{j\,t}) \quad \forall\,(i,j) \in I \times J, \quad i \in N_{j\,t}, \quad j \in M_{is}, \tag{15}$$

где

$$\bar{x}_{is} = \sum_{j\in M_{is}} \bar{z}_{ij}, \quad s = 1,\dots,m_,; \quad i \in I,$$

$$\bar{y}_{j\,t} = \sum_{i\in N_{j\,t}} \bar{z}_{ij}, \quad t = 1,\dots,n_j, \quad j \in J.$$

С другой стороны, по построению для всех $k > 0$ выполняются неравенства

$$g_{is}(x^k_{is}) - h_{j\,t}(y^k_{j\,t}) < \delta_k \quad \forall\,(i,j) \in C_{\varepsilon_k}(z^k), \quad i \in N_{j\,t}, \quad j \in M_{is},$$

Пусть $(i,j) \in I \times J$ – произвольные индексы такие, что $\bar{z}_{ij} > 0$, $i \in N_{jt}$, $j \in M_{is}$. Тогда выполняются условия $z^{k_l}_{ij} \geq \varepsilon_{k_l}$ для достаточно больших значений l. Отсюда $g_{is}(x^{k_l}_{is}) - h_{j\,t}(y^{k_l}_{j\,t}) < \delta_{k_l}$. Перейдем к пределу при $s \to \infty$, получим $g_{is}(\bar{x}_{is}) \leq h_{j\,t}(\bar{y}_{j\,t})$. Поэтому в силу (15) для любых $\bar{z}_{ij} > 0$, $(i,j) \in I \times J$, $i \in N_{jt}$, $j \in M_{is}$, получим

$$g_{is}(\bar{x}_{is}) = h_{j\,t}(\bar{y}_{jt}). \tag{16}$$

Таким образом, из (15), (16) следует, что точка $\bar{z}$ удовлетворяет условиям равновесия (9) и является решением вариационного неравенства (6), а если функция ψ выпукла, то и задачи (12). Теорема доказана. $\square$

3. Тестовые расчеты

Приведем результаты расчетов для предложенного в предыдущем разделе метода покоординатного спуска. В следующем примере количество и продавцов, и покупателей равно 5. Разбиение продавцов и покупателей на ценовые группы задано следующим образом: $M_{1,1} = \{1,2,3\}$, $M_{1,2} = \{4,5\}$, $M_{2,1} = \{1,2\}$, $M_{2,2} = \{3,4,5\}$, $M_{3,1} = \{1,2,3\}$, $M_{3,2} = \{4,5\}$, $M_{4,1} = \{1,2\}$, $M_{4,2} = \{3,4,5\}$, $M_{5,1} = \{1,2,3\}$, $M_{5,2} = \{4,5\}$, $N_{1,1} = \{1,2,3\}$, $N_{1,2} = \{4,5\}$, $N_{2,1} = \{1,2\}$, $N_{2,3} = \{3,4,5\}$, $N_{3,1} = \{1,2,3\}$, $N_{3,2} = \{4,5\}$, $N_{4,1} = \{1,2\}$, $N_{4,2} = \{3,4,5\}$, $N_{5,1} = \{1,2,3\}$, $N_{5,2} = \{4,5\}$.

Пусть ценовые функции продавцов имеют вид

$$g_{i1}(x_{i1}) = 10 + 2ix_{i1}, \quad g_{i2}(x_{i2}) = 5 + 2ix_{i2} \quad \forall\, i \in I;$$

ценовые функции покупателей имеют вид

$$h_{j1}(y_{j1}) = 100 - 0.5jy_{j1}, \quad h_{j2}(y_{j2}) = 90 - 0.5jy_{j2} \quad \forall\, j \in J.$$

Правила формирования коэффициентов метода: $\delta_1 = 100$, $\delta_{k+1} = \delta_k/2$, $\varepsilon_1 = 100$, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/2$, $\beta = 0.5$, $\theta = 0.5$. Критерий останова $\delta_k < 0.01$.

Приведены достигнутые величины для матриц z, x, y, $G(x)$, $H(y)$. Результаты округлены до двух знаков после запятой.

Пример 1.

$$\mathbf{x}: \begin{pmatrix} 35.59 & 30.53 \\ 17.8 & 17.27 \\ 11.86 & 10.62 \\ 8.99 & 8.95 \\ 7.19 & 6.8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}: \begin{pmatrix} 21.84 & 13.75 & 0 & 16.96 & 13.57 \\ 12.73 & 5.07 & 17.27 & 0 & 0 \\ 3.05 & 8.81 & 0 & 10.62 & 0 \\ 8.99 & 0 & 8.95 & 0 & 0 \\ 7.19 & 0 & 0 & 0 & 6.8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G(x)}: \begin{pmatrix} 81.19 & 66.07 \\ 81.19 & 74.09 \\ 81.19 & 68.75 \\ 81.91 & 76.58 \\ 81.91 & 73 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H(y)^T}: \begin{pmatrix} 81.19 & 81.19 & 74.09 & 66.07 & 66.07 \\ 81.91 & 81.19 & 76.58 & 68.75 & 73 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y^T}: \begin{pmatrix} 37.62 & 18.82 & 17.27 & 16.96 & 13.57 \\ 16.18 & 8.81 & 8.95 & 10.62 & 6.8 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Предположим, продавец с номером 1 не хочет взаимодействовать с группой 1, а покупатель с номером 3 – с группой 2. Они назначают неприемлемые для партнеров ценовые функции $g_{11}(x_{11}) = 1000$, $h_{32}(y_{32}) = 0.001$. В результате получим

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{x}: & \mathbf{z}: & \mathbf{G}(\mathbf{x}): \\
\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 30.09 \\ 19.75 & 17.27 \\ 13.17 & 10.03 \\ 9.3 & 7.52 \\ 7.45 & 6.02 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 17.41 & 12.68 \\ 8.78 & 10.97 & 17.27 & 0 & 0 \\ 13.17 & 0 & 0 & 8.79 & 1.24 \\ 4.85 & 4.45 & \mathbf{0} & 1.11 & 6.41 \\ 6.32 & 1.13 & \mathbf{0} & 2.5 & 3.52 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} 1000 & 65.19 \\ 89.02 & 74.09 \\ 89.02 & 65.19 \\ 84.42 & 65.19 \\ 84.42 & 65.19 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{H}(\mathbf{y})^{\mathbf{T}}: & \begin{pmatrix} 89.02 & 89.02 & 74.09 & 65.19 & 65.19 \\ 84.42 & 84.42 & 0 & 65.19 & 65.19 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}^{\mathbf{T}}: & \begin{pmatrix} 21.95 & 10.97 & 17.27 & 17.41 & 13.92 \\ 11.17 & 5.58 & \mathbf{0} & 12.41 & 9.93 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Получили нулевые объемы сделок между продавцом с номером 1 и его группой покупателей 1, а также между покупателем с номером 3 и его группой продавцов 2. Эти нули выделены жирным начертанием.

Следует отметить, что предложенный метод покоординатного спуска (МПС) для задачи рыночного равновесия с ценовыми группами является не только простым, но и эффективным. Было проведено численное сравнение с методом проекции градиента (МПГ), в котором итерационный шаг также находится методом неточного линейного поиска типа Армихо [9].

Обозначим через M число продавцов, через N число покупателей, через K число групп. Ценовые функции продавцов имеют вид

$$g_{ik}(x_{ik}) = \bar{g}_{ik} + 2ix_{ik}/K, \quad i \in I,$$

где $\bar{g}_{ik}$ – псевдослучайные числа из интервала $[10, 20]$. Ценовые функции покупателей имеют вид

$$h_{jk}(y_{jk}) = \bar{h}_{jk} - 0.5jy_{jk}/K, \quad j \in J,$$

где $\bar{h}_{jk}$ – псевдослучайные числа из интервала $[70,\ 100]$.

Коэффициенты метода покоординатного спуска следующие: $\delta_1 = 10$, $\delta_{k+1} = \delta_k/2$, $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k/2$. Параметры процедуры Армихо $\beta = 0.5$, $\theta = 0.5$. Критерий останова для МПС $\delta_k < 0.01$, а МПГ использует для останова то же условие, то есть он останавливается, если максимум из величин $|g_{is}(x_{is}) - h_{j\,t}(y_{j\,t})|$ таких, что $z_{ij} > 0.01$, $(i,j) \in I \times J$, $i \in N_{j\,t}$, $j \in M_{is}$ становится меньше 0.01.

Результаты решения задач разных размерностей приведены в табл. 1, в которой содержатся данные о количестве итераций и время в секундах для обоих методов. Отметим, что для метода покоординатного спуска приведено количество итераций внутреннего процесса (шаги 2–5), где на каждой итерации используется только *одна* координата пространства задачи. В то же время каждая итерация метода проекции градиента использует *все* координаты пространства и является существенно более трудоемкой. (Для сравнения методов можно умножить количество итераций метода проекции градиента на размерность пространства.)

Программа написана на языке Visual C#, тестировалась на компьютере Intel i3-4170 CPU, 3.7 GHz, 4 Gb, под ОС Windows 7.

Таким образом, предварительные результаты тестовых расчетов показывают, что предложенный в статье метод покоординатного спуска для задачи рыночного равновесия с ценовыми группами имеет преимущества по сравнению с методом проекции градиента и является перспективным для дальнейшего изучения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00109а).

Табл. 1

Количество итераций и время (в секундах) для задач разной размерности

M	N	K	МПС		МПГ	
			итерации	время, с	итерации	время, с
10	10	2	3178	0.004	829	0.06
10	10	3	2485	0.005	214	0.036
10	10	5	2185	0.002	151	0.022
20	20	2	3368	0.005	305	0.081
20	20	5	20464	0.019	558	0.110
20	20	10	8087	0.008	396	0.102
20	20	15	7598	0.006	426	0.080
50	50	5	69148	0.131	3626	4.736
50	50	10	109994	0.173	1472	1.426
50	50	20	61102	0.075	658	0.590
50	50	25	59057	0.060	628	0.562
100	100	10	224292	0.553	6368	31.510
100	100	20	363402	0.678	2077	7.966
100	100	25	332623	0.586	2399	9.278
100	100	40	234377	0.337	1118	3.982
100	100	50	212474	0.273	1096	4.091

Литература

1. *Konnov I.V.* On variational inequalities for auction market problems // Optim. Lett. – 2007. – V. 1, No 2. – P. 155–162. – doi: 10.1007/s11590-006-0004-7.

2. *Коннов И.В.* Задачи пространственного равновесия для систем аукционного типа // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 1. – С. 33–47.

3. *Konnov I.V.* On auction equilibrium models with network applications // Netnomics. – 2015. – V. 16, No 1. – P. 107–125. doi: 10.1007/s11066-015-9095-6.

4. *Konnov I.V.* An alternative economic equilibrium model with different implementation mechanisms // Adv. Model. Optim. – 2015. – V. 17, No 2. – P. 245–265. – doi: 10.2139/ssrn.2665719.

5. *Konnov I.V., Dyabilkin D.A.* Nonmonotone equilibrium problems: Coercivity conditions and weak regularization // J. Global Optim. – 2011. – V. 49, No 4. – P. 575–587. – doi: 10.1007/s10898-010-9551-7.

6. *Konnov I.V.* Selective bi-coordinate variations for resource allocation type problems // Comput. Optim. Appl. – 2016. – V. 64, No 3. – P. 821–842. – doi: 10.1007/s10589-016-9824-2.

7. *Коннов И.В.* Метод би-координатных вариаций с допусками и его сходимость // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 1. – С. 80–85.

8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

9. *Armijo L.* Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives // Pac. J. Math. – 1966. – V. 16, No 1. – P. 1–3. – doi: 10.2140/pjm.1966.16.1.

Поступила в редакцию
27.02.18

Пинягина Ольга Владиславовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных и исследования операций

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Olga.Piniaguina@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 718–730

A Coordinate Descent Method for Market Equilibrium Problems with Price Groups

O.V. Pinyagina

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *Olga.Piniaguina@kpfu.ru*

Received February 27, 2018

Abstract

In the present paper, a model of market equilibrium with price groups in the form of variational inequality for a single-product market of an infinitely divisible product has been considered. Unlike the classical model, in which all market participants are equal and a single equilibrium price is found, it is assumed in this paper that each seller or buyer can split the set of his/her counterparties into non-overlapping groups and assign a certain price function to each group. For this model, the equilibrium conditions have been formulated and proved. The conditions for the existence of a solution to the problem, based on the coercivity property, have been also proposed and justified.

For the model of market equilibrium with price groups, in which the price functions of each seller/buyer for each group depend only on the volume of purchases/sales of this seller/buyer in this group, a method of coordinate descent for finding equilibrium states has been proposed and its convergence has been proved. A series of test calculations have been carried out for problems of different dimension, a comparison of the coordinate descent method with the gradient projection method has been performed, which confirms the efficiency of the proposed method and its promising for further investigation.

Keywords: market equilibrium, price groups, coordinate descent method

Acknowledgments. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-01-00109a.

References

1. Konnov I.V. On variational inequalities for auction market problems. *Optim. Lett.*, 2007, vol. 1, no. 2, pp. 155–162. doi: 10.1007/s11590-006-0004-7.
2. Konnov I.V. Spatial equilibrium problems for auction-type systems. *Russ. Math.*, 2008, vol. 52, no. 1, pp. 30–44. doi: 10.1007/s11982-008-1005-x.
3. Konnov I.V. On auction equilibrium models with network applications. *Netnomics*, vol. 16, no. 1, pp. 107–125. doi: 10.1007/s11066-015-9095-6.

4. Konnov I.V. An alternative economic equilibrium model with different implementation mechanisms. *Adv. Model. Optim.*, 2015, vol. 17, no. 2, pp. 245–265. doi: 10.2139/ssrn.2665719.

5. Konnov I.V., Dyabilkin D.A. Nonmonotone equilibrium problems: Coercivity conditions and weak regularization. *J. Global Optim.*, 2011, vol. 49, no. 4, pp. 575–587. doi: 10.1007/s10898-010-9551-7.

6. Konnov I.V. Selective bi-coordinate variations for resource allocation type problems. *Comput. Optim. Appl.*, 2016, vol. 64, no. 3, pp. 821–842. doi: 10.1007/s10589-016-9824-2.

7. Konnov I.V. A method of bi-coordinate variations with tolerances and its convergence. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 68–72. doi: 10.3103/S1066369X16010084.

8. Ekeland I., Temam R. *Analyse convexe et problemes variationnels*. Paris, Dunod-Gauthier-Villars, 1974. 340 p. (In French)

9. Armijo L. Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives. *Pac. J. Math.*, 1966, vol. 16, no. 1, pp. 1–3. doi: 10.2140/pjm.1966.16.1.

***Для цитирования*:** *Пинягина О.В.* Метод покоординатного спуска для задачи рыночного равновесия с ценовыми группами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 718–730.

***For citation*:** Pinyagina O.V. A coordinate descent method for market equilibrium problems with price groups. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 718–730. (In Russian)