УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 2 Физико-математические науки *2013*

УДК 519.85

МОДЕЛЬ МИГРАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ С ОБРАТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПОЛЕЗНОСТИ

И.В. Коннов

Аннотация

Предложена модель миграции населения равновесного типа, в которой вместо обычных функций полезности пунктов (регионов) использованы обратные к ним. Показано, что такой подход позволяет сформулировать модель в виде обобщенной системы прямо-двойственных вариационных неравенств с простыми ограничениями. На этой основе предложены новые итерационные методы поиска состояния равновесия системы.

Ключевые слова: Модель миграции населения, обратные функции полезности, система прямо-двойственных вариационных неравенств, итерационные методы.

Введение

Среди различных моделей миграции населения достаточно распространенными являются модели, основанные на условиях равновесия в рассматриваемой системе (см., например, [1, 2] и указанные там ссылки). Эти модели хорошо приспособлены для определенного типа процессов, например трудовой миграции. Следует отметить, что такие же по существу модели применяются и для некоторых родственных задач, возникающих в социально-экономических системах, таких как процессы трудоустройства.

При построении моделей используются прежде всего соотношения равновесия и баланса, включающие функции затрат на перемещение (от объемов миграции) и функции полезности (от количества мигрантов в пунктах). В результате задача формулируется в виде вариационного неравенства, содержащего отображения затрат и полезности, а также функциональные ограничения, для которого разрабатываются итерационные методы проективного типа (см., например, [1, гл. 5]).

В настоящей работе предлагается модель миграции, основанная на тех же соотношениях равновесия и баланса, но использующая обратные функции полезности. Показано, что такой подход позволяет сформулировать модель в виде обобщенной системы прямо-двойственных вариационных неравенств с простыми ограничениями. Эта формулировка открывает широкие возможности для построения разнообразных итерационных методов поиска состояния равновесия системы. Приводятся некоторые из таких методов.

1. Основная модель

Рассмотрим систему из n регионов(пунктов), которые соединены транспортными коммуникациями, пусть $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$ обозначает множество индексов регионов. Для каждого i-го региона пусть b_i, x_i и u_i обозначают соответственно начальное количество потенциальных мигрантов, установившееся количество мигрантов и полезность пребывания в этом регионе. Тогда можно определить векторы (столбцы):

$$b = (b_1, \ldots, b_n)^\top, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^\top, \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^\top.$$

Будем считать, что количество мигрантов x_i зависит от величин полезности в регионах, то есть $x_i = x_i(u)$, в итоге получаем вектор-функцию (отображение) $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Далее, для пары i, j регионов ($i \neq j$) пусть h_{ij} и c_{ij} обозначают соответственно объем миграции и затраты на переезд (перемещение) одного мигранта из региона i в регион j. Будем также считать, что удельные затраты c_{ij} зависят от объемов миграции, то есть $c_{ij} = c_{ij}(h)$, в итоге получаем отображение $c : \mathbb{R}^{n(n-1)} \to \mathbb{R}^{n(n-1)}$, где

$$c = (c_{ij})_{\{i,j\in\mathcal{N}, i\neq j\}}, \quad h = (h_{ij})_{\{i,j\in\mathcal{N}, i\neq j\}}.$$

Отметим, что затраты и полезности измеряются в одинаковых единицах. Рассмотрим обычную ситуацию, когда миграция является однократной в рамках рассматриваемого периода времени. Тогда можно определить допустимое множество для объемов миграции

$$H = \left\{ h \in \mathbb{R}^{n(n-1)} \;\middle|\; h_{ij} \geq 0, \forall j \in \mathcal{N}, j \neq i, \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij} \leq b_i \;\forall\, i \in \mathcal{N} \right\}.$$

Теперь сформулируем *задачу миграционного равновесия* с учетом затрат перемещения. Она будет состоять в определении пары векторов $(h^*, u^*) \in H \times \mathbb{R}^n$ таких, что выполняются условия

$$\sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\neq j} \left[c_{ij}(h^*) + u_i^* - u_j^*)\right](h_{ij} - h_{ij}^*) \geq 0 \quad \forall\, h \in H; \tag{1}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji}^* - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij}^* + b_i = x_i(u^*) \quad \forall\, i \in \mathcal{N}. \tag{2}$$

Второе условие достаточно очевидно, поскольку определяет баланс населения в каждом регионе. Что касается первого условия, то оно представляет равновесие (точнее, отсутствие приращений полезности при любом перемещении с учетом затрат) между регионами. Задача (1), (2) является обобщенной системой прямо-двойственных вариационных неравенств, варианты которой рассматривались в различных работах (см., например, [2–5]). Действительно, соотношения (1), (2) эквивалентно переписываются в виде

$$\sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\neq j} c_{ij}(h^*)(h_{ij} - h_{ij}^*) + \sum_{i\in\mathcal{N}} u_i^* \left[\left(\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij} - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji} \right) - \right.$$
$$\left. - \left(\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij}^* - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji}^* \right) \right] \geq 0 \quad \forall h \in H; \tag{3}$$

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} \left[\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji}^* - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij}^* + b_i - x_i(u^*) \right] (u_i - u_i^*) \geq 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Если зафиксировать временно величины $c_{ij} = c_{ij}(h^*)$ и $x_i(u^*)$ и обозначить $g_i = b_i - x_i(u^*)$, то соотношения (3), (4) представляют собой необходимые и достаточные условия оптимальности, а именно соотношения седловой точки функции Лагранжа для задачи линейного программирования

$$\min \to \sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\neq j} c_{ij} h_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij} - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji} = g_i \quad \forall\, i\in\mathcal{N};$$
$$\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij} \le b_i \quad \forall\, i\in\mathcal{N};$$
$$h_{ij}\ge 0 \quad \forall\, i,j\in\mathcal{N}, \quad j\neq i;$$

где функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L(h,u) = \sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\neq j} c_{ij}h_{ij} + \sum_{i\in\mathcal{N}} u_i \left[\left(\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij} - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji}\right) - g_i\right].$$

Теперь покажем, что задача (1), (2) эквивалентно определяет условия равновесия для модели миграции из [1, гл. 5]. Для этого используем условия оптимальности для вариационного неравенства (1) согласно [2, предложение 11.6] и получим, что пара $(h^*,u^*)\in H\times\mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению (1) тогда и только тогда, когда найдутся числа μ_i, $i\in\mathcal{N}$ такие, что выполняются соотношения

$$h^*_{ij}\ge 0,\ \ c_{ij}(h^*)+u^*_i-u^*_j+\mu_i\ge 0,\ \ h^*_{ij}[c_{ij}(h^*)+u^*_i-u^*_j+\mu_i]=0\ \ \forall\, i,j\in\mathcal{N},\ j\neq i; \quad (5)$$

а также

$$\mu_i\ge 0, \quad b_i - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h^*_{ij}\ge 0, \quad \mu_i\left[b_i - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h^*_{ij}\right] = 0 \quad \forall\, i\in\mathcal{N}. \quad (6)$$

Если в условиях (1), (2) и (5), (6) использовать обычные функции полезности $u_i(x)$ (вместо обратных), то они в точности совпадают с условиями равновесия для модели миграции из [1, с. 191] (при отсутствии дифференциации на классы) (см. также [2, с. 74]). В то же время модель из [1, 2] определена в виде вариационного неравенства, содержащего отображения затрат и полезности, ограничения которого включают соотношения из множества H, а также (2). А именно, она состоит в определении пары пары векторов $(h^*,x^*)\in W$ таких, что выполняются условия

$$\sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\neq j} c_{ij}(h^*)(h_{ij}-h^*_{ij}) + \sum_{i\in\mathcal{N}} u_i(x^*)(x^*_i - x_i)\ge 0 \quad \forall\,(h,x)\in W, \quad (7)$$

где

$$W = \left\{ (h,x) \;\middle|\; \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ji} - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij} + b_i = x_i, \quad h_{ij}\ge 0 \quad \forall\, j\in\mathcal{N}, j\neq i, \\ \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{N},\, j\neq i} h_{ij}\le b_i \quad \forall\, i\in\mathcal{N} \end{array} \right\}.$$

Таким образом, вопрос состоит в выявлении возможных преимуществ постановки (1), (2) по сравнению с (7).

Используя известные результаты из теории вариационных неравенств (см., например, [6]), нетрудно установить условия существования и единственности решений в задачах миграционного равновесия. В частности, множество W является непустым, выпуклым и компактным, поэтому непрерывность отображений c и u влечет существование решения задачи (7), тогда в силу эквивалентности решение

существует и у задачи (1), (2) при условии непрерывности отображения $x = u^{-1}$. Что касается единственности решения, то в задаче (7) требуется строгая монотонность отображений c и $-u$, тогда как в задаче (1), (2) – отображений c и $-x$. В общем случае свойства непрерывности и строгой монотонности для отображения и обратного к нему не эквивалентны, поэтому каждая из формулировок (1), (2) и (7) может иметь свои преимущества.

2. Методы поиска решений

Обсудим более подробно методы решения задач (1), (2) и (7). Ясно, что для задачи (7) можно, в принципе, применить любой итерационный метод решения вариационных неравенств при наличии соответствующих условий монотонности отображений c и u (см., например, [2] и указанные там ссылки). Так, в [1, гл. 5] для этой цели предлагается использовать метод типа линеаризации, условия сходимости которого, впрочем, не так легко проверить. Более очевидной трудностью для этого и других методов с явным учетом допустимого множества является получение решения соответствующей вспомогательной задачи на каждой итерации. Действительно, даже для проективного метода, например, придется находить проекцию на допустимое множество W, определяемое сложными ограничениями. С другой стороны, переход к двойственным методам типа Удзавы и модифицированной функции Лагранжа приводит к необходимости введения дополнительно двойственных переменных, тогда как задача (1), (2) (или (3), (4)) уже дана в необходимом виде прямо-двойственной системы, для которой дополнительных переменных не потребуется. Значит, такие методы двойственного типа применительно к задаче (1), (2) могут оказаться более эффективными при поиске равновесия в модели миграции.

Для удобства перепишем систему (1), (2) более кратко: найти пару векторов $(h^*, u^*) \in H \times \mathbb{R}^n$ таких, что выполняются условия

$$\langle c(h^*), h - h^* \rangle + \langle A^\top u^*, h - h^* \rangle \geq 0 \quad \forall\, h \in H, \tag{8}$$

$$b - Ah^* - x(u^*) = \mathbf{0}, \tag{9}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение, A – соответствующую матрицу коэффициентов размерности $n \times n(n-1)$. Для таких прямо-двойственных систем, в том числе и более общего вида, разработаны разнообразные методы, приспособленные к свойствам основных отображений (здесь c и x). Это связано прежде всего с многими их приложениями в экономике, физике, системах транспорта и связи (см., например, [2, 5, 7]). Наиболее разработанными и достаточно удобными являются двойственные методы (см., например, [2, 3, 5]). Заметим, что в силу линейности функций ограничений выбор прямых и двойственных переменных в системе (8), (9) достаточно произволен и обусловлен в основном лишь удобством реализации метода. Для большей определенности будем переменные h считать прямыми, а переменные u – двойственными.

Пусть V – некоторое подмножество конечномерного пространства E. Напомним, что отображение $Q : V \to E$ называется

a) *монотонным*, если для любых v', $v'' \in V$ выполняется

$$\langle Q(v') - Q(v''), v' - v'' \rangle \geq 0;$$

b) *строго монотонным*, если для любых v', $v'' \in V$, $v' \neq v''$ выполняется

$$\langle Q(v') - Q(v''), v' - v'' \rangle > 0;$$

c) *сильно монотонным* с константой $\tau > 0$, если для любых $u', u'' \in V$ выполняется

$$\langle Q(v') - Q(v''), v' - v'' \rangle \geq \tau \left\| v' - v'' \right\|^2;$$

d) *обратно сильно монотонным* (или, для краткости, *ОСМ-отображением*) с константой $\gamma > 0$, если для любых $u', u'' \in V$ выполняется

$$\langle Q(v') - Q(v''), v' - v'' \rangle \geq \gamma \|Q(v') - Q(v'')\|^2.$$

Через E_+ будем обозначать множество точек пространства E с неотрицательными координатами.

Сначала рассмотрим систему (1), (2) (или (8), (9)) при следующих основных предположениях:

(a) $c : \mathbb{R}_+^{n(n-1)} \to \mathbb{R}^{n(n-1)}$ – *непрерывное и сильно монотонное с константой* $\tau > 0$ *отображение*;

(b) $-x : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ – *непрерывное монотонное отображение*;

(c) *Система* (1), (2) *имеет решение.*

В силу указанных свойств для любой точки $u \in \mathbb{R}^n$ будут определены однозначные отображения

$$h(u) = \{ \widetilde{h} \in H \mid \langle c(\widetilde{h}), h - \widetilde{h} \rangle + \langle A^\top u, h - \widetilde{h} \rangle \geq 0 \quad \forall\, h \in H \}$$

и

$$f(u) = b - Ah(u).$$

Теперь можно определить двойственную задачу нахождения точки $u^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f(u^*) - x(u^*) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Очевидно, что решение этой задачи дает решение исходной задачи (1), (2) и наоборот (см. [5, предложение 2]). Кроме того, в этих условиях f является ОСМ-отображением. Действительно, выберем произвольно точки u', u'' и обозначим $h' = h(u'), h'' = h(u'')$. По определению имеем

$$\langle c(h'), h'' - h' \rangle + \langle u', A(h'' - h') \rangle \geq 0$$

и

$$\langle c(h''), h' - h'' \rangle + \langle u'', A(h' - h'') \rangle \geq 0.$$

После сложения этих неравенств получаем

$$\langle u' - u'', f(u') - f(u'') \rangle = \langle u' - u'', A(h'' - h') \rangle \geq \langle c(h'') - c(h'), h'' - h' \rangle \geq \tau \|h'' - h'\|^2,$$

но $\|f(u') - f(u'')\| \leq \|A\| \|h'' - h'\|$, поэтому

$$\langle u' - u'', f(u') - f(u'') \rangle \geq (\tau / \|A\|^2) \|f(u') - f(u'')\|^2,$$

что и требовалось показать.

Теперь, следуя [5], можно построить сходящуюся к решению задачи последовательность на основе метода расщепления. Для этого, начиная с произвольной точки $u^0 \in \mathbb{R}^n$, последовательно для текущей точки u^k находим новую точку u^{k+1} как решение уравнения

$$f(u^k) + \frac{1}{\gamma_k}(u^{k+1} - u^k) - x(u^{k+1}) = \mathbf{0}, \tag{11}$$

где

$$0 < \gamma' \leq \gamma_k \leq \gamma'' < 2\tau / \|A\|^2. \tag{12}$$

Сходимость процесса следует из [5, теорема 1].

Предложение 1. *Если последовательность* $\{u^k\}$ *построена по правилам* (11), (12), *то она сходится к точке* u^*, *которая является решением задачи* (10), *а соответствующая последовательность* $\{h^k\}$, *образуемая по правилу* $h^k = h(u^k)$, *сходится к точке* h^* *такой, что* (h^*, u^*) *есть решение задачи* (8), (9).

Утверждение о сходимости останется справедливым и для приближенного варианта метода [8]. Более того, если отображение только монотонно, то можно комбинировать данный метод с методом регуляризации или проксимальной точки [9]. Следует заметить, что условия (строгой, сильной) монотонности отображений c и $-x$ являются здесь достаточно естественными. В самом деле, возрастание потоков миграции между регионами должно приводить и к возрастанию удельных затрат на перемещение, в то время как возрастание количества мигрантов в регионе должно приводить к снижению полезности пребывания в этом регионе, что влечет аналогичную зависимость обратного отображения.

Рассмотрим еще одно естественное дополнительное условие, которое позволяет построить более эффективные методы. Напомним, что отображение $Q : E \to E$ называется *диагональным*, если $Q_i(v) = Q_i(v_i)$ для любого i. Предположим, что в дополнение к условиям (a)–(c) отображения c и x диагональны. Это значит, что удельные затраты на перемещение между регионами i и j зависят только от объема миграции между этими регионами, а количество мигрантов в регионе i зависит только от полезности пребывания в этом регионе. Диагональность и непрерывность отображений c и x гарантирует их интегрируемость, то есть существование функций

$$\mu_{ij}(h_{ij}) = \int\limits_0^{h_{ij}} c_{ij}(\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad \eta_i(u_i) = \int\limits_0^{u_i} x_i(\tau)\,d\tau.$$

Тогда задача (8), (9) совпадает с задачей о седловой точке

$$\Phi(h^*, u) \le \Phi(h^*, u^*) \le \Phi(h, u^*) \quad \forall h \in H, \forall u \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\Phi(h, u) = \mu(h) + \eta(u) + \langle u, Ah - b\rangle, \quad \mu(h) = \sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\ne j} \mu_{ij}(h_{ij}), \quad \eta(u) = \sum_{i\in\mathcal{N}} \eta_i(u_i),$$

причем функции μ_{ij} и $-\eta_i$ являются выпуклыми при сделанных предположениях, так что функция Φ будет выпукло-вогнутой. Таким образом, в этом случае для решения исходной задачи (1), (2) можно использовать методы поиска седловых точек. Метод расщепления (11) в этих условиях можно дополнить линейным поиском, чтобы избежать замедления сходимости из-за неточной оценки величины γ'' в (12). Описание и обоснование такого метода дано в [10].

Однако условие диагональности позволяет найти решение исходной задачи при существенно более слабых предположениях. Рассмотрим следующий набор условий для системы (1), (2) (или (8), (9)):

(a′) $c : \mathbb{R}_+^{n(n-1)} \to \mathbb{R}^{n(n-1)}$ – *непрерывное, диагональное и сильно монотонное с константой* $\tau > 0$ *отображение*;

(b′) $-x : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}^n$ – *непрерывное диагональное отображение.*

Заметим, что здесь не требуется монотонности отображения $-x$. Следуя [11, 12], построим простой метод спуска для задачи (10). Обозначим

$$\psi(u) = \sigma(u) - \eta(u),$$

где

$$\sigma(u) = -\min_{h\in H}\{\mu(h) + \langle u, Ah - b\rangle\},$$

тогда $f(u) = \sigma(u)$.

Метод спуска. Выберем произвольно точку $u^0 \in \mathbb{R}^n$ и числа $\alpha, \beta \in (0,1)$.

На k-й итерации, $k = 0, 1, \ldots$, имея точку u^k, определяем элемент $f(u^k)$ и полагаем $d^k = x(u^k) - f(u^k)$. Далее находим m как наименьшее целое число такое, что

$$\psi(u^k + \beta^m d^k) \le \psi(u^k) + \alpha\beta^m \langle \psi'(u^k), d^k\rangle,$$

полагаем $\lambda_k = \beta^m$, $u^{k+1} = u^k + \lambda_k d^k$ и переходим к следующей итерации.

Сходимость процесса следует из [12, теорема 4.3].

Предложение 2. *Пусть множество $W(u^0) = \{u \mid \psi(u) \le \psi(u^0)\}$ ограничено. Если последовательность $\{u^k\}$ построена методом спуска, а последовательность $\{h^k\}$ получена по правилу $h^k = h(u^k)$, то последовательность $\{(h^k, u^k)\}$ имеет предельные точки, причем все они являются решениями задачи* (8), (9).

Заметим, что в этом случае условие (c) следует из ограниченности множества $W(u^0)$. Если отображение c не является сильно монотонным, то сходящуюся к решению последовательность можно построить либо на основе метода расщепления с линейным поиском [13], либо на основе комбинации метода частичной регуляризации и спуска [12, 14]. Другой подход к решению системы (1), (2) в условиях только монотонности отображений c и $-x$ состоит в использовании прямо-двойственных методов экстраполяционного типа [11, 15].

3. Модификации и обобщения

В этом разделе рассмотрим дальнейшие модификации системы (1), (2), которые могут использоваться в приложениях.

Сначала обсудим ситуацию, когда запрета на реэмиграцию нет. Тогда условия

$$h_{ij} \le b_i \ \forall i \in \mathcal{N},$$

в определении множества H будут отсутствовать, и задача (1) превратится в задачу дополнительности, что приведет лишь к упрощению применяемых итерационных методов, которые тогда реализуются покоординатно.

Теперь обсудим ситуацию, когда основные отображения являются многозначными, то есть одному значению вектора объемов миграции h соответствует множество удельных затрат C, а одному значению вектора полезности u – множество распределений мигрантов по регионам X. Тогда вместо системы (1), (2) решаем задачу определения пары векторов $(h^*, u^*) \in H \times \mathbb{R}^n$ таких, что выполняются условия

$$\exists c^* \in C(h^*) : \sum_{i,j\in\mathcal{N},\, i\ne j} \left[c^*_{ij} + u^*_i - u^*_j)\right](h_{ij} - h^*_{ij}) \ge 0 \quad \forall\, h \in H; \tag{13}$$

$$\exists x^* \in X(u^*) : \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\ne i} h^*_{ji} - \sum_{j\in\mathcal{N},\, j\ne i} h^*_{ij} + b_i = x^*_i \quad \forall\, i \in \mathcal{N}. \tag{14}$$

Для решения системы (13), (14) в принципе можно использовать большинство описанных выше методов. В частности, после соответствующих обобщений условий

(a)–(c) в методе расщепления (11), (12) следует заменить задачу (11) на следующее включение

$$\mathbf{0} \in f(u^k) + \frac{1}{\gamma_k}(u^{k+1} - u^k) - X(u^{k+1}).$$

Тогда, как показано в [5], утверждение предложения 1 останется справедливым.

Систему (1), (2) можно приспособить и для более общего случая дифференциации мигрантов на m классов. Для этого введем дополнительный индекс в параметрах. Пусть $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, m\}$, $b_{i,l}$, $x_{i,l}$ и $u_{i,l}$ обозначают соответственно начальное количество потенциальных мигрантов, установившееся количество мигрантов и полезность пребывания в i-м регионе для класса l. Далее, для пары i, j регионов $(i \neq j)$ пусть $h_{ij,l}$ и $c_{ij,l}$ обозначают соответственно объем миграции класса l и затраты на переезд (перемещение) одного мигранта класса l из региона i в регион j. Теперь определим векторы

$$u = (u_{i,l})_{\{i \in \mathcal{N}, l \in \mathcal{M}\}}, \quad h = (h_{ij,l})_{\{i,j \in \mathcal{N}, i \neq j, l \in \mathcal{M}\}},$$

а также будем считать, что

$$c_{ij,l} = c_{ij,l}(h), \quad x_{i,l} = x_{i,l}(u).$$

Определим допустимое множество для объемов миграции

$$H = \left\{ h \;\middle|\; h_{ij,l} \geq 0 \;\; \forall j \in \mathcal{N},\; j \neq i, \sum_{j \in \mathcal{N},\, j \neq i} h_{ij,l} \leq b_{i,l} \;\; \forall i \in \mathcal{N};\; l \in \mathcal{M} \right\}.$$

Задача миграционного равновесия с учетом затрат перемещения и дифференциации классов будет состоять в определении пары векторов $(h^*, u^*) \in H \times \mathbb{R}^n$ таких, что выполняются условия

$$\sum_{l \in \mathcal{M}} \sum_{i,j \in \mathcal{N},\, i \neq j} \left[c_{ij,l}(h^*) + u^*_{i,l} - u^*_{j,l}) \right] (h_{ij,l} - h^*_{ij,l}) \geq 0 \quad \forall\, h \in H;$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N},\, j \neq i} h^*_{ji,l} - \sum_{j \in \mathcal{N},\, j \neq i} h^*_{ij,l} + b_{i,l} = x_{i,l}(u^*), \quad \forall\, i \in \mathcal{N},\; l \in \mathcal{M}.$$

Очевидно, что сделанные изменения не отражаются на структуре системы, поэтому для поиска решений здесь можно применять соответствующие модификации описанных итерационных методов. Изменения отразятся главным образом на способах реализации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №13-01-00029-а).

Summary

I.V. Konnov. A Migration Equilibrium Model with Inverse Utility Functions.

An equilibrium-type population migration model based on using inverse utility functions of points (regions) instead of the usual ones is suggested. It is shown that this approach makes it possible to formulate the model as an extended system of primal-dual variational inequalities. Based upon this approach, new iterative methods for finding the equilibrium state of the system are proposed.

Keywords: population migration model, inverse utility functions, system of primal-dual variational inequalities, iterative methods.

Литература

1. *Nagurney A.* Network economics: A variational inequality approach. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 346 p.
2. *Konnov I.V.* Equilibrium models and variational inequalities. – Amsterdam: Elsevier, 2007. – 248 p.
3. *Зуховицкий С.И., Поляк Р.А., Примак М.Е.* Об одной общей задаче отыскания равновесия // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 209, № 2. – С. 279–282.
4. *Булавский В.А.* Квазилинейное программирование и векторная оптимизация // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, № 4. – С. 788–791.
5. *Коннов И.В.* Двойственный подход для одного класса смешанных вариационных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2002. – Т. 42, № 9. – С. 1324–1337.
6. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
7. *Лапин А.В.* Итерационные методы решения сеточных вариационных неравенств. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2008. – 132 с.
8. *Коннов И.В.* Приближенный метод двойственного типа для систем вариационных неравенств // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 12. – С. 35–45.
9. *Коннов И.В.* Система прямо-двойственных вариационных неравенств в условиях монотонности // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2003. – Т. 43, № 10. – С. 1459–1466.
10. *Коннов И.В.* Метод расщепления с линейным поиском для прямо-двойственных вариационных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2003. – Т. 43, № 4. – С. 518–532.
11. *Коннов И.В.* Методы двойственного типа для обратных задач оптимизации и их обобщений // Докл. РАН. – 2004. – Т. 395, № 6. – С. 740–742.
12. *Konnov I.V.* Convex optimization problems with arbitrary right-hand side perturbations // Optimization. – 2005. – V. 54, No 2. – P. 131–147.
13. *Konnov I.V.* Dual approach for a class of implicit convex optimization problems // Math. Methods Oper. Res. – 2004. – V. 60, No 1. – P. 87–99.
14. *Дябилкин Д.А., Коннов И.В.* Метод частичной регуляризации для немонотонных вариационных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, № 3. – С. 355–364.
15. *Konnov I.V.* Splitting-type method for systems of variational inequalities // Comput. Oper. Res. – 2006. – V. 33, No 2. – P. 520–534.

Поступила в редакцию
18.12.12

Коннов Игорь Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *konn-igor@yandex.ru*