УДК 519.68

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

М.М. Карчевский, Р.Р. Шагидуллин

Аннотация

Приведены условия разрешимости разнообразных граничных задач для для эллиптических систем уравнений второго порядка дивергентного вида. Для неклассических задач о жестком контакте и о нормальной нагрузке подробно исследовано влияние формы области на их разрешимость. Особое внимание уделено системам уравнений типа стационарных уравнений линейной теории упругости и теории пьезоэлектриков.

Ключевые слова: эллиптические системы дифференциальных уравнений, дивергентная форма, условия коэрцитивности, краевая задача, условия разрешимости.

Введение

В предлагаемой работе описаны постановки разнообразных граничных задач для эллиптических систем уравнений второго порядка дивергентного вида. Указаны достаточные условия коэрцитивности соответствующих дифференциальных операторов и условия однозначной разрешимости краевых задач. Особое внимание уделено нестандартным задачам (см. п. 4.4), в которых сочетаются главные и естественные граничные условия. Описано влияние формы границы области на корректность постановок таких задач.

1. Постановка задачи. Основные результаты о разрешимости

Рассматривается система уравнений

$$-\operatorname{div}(A\nabla u + Bu) + C\nabla u + Du = f - \operatorname{div} F, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, – ограниченная область, $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^s$, $s \geq 1$, – вектор-функция (искомое решение), $\nabla u = \{\partial u_i/\partial x_j\}_{i=1,j=1}^{s,n} \in M_{s,n}$ – матрица Якоби[1)], A – линейный оператор, действующий в пространстве $M_{s,n}$, матрице $U(x) = \{u_{ij}(x)\}_{i=1,j=1}^{s,n}$ ставится в соответствие вектор $\operatorname{div} U(x)$ с компонентами

$$(\operatorname{div} U(x))_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_{ij}(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

B – линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^s$ в $M_{s,n}$, C – линейный оператор, действующий из $M_{s,n}$ в $\mathbb{R}^s$, D – линейный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^s$.

[1)] Как обычно, $M_{s,n}$ – линейное пространство прямоугольных матриц, s – количество строк, n – количество столбцов.

Операторы A, B, C, D предполагаются заданными функциями $x \in \Omega$; функции $f = f(x) \in \mathbb{R}^s$, $F = F(x) \in M_{s,n}$ заданы. Всюду в дальнейшем предполагается, что область Ω, как минимум, липшицева.

Уравнению (1), как обычно, поставим в соответствие интегральное тождество

$$a(u,\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} ((A\nabla u + Bu) \cdot \nabla\eta + C\nabla u \cdot \eta + Du \cdot \eta)\, dx + \int\limits_{\Gamma} Gu \cdot \eta\, dx =$$
$$= l(\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)\, dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta\, dx. \quad (2)$$

Здесь $G = G(x)$, $g = g(x)$ – заданные оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^s$, и вектор из $\mathbb{R}^s$, $x \in \Gamma$, Γ – граница области Ω; символ «$\cdot$» обозначает стандартное скалярное произведение в пространстве прямоугольных матриц.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что A, B, C, $D \in L_\infty(\Omega)$, $G \in L_\infty(\Gamma)$, f, $F \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Gamma)$. Это означает, что каждая компонента соответствующего вектора или тензора принадлежит соответствующему функциональному пространству. Будем использовать также следующие обозначения $H_1 = [W_2^1(\Omega)]^s$, $H_{1,0} = [\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)]^s$.

Лемма 1. *Пусть существует положительная постоянная c_0 такая, что*[2)]

$$\int\limits_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla u + c_0 u \cdot u)\, dx \geq \|u\|_1^2 \quad \forall\, u \in H_1. \quad (3)$$

Тогда задача: найти функцию $u \in H_1$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$a(u,\eta) = l(\eta) \quad \forall\, \eta \in H_1, \quad (4)$$

эквивалентна уравнению

$$u + \mathcal{T} u = \varphi, \quad (5)$$

где φ – заданный элемент из H_1, $\mathcal{T} : H_1 \to H_1$ – линейный вполне непрерывный оператор.

Доказательство. Задача (4) эквивалентна уравнению

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 u + \mathcal{T}_0 u = \varphi_0, \quad (6)$$

где операторы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{T}_0 : H_1 \to H_1$ и $\varphi_0 \in H_1$ определены тождествами

$$(\mathcal{A}_0 u, \eta)_1 = \int\limits_{\Omega} (A\nabla\eta \cdot \nabla\eta + c_0 u \cdot \eta)\, dx \quad \forall\, u, \eta \in H_1, \quad (7)$$

$$(\mathcal{T}_0 u, \eta)_1 = \int\limits_{\Omega} (Bu \cdot \nabla\eta + C\nabla u \cdot \eta + Du \cdot \eta - c_0 u \cdot \eta)\, dx + \int\limits_{\Gamma} Gu \cdot \eta\, dx \quad \forall\, u, \eta \in H_1, \quad (8)$$

$$(\varphi_0, \eta)_1 = l(\eta) \quad \forall \eta \in H_1. \quad (9)$$

Теперь достаточно заметить, что оператор $\mathcal{A}_0$ ограничен, вследствие (3) положительно определен и, значит, по лемме Лакса–Мильграма имеет ограниченный обратный, а оператор $\mathcal{T}_0$ линеен и вполне непрерывен. Последний факт обосновывается так же, как, например, в [1, с. 97]. □

[2)] Оператор A, удовлетворяющий условию (3), будем называть коэрцитивным на H_1.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда задача* (4) *имеет единственное решение при любых* $f \in L_2(\Omega)$, $F \in L_2(\Omega)$, *если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.*

Следствие 2. *Пусть* V – *подпространство пространства* H_1. *Задача* (6) *имеет единственное решение* $u \in V$ *при любом* $\varphi_0 \in V$, *если выполнено неравенство* (3) *для всех* $u \in V$, $\mathcal{A}_0 + \mathcal{T}_0 : V \to V$ *и соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение из* V.

2. Достаточные условия коэрцитивности оператора A

Приведем некоторые известные достаточные условия коэрцитивности оператора A.

1. Оператор A, очевидно, коэрцитивен, если он удовлетворяет условию Лежандра, то есть если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$A(x)T \cdot T \geq cT \cdot T \quad \forall T \in M_{s,n}, \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

2. Говорят, что оператор A удовлетворяет условию Лежандра–Адамара, если неравенство (10) выполнено для любой матрицы $T \in M_{s,n}$ ранга один. Известно (см, например, [2, с. 195]), что условие Лежандра не следует, вообще говоря, из условия Лежандра–Адамара. Если выполнено условие Лежандра–Адамара, то оператор A коэрцитивен на $H_{1,0}$. Если при этом A не зависит от x, то выполнено более сильное неравенство

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq c|u|_1^2 \quad \forall\, u \in H_{1,0}, \quad c = \text{const} > 0, \tag{11}$$

причем c не зависит от Ω (см., например, [2, с. 195]).

Отметим, что при $s = 1$ условия Лежандра и Лежандра–Адамара, очевидно, совпадают и превращаются в условие равномерной по x положительной определенности матрицы A.

3. Условие алгебраической комплектности (см. [3, с. 185], [4], [5, с. 158], [6]). Оператор A удовлетворяет условию алгебраической комплектности, если

$$A(x)T \cdot T \geq \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1,k=1}^{n,s} \alpha_{ijk}(x) t_{jk} \right|^2 \quad \forall\, T \in M_{n,s}, \tag{12}$$

где $\alpha_{ijk}(x)$, $i = 1, 2, \ldots N$, $j = 1, 2, \ldots n$, $k = 1, 2, \ldots s$, – функции, непрерывные на $\overline{\Omega}$, а ранг матрицы

$$Z = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ijk}(x) z_j \right\}_{i=1,\, k=1}^{N,s} \tag{13}$$

при любом $x \in \overline{\Omega}$ и любом комплексном $z = z_1 z_2 \cdots z_n \neq 0$ равен s.

Мы опираемся здесь на определение коэрцитивности нормы в соболевских пространствах, данное в [4], которое приводит к более общим, чем в [3, 6], достаточным условиям коэрцитивности оператора A.

Из результатов [5, с. 158] непосредственно вытекает

Теорема 1. *Если оператор* A *алгебраически комплектен,то он коэрцитивен на* H_1.

Очевидно, что если выполнено условие Лежандра, то оператор A алгебраически комплектен.

Важным примером оператора, удовлетворяющего условию алгебраической комплектности, является оператор, возникающий в линейной теории упругости (см., например, [7, с. 75], [8, с. 109]). В этом случае $s = n$, $A(x)T = L(x)T_0$, где $T_0 = (T + T^T)/2$ – симметричная часть матрицы T, L – линейный равномерно положительно определенный оператор на пространстве симметричных матриц, то есть $(L(x)T)^T = L(x)T$, $L(x)T \cdot T \geq c_0 T \cdot T$ для любой симметричной матрицы $T \in M_{n,n}$ и для любого $x \in \overline{\Omega}$, $c_0 = \text{const} > 0$. Отсюда, очевидно, следует, что для любой матрицы $T \in M_{n,n}$ справедливо неравенство $A(x)T \cdot T \geq c_0 T_0 \cdot T_0$. Матрицу Z в этом случае можно представить как матрицу порядка $n(n+1)/2 \times n$ и записать в блочном виде [3, с. 185], [6]

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} \\ Z_{21} \end{pmatrix},$$

где $Z_{11} = \operatorname{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n)$, а каждая строка матрицы Z_{12} содержит ровно два ненулевых элемента z_i и z_j, $i \neq j$. Очевидно, $\operatorname{rank}(Z) = n$, то есть оператор A коэрцитивен. Неравенство коэрцитивности (3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\varepsilon_{ij}^2(u) + u \cdot u)\, dx \geq c\|u\|_1^2 \quad \forall\, u \in H_1, \quad c > 0, \tag{14}$$

где $\varepsilon_{ij}(u) = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Это неравенство хорошо известно в математической теории упругости как второе неравенство Корна. Различные его доказательства (не опирающиеся на свойство алгебраической комплектности) можно найти, например, в [8, с. 110], [9].

В случае пространства $H_{1,0}$ неравенство (14) допускает существенное улучшение

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}^2(u)\, dx \geq (1/2)|u|_1^2 \quad \forall\, u \in H_{1,0}. \tag{15}$$

Это так называемое первое неравенство Корна (см., например, [9]). Отметим, что, в отличие от доказательства неравенства (14), доказательство неравенства (15) элементарно и опирается на непосредственное применение формулы интегрирования по частям.

Возможно сочетание различных условий коэрцитивности. В качестве соответствующего примера приведем седловой оператор, возникающий в теории пьезоэлектриков [6, 10]. В этом случае $s = n{+}1$. Положим $T = (T_{11}, T_{12})$, где $T_{11} \in M_{n,n}$. Тогда оператор A записывается в соответствующем блочном виде

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ -A_{12}^T(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Предполагается при этом, что $A_{11}(x)$ – оператор линейной теории упругости, $A_{22}(x)$ – равномерно по $x \in \Omega$ положительно определенная матрица. Нетрудно видеть, что

$$A(x)T \cdot T \geq c(T_{11,0} \cdot T_{11,0} + T_{12} \cdot T_{12}) \quad \forall\, x \in \Omega,\ c > 0, \tag{17}$$

где $T_{11,0}$ – симметричная часть матрицы T_{11}. Из (14), (17), очевидно следует коэрцититвность оператора A.

3. Неравенства типа Фридрихса

Если оператор A неотрицателен, то $|u|_a = \left(\int\limits_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx \right)^{1/2}$ есть полунорма на пространстве H_1. Ядро этой полунормы будем обозначать через $\mathcal{R}_a$.

Лемма 2. *Пусть оператор A неотрицателен и коэрцитивен на H_1, V – подпространство пространства H_1 такое, что $\mathcal{R}_a \bigcap V = \{0\}$. Тогда существует положительная постоянная c такая, что*

$$\|u\|_0 \le c|u|_a \quad \forall\, u \in V. \tag{18}$$

В некоторых случая более удобной оказывается аналогичная

Лемма 3. *Пусть оператор A неотрицателен и коэрцитивен на H_1, F – неотрицательный положительно однородный слабо полунепрерывный снизу функционал на H_1. Пусть, далее, из равенства $|u|_a^2 + F^2(u) = 0$ следует, что $u = 0$. Тогда существует положительная постоянная c такая, что*

$$\|u\|_0^2 \le c(|u|_a^2 + F^2(u)) \quad \forall\, u \in H_1. \tag{19}$$

Доказательства этих лемм практически дословно совпадают с доказательством леммы Соболева об эквивалентных нормировках (см., например, [11, с. 444], [6, лемма 1]).

Применение лемм 2, 3 связано с вычислением ядра $\mathcal{R}_a$.

Приведем соответствующие примеры.

1. Если оператор A удовлетворяет условию Лежандра, то $\mathcal{R}_a$ состоит из вектор-функций, тождественно постоянных на Ω.

2. Если A – оператор теории упругости, то, как хорошо известно (см., например, [9]), $\mathcal{R}_a$ состоит из функций u, вычисляемых по формуле $u(x) = c + Wx$, $x \in \Omega$ где $c = \mathrm{const}$, W – постоянная кососимметричная матрица. Нетрудно убедиться (см., например, [9]), что множество точек, удовлетворяющих уравнению $c + Wx = 0$ есть гиперплоскость размерности $n-2$.

В обоих случаях, если функция $u \in \mathcal{R}_a$ обращается в нуль на некоторой части Γ положительной меры, то она есть тождественный нуль на области Ω.

4. Примеры однозначно разрешимых краевых задач

Выбирая соответствующим образом подпространство $V \subset H_1$, мы приходим к обобщенной постановке той или иной краевой задачи для уравнения (1). Каждый раз при этом предполагаются выполненными условия, обеспечивающие коэрцитивность оператора A, так что для доказательства существования и единственности решения соответствующей задачи достаточно установить, что она имеет не более одного решения.

1. Задача Дирихле. В этом случае V полагается равным $H_{1,0}$.

В простейших ситуациях для доказательства единственности решения удается использовать принцип максимума. Если $s = 1$ и оператор A удовлетворяет условию Лежандра, то задача Дирихле для уравнения (1) может иметь не более одного решения, если

$$\int\limits_\Omega (Dv + B \cdot \nabla v)\, dx \ge 0 \tag{20}$$

для любой неотрицательной функции v из $C_0^1(\Omega)$ (см., например, [12, с. 172]).

При $s \geq 1$ укажем достаточные условия, при которых оператор $\mathcal{A}$ положительно определен на $H_{1,0}$. Эти условия, очевидно, будут гарантировать существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле.

Пусть оператор A удовлетворяет условию

$$c_0|u|_1^2 \leq \int\limits_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \forall\, u \in H_{1,0} \tag{21}$$

(c_0 – положительная постоянная, не зависящая от Ω), например A удовлетворяет условию Лежандра, является оператором теории упругости, оператором теории пьезоэлектриков (16) или не зависит от x и удовлетворяет условию Лежандра–Адамара. Тогда

$$(\mathcal{A}u, u)_1 \geq \int\limits_\Omega (c_0|\nabla u|^2 - 2c_1|u||\nabla u| + Du \cdot u)\, dx, \tag{22}$$

где $c_1 = \max(\|\|B\|\|_{L_\infty(\Omega)}, \|\|C\|\|_{L_\infty(\Omega)})$. Матрица $D_0 = (D + D^T)/2$ симметрична, поэтому существует полная ортонормированная система ее собственных векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $D_0 e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Собственные числа матрицы D_0 занумерованы в порядке неубывания. Будем считать при этом, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ положительны, числа $\lambda_t, \lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_n$ отрицательны. Как известно, $|\lambda_k| \leq \|D_0\|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, поэтому $\lambda_k \in L_\infty(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Разлагая u по базису $\{e_k\}_{k=1}^n$, получим $Du \cdot u = \sum\limits_{k=1}^{r} d_k^2 \lambda_k + \sum\limits_{k=t}^{n} d_k^2 \lambda_k$, $d_k = u \cdot e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $Du \cdot u \geq \lambda_r \sum\limits_{k=1}^{r} d_k^2 - |\lambda_n||u|^2$. Будем различать два случая: 1) $r = n$ для почти всех $x \in \Omega$, $c_2^+ = \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} \lambda_n(x) > 0$, в этом случае $Du \cdot u \geq c_2^+|u|^2$ на Ω; 2) $Du \cdot u \geq -c_2^-|u|^2$ на Ω, где $c_2^- = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} |\lambda_n(x)|$; по неравенству Фридрихса получаем, что

$$\int\limits_\Omega \mathcal{D}u \cdot u dx \geq -c_\Omega c_2^- \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

В первом случае имеем

$$(\mathcal{A}u, u)_1 \geq \int\limits_\Omega ((c_0 - c_1\varepsilon)|\nabla u|^2 + (c_2^+ - c_1/\varepsilon)|u|^2)\, dx \tag{23}$$

для любого положительного ε. Во втором случае

$$(\mathcal{A}u, u)_1 \geq (c_0 - 2c_1 c_\Omega^{1/2} - c_2^- c_\Omega) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{24}$$

Из оценок (23), (24) следует, что оператор $\mathcal{A}$ положительно определен либо, когда c_2^+ достаточно велико, либо, когда c_1, c_2^- достаточно малы, либо, когда постоянная Фридрихса c_Ω достаточно мала. Последнее, как хорошо известно, выполнено, если $\operatorname{meas}\Omega$ достаточно мала. Таким образом, картина разрешимости задачи Дирихле для системы (1) вполне аналогична случаю одного уравнения (см., например, [1, с. 96]).

2. Третья краевая задача. В этом случае V совпадает с H_1. Пусть оператор A удовлетворяет условию Лежандра или является оператором теории упругости, или седловым оператором (16). Во всех этих случаях, как нетрудно убедиться, выполнены условия леммы 3 при $F^2(u) = \int\limits_{\Gamma} |u(x)|^2 dx$, и, следовательно, норма $\|u\|_1$ эквивалентна норме

$$\|u\|_1' = \left(\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u dx + \int\limits_{\Gamma} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Поэтому если предположить, что матица G равномерно по $x \in \Gamma$ положительно определена, то рассуждая точно так же, как в случае первой граничной задачи, нетрудно показать, что оператор $\mathcal{A}$ положительно определен на H_1, если постоянные c_1, c_2^- достаточно малы.

3. Задача Неймана. Под задачей Неймана понимается задача отыскания функции $u \in H_1$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla \eta \, dx = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot \nabla \eta) \, dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta \, dx \quad \forall \, \eta \in H_1. \tag{25}$$

В этом пункте будем предполагать, что A – симметричный неотрицательный коэрцитивный оператор. Из симметрии оператора следует, что если $\eta \in \mathcal{R}_a$, то $(u, \eta)_a = 0$ для любого $u \in H_1$. Поэтому для существования решения задачи (25) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot \nabla \eta) \, dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta \, dx = 0 \quad \forall \, \eta \in \mathcal{R}_a. \tag{26}$$

Пусть $H_\perp = \{u \in H_1 : (u, r)_1 = 0 \; \forall \, r \in \mathcal{R}_a\}$. Если условие (26) выполнено, то существует и при том только один элемент $\widetilde{f} \in H_\perp$ такой, что

$$(\widetilde{f}, \eta)_1 = \int\limits_{\Omega} (f \cdot \eta + F \cdot \nabla \eta) \, dx + \int\limits_{\Gamma} g \cdot \eta \, dx \quad \forall \, \eta \in H_1.$$

Пусть, далее, оператор $\mathcal{A} : H_1 \to H_1$ определен равенством

$$(\mathcal{A}u, \eta)_1 = \int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla \eta \, dx \quad \forall \, u, \, \eta \in H_1.$$

Из симметрии оператора A вытекает, что $\mathcal{A}u \in H_\perp$ для любого $u \in H_1$. По лемме 2 имеем, что $|u|_a \geq c|u|_0$ для любого $u \in H_\perp$, следовательно, уравнение $\mathcal{A}u = \widetilde{f}$ имеет единственное решение $u \in H_\perp$.

4. Задача о жестком контакте. Задача о нормальной нагрузке[3]). В этом пункте будем предполагать, что $\Gamma \in C^1$. Будем полагать также, что $2 \leq s \leq n$. Всякому вектору $a \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие вектор $\widetilde{a} \in \mathbb{R}^s$, считая, что $\widetilde{a}_i = a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, s$. Пусть далее

$$V_\tau = \{u \in H_1 : \; u(x) \cdot \widetilde{\nu}(x) = 0, \; x \in \Gamma\}, \tag{27}$$

$$V_\nu = \{u \in H_1 : \; u(x) \wedge \widetilde{\nu}(x) = 0, \; x \in \Gamma\}. \tag{28}$$

[3]) Эти названия связаны с соответствующими граничными задачами для системы уравнений теории упругости [13], [14, гл. 4], аналогичные задачи рассматривались также в [15, 16].

Напомним, что для векторов $a,\, b \in \mathcal{R}^s$ матрица $a \wedge b$ (внешнее произведение) определяется равенством $a \wedge b = \{a_i b_j - a_j b_i\}_{i,j=1}^s$. Легко проверить, что соотношение $a \wedge b = 0$ эквивалентно коллинеарности векторов $a,\, b$.

Будем говорить, что функция $u \in V_\tau$ есть решение задачи о жестком контакте, если

$$\int\limits_\Omega ((A\nabla u + Bu)\cdot \nabla\eta + C\nabla u \cdot \eta + Du \cdot \eta)\, dx = \int\limits_\Omega (f\cdot\eta + F\cdot\nabla\eta)\, dx \quad \forall\, \eta \in V_\tau. \tag{29}$$

Будем говорить, что функция $u \in V_\nu$ есть решение задачи о нормальной нагрузке, если для нее выполнено равенство вида (29) для любой функции $\eta \in V_\nu$.

Нетрудно убедиться, что для задачи о жестком контакте граничное условие $(A\nabla u\nu)\wedge\widetilde{\nu} = 0,\ x \in \Gamma$, является естественным. Для задачи о нормальной нагрузке естественным граничным условием является условие $(A\nabla u\nu)\cdot\widetilde{\nu} = 0,\ x \in \Gamma$.

4.1. Исследуем сначала разрешимость этих задач, предполагая, что для оператора A выполнено условие Лежандра (10). Очевидно, что в этом случае пространство $\mathcal{R}_a$ состоит из векторов, тождественно постоянных на Ω. Множество всех нормалей к поверхности Γ содержит при принятых условиях все векторы естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому $\mathcal{R}_a \bigcap V = \{0\}$, если $V = V_\tau$ или $V = V_\nu$. Таким образом, условия леммы 2 выполнены, и, следовательно, для рассматриваемых задач справедливы те же утверждения об однозначной разрешимости, что и для задачи Дирихле.

4.2. Предположим теперь, что оператор A есть оператор теории упругости. Структура пространства $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau$ в этом случае зависит от области Ω (см. [13], [14, гл. 4]).

Лемма 4. *Пусть $c \in \mathbb{R}^n$, $W = -W^T$ – произвольная кососимметричная матрица порядка n. Тогда существует $(n-1)$-мерная поверхность S класса C^1 такая, что*

$$(c + Wx)\cdot\nu(x) = 0 \quad \forall\, x \in S. \tag{30}$$

Доказательство. Хорошо известно, что всякая кососимметричная матрица ортогонально подобна блочно-диагональной матрице, максимальный размер каждого диагонального блока которой не больше двух. Поэтому, выполняя при необходимости поворот и сдвиг декартовой системы координат, можно считать, что

$$c + Wx = (c_1, c_2, \dots, c_p, -\delta_{p+1}x_{p+2}, \delta_{p+1}x_{p+1}, \dots, -\delta_{n-1}x_n, \delta_{n-1}x_{n-1}) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{31}$$

где числа $\delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \dots, \delta_{n-1}$ положительны. Зададим поверхность S параметрически: $x_k = \varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $t \in B \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Подчиним при этом функции φ_k, $k = 1, 2, \dots, n$, условиям

$$\begin{gathered} \frac{\partial\varphi_k(t)}{\partial t_{n-1}} = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \frac{\partial\varphi_{p+1}(t)}{\partial t_{n-1}} = -\delta_{p+1}\varphi_{p+2}(t), \quad \frac{\partial\varphi_{p+2}(t)}{\partial t_{n-1}} = \delta_{p+1}\varphi_{p+1}(t), \dots, \\ \frac{\partial\varphi_{n-1}(t)}{\partial t_{n-1}} = -\delta_{n-1}\varphi_n(t), \quad \frac{\partial\varphi_n(t)}{\partial t_{n-1}} = \delta_{n-1}\varphi_{n-1}(t). \end{gathered} \tag{32}$$

Тогда вектор $c+Wx$ при любом $x \in S$ будет лежать в плоскости, касательной к S, и условие (4) будет выполнено. Система уравнений (32) имеет решение

$$\varphi_k = c_k t_{n-1} + g_k(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\varphi_{p+1} = g_{p+1}(\tau) \cos \delta_{p+1} t_{n-1}, \quad \varphi_{p+2} = g_{p+1}(\tau) \sin \delta_{p+1} t_{n-1}, \ldots,$$
$$\varphi_{n-1} = g_{n-1}(\tau) \cos \delta_{n-1} t_{n-1}, \quad \varphi_n = g_{n-1}(\tau) \sin \delta_{n-1} t_{n-1}, \quad (33)$$

где g_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, – произвольные дифференцируемые функции $\tau \in \mathbb{R}^{n-2}$. Для поверхности, описываемой соотношениями (33), утверждение леммы выполнено. □

Поверхность, описываемую соотношениями (33), естественно называть $(n-1)$-мерной винтовой поверхностью. При $c_1, c_2, \ldots, c_p = 0$, $\delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \ldots, \delta_{n-1} = 1$, $t_{n-1} \in [0, 2\pi]$ получаем поверхность вращения. Таким образом, если область Ω ограничена поверхностью вращения, то пространство $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau$ нетривиально. Полное описание этого пространства при произвольном n удается выполнить лишь в случае сферы. А именно, нетрудно убедиться, что в этом случае пространство $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau$ совпадает со множеством всех функций вида $u(x) = Wx$, где W – произвольная кососимметричная матрица порядка n.

В практически наиболее важном случае, когда $n = 3$, поверхность вращения либо имеет только одну ось и описывается уравнениями

$$x_1 = g_1(\tau), \quad x_2 = g_2(\tau) \cos t, \quad x_3 = g_2(\tau) \sin t, \quad \tau \in \mathcal{R}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (34)$$

либо является сферой. В первом случае пространство $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau$ одномерно и состоит из векторов вида $u_1(x) = 0$, $u_2(x) = \delta x_3$, $u_3(x) = -\delta x_2$, $\delta \in \mathcal{R}$. Во втором случае оно состоит из векторов вида $u(x) = Wx$, где W – произвольная кососимметричная матрица третьего порядка. Если Γ не является поверхностью вращения, то $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau = \{0\}$. Отметим, что пространство $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau \neq \{0\}$ и для области, ограниченной соосными поверхностями вращения.

Для задачи о жестком контакте, очевидно, имеют место утверждения о разрешимости, аналогичные случаю задачи Неймана (см. п. 3) с заменой пространства $\mathcal{R}_a$ на пространство $\mathcal{R}_a \bigcap V_\tau$.

4.3. При анализе задачи о нормальной нагрузке в случае, когда оператор A есть оператор теории упругости полезной оказывается

Лемма 5. *Пусть* $\Gamma \in C^1$. *Тогда* $\mathcal{R}_a \bigcap V_\nu = \{0\}$.

Доказательство. Если $u \in \mathcal{R}_a \bigcap V_\nu$, то для некоторого $c \in \mathcal{R}^n$ и кососимметричной матрицы W порядка n имеем $c + Wx = \alpha(x)\nu(x)$, $\alpha(x) \in \mathcal{R}$, $\forall\, x \in \Gamma$. Выберем декартову систему координат так, чтобы выполнялись соотношения (31). Тогда вследствие того, что на Γ существуют нормали, параллельные любому координатному направлению, получим, что $c = 0$. Поэтому $Wx = \alpha(x)\nu(x)$, $x \in \Gamma$, причем $\alpha(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль (см. пример 2 в п. 3). Отсюда, очевидно, следует, что $\nu(x) \cdot x = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Пусть Γ описывается уравнением $\varphi(x) = 0$. Тогда $\nabla\varphi(x) \cdot x = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Трактуя последнее соотношение как линейное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции φ, можно доказать, что $\varphi(x) = \varphi(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)$[4]. Понятно,

[4] Заметим, что уравнение $\varphi(x) = 0$ есть в данном случае уравнение поверхности конуса с вершиной в начале координат.

что при этом вектор $\nu(x)$ параллелен вектору с координатами

$$-\frac{1}{x_1^2}\sum_{k=2}^{n} x_k\,\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_k},\ \frac{1}{x_1}\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_2},\dots,\frac{1}{x_1}\,\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_n},\quad p_k=\frac{x_k}{x_1},\quad k=2,3,\dots,n.$$

Положив $\nu(x)=(1,0,\dots,0)$, получим отсюда противоречивые равенства. □

Из неравенства (14), лемм 2 и 5 вытекает, что если A – оператор теории упругости, то существует постоянная $c>0$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u\cdot\nabla u\,dx \ge c\|u\|_1^2 \quad \forall\, u\in V_\nu,$$

поэтому исследование разрешимости задачи о нормальной нагрузке проводится в рассматриваемом случае точно так же, как и для задачи Дирихле.

Авторы благодарны Р.З. Даутову за полезные советы и обсуждение результатов статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-05686, 15-41-02315, 15-41-02569).

Summary

M.M. Karchevsky, R.R. Shagidullin. On Boundary Value Problems for Elliptic Systems of Second-Order Equations in Divergence Form.

Solvability conditions of various boundary value problems for elliptic systems of second-order equations in divergence form are adduced. The effect of domain shape on the solvability of nonclassical problems of rigid contact and normal load is investigated in details. Particular attention is paid to the systems of equations of the type of stationary equations of linear elasticity, as well as to the systems of piezoelectrics theory.

Keywords: elliptic system of differential equations, divergence form, coerciveness conditions, boundary value problem, solvability conditions.

Литература

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
2. *Chipot M.* Elliptic Equations: An Introductory Course. – Birkhäuser Basel, 2009. – 290 p.
3. *Nečas J.* Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. – 388 p.
4. *Бесов О.В.* О коэрцитивности в неизотропном пространстве С.Л. Соболева // Матем. сб. – 1967. – Т. 73, № 4. – С. 585–599.
5. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука 1975. – 482 с.
6. *Кардоне Дж., Корбо Эспозито А., Назаров С.А.* Осреднение смешанной краевой задачи для формально самосопряженной эллиптической системы в периодической перфорированной области // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 4. – С. 126–173.
7. *Амензаде Ю.А.* Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1976. – 272 с.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

9. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы уравнений теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Усп. матем. наук. – 1988. – Т. 43, Вып. 5. – С. 55–98.

10. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.

11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

12. *Гильбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

13. *Эйдус Д.М.* О смешанной задаче теории упругости // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 76, № 2. – С. 181–184.

14. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. – М.: Гостехиздат, 1952. – 216 с.

15. *Dubinskii Yu. A.* Some Coercive Problems for the System of Poisson Equations // Russ. J. Math. Phys. – 2013. – V. 20, No 4. – P. 402–412.

16. *Дубинский Ю.А.* О некоторых граничных задачах для систем уравнений Пуассона в трехмерной области // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 5. – С. 610–613.

Поступила в редакцию
01.04.15

Карчевский Михаил Миронович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru*

Шагидуллин Ростем Рифгатович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Rostem.Shagidullin@kpfu.ru*