УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 148, кн. 3 Физико-математические науки *2006*

УДК 517.934

ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОБРАТНО СИЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов

Аннотация

Рассматривается краевая задача, формулируемая математически в виде смешанного вариационного неравенства с оператором, являющимся суммой нескольких обратно сильно монотонных, вообще говоря, не потенциальных операторов, в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов. Для решения рассматриваемого вариационного неравенства предложен итерационный метод расщепления, не требующий обращения исходных операторов. Исследована сходимость метода.

Введение

Настоящая статья является развитием работ авторов [1–3]. В работе рассматривается краевая задача для системы многозначных уравнений. Математически задача формулируется в виде смешанного вариационного неравенства с оператором, являющимся суммой нескольких обратно сильно монотонных, вообще говоря, не потенциальных операторов, в гильбертовом пространстве. Функционал, входящий в это вариационное неравенство, является суммой нескольких полунепрерывных снизу выпуклых собственных функционалов. Для решения этого неравенства предлагается использовать метод расщепления. Доказана слабая сходимость итерационной последовательности к решению исходного вариационного неравенства. В случае, когда один из операторов является сильно монотонным и липшиц-непрерывным, доказана сильная сходимость итерационной последовательности к решению исходного вариационного неравенства.

Для рассматриваемой краевой задачи каждый шаг метода сводится фактически к решению задач Дирихле для уравнения Пуассона, число которых равно размерности системы.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 1$, – ограниченная область с липшиц-непрерывной границей Γ. Рассматривается следующая краевая задача для системы уравнений относительно вектор-функции $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v_j^{(i)}(x) + d_{ij}(x)\, u_j(x) \right) = f_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{2}$$

$$-v_j\,(x) \in \frac{g_j(|\partial u(x)/\partial x_j|)}{|\partial u(x)/\partial x_j|}\,\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – заданная функция, $D = \{d_{ij}\}$ – вообще говоря, несимметричная матрица, удовлетворяющая условию

$$(D\xi,\, \xi) \geq \alpha_0\, (D\xi,\, D\xi),\ \alpha_0 > 0 \quad \forall\, \xi \in R^n. \tag{4}$$

Считаем, что многозначные функции g_j могут быть представлены в виде:

$$g_j(\xi) = g_{0j}(\xi) + \vartheta_j\, h(\xi - \beta_j), \quad \xi \in R^1, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где β_j, ϑ_j – заданные неотрицательные константы, h – многозначная функция, определенная по формуле

$$h(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [0,1], & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0, \end{cases}$$

g_{0j} – однозначные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$g_{0j}\,(\xi) = \begin{cases} 0\,, & \xi \leq \beta_j, \\ g_j^*\,(\xi - \beta_j\,), & \xi \geq \beta_j, \end{cases} \tag{5}$$

где $g_j^* : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – непрерывные функции, такие, что

$$g_j^*\,(0) = 0, \quad g_j^*\,(\xi) > g_j^*\,(\zeta) \quad \forall\, \xi > \zeta \geq 0, \tag{6}$$

существуют такие постоянные $k_j > 0$, $\xi_j^* \geq 0$, что

$$g_j^*(\xi_j^*) \geq k_j\, \xi_j^*, \quad g_j^*(\xi) - g_j^*(\zeta) \geq k_j\, (\xi - \zeta) \quad \forall\, \xi \geq \zeta \geq \xi_j^*, \tag{7}$$

существуют такие постоянные $\sigma_j > 0$, что

$$|\, g_j^*(\xi) - g_j^*(\zeta)\,| \leq \frac{1}{\sigma_j}\, |\, \xi - \zeta\,| \quad \forall \xi, \zeta \geq 0. \tag{8}$$

Пусть $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)\right]^n$, $H = [L_2(\Omega)]^n$, $(\cdot,\cdot)_V$, $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярные произведения в V и H соответственно, $B_j = \partial/\partial x_j : V \to H$, $j = 1, 2, \ldots, n,$ – линейные непрерывные операторы. Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u \in V$, являющуюся решением вариационного неравенства

$$\begin{aligned}(A_0 u,\, \eta - u)_V &+ \sum_{j=1}^n (B_j^* \circ A_j \circ B_j\,(u),\, \eta - u)_V + \\ &+ F_0(\eta) - F_0(u) + \sum_{j=1}^n \Big[(F_j\,(B_j\, \eta) - F_j\,(B_j\, u) \Big] \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V,\end{aligned} \tag{9}$$

где $B_j^* : H \to V$, $j = 1, 2, \ldots, n,$ – двойственные к B_j операторы, операторы $A_0 : V \to V$ и $A_j : H \to H$, $j = 1, 2, \ldots, n,$ порождаются формами

$$(A_0 u, \eta)_V = \int\limits_\Omega (Du, \eta) dx,\ u, \eta \in V, \quad (A_j\, y,\, z)_H = \int\limits_\Omega (G_j\, y,\, z) dx,\ y, z \in H,$$

операторы $G_j : R^n \to R^n$ определены следующим образом:

$$G_j\, y = \begin{cases} g_{0j}\,(|y|)\, |y|^{-1}\, y\,, & y \neq 0, \\ 0\,, & y = 0, \end{cases}$$

а функционалы $F_0 : V \to R^1$ и $F_j : H \to R^1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определены по формулам

$$F_0(\eta) = -\int\limits_\Omega (f, \eta)\, dx,\ \eta \in V, \quad F_j\,(z) = \vartheta_j \int\limits_\Omega \mu(|z| - \beta_j\,)\, dx,\ z \in H,$$

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0, \\ \zeta, & \zeta \geq 0. \end{cases}$$

Справедлива [1]

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда оператор* A_0 *является обратно сильно монотонным, то есть*

$$(A_0\,\eta - A_0\,u\,,\,\eta - u)_V \geq \sigma_0\ \|\,A_0\,\eta - A_0\,u\,\|_V^2\,, \quad \sigma_0 > 0 \quad \forall\,u,\,\eta \in V. \tag{10}$$

Доказательство. Из (4) вытекает, что

$$|\,D\xi\,| \leq \alpha_0^{-1/2}\,(D\xi,\,\xi)^{1/2} \quad \forall\,\xi \in R^n,$$

следовательно,

$$|\,(D\xi,\,\zeta)\,| \leq \alpha_0^{-1/2}\,(D\xi,\,\xi)^{1/2}\,|\,\zeta\,| \quad \forall\,\xi,\,\zeta \in R^n,$$

поэтому

$$|\,(A_0\,u,\,\eta)_V\,| \leq \int\limits_\Omega |\,(D\,u,\,\eta)\,|\,d\,x \leq \alpha_0^{-1/2} \int\limits_\Omega (Du,\,Du)^{1/2}\,|\,\eta\,|\,d\,x \leq$$

$$\leq \alpha_0^{-1/2} \left(\int\limits_\Omega (Du,\,u)\,d\,x \right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |\,\eta\,|^2\,d\,x \right)^{1/2} = \alpha_0^{-1/2}\,(A_0\,u,\,u)_V^{1/2}\,\|\,\eta\,\|_H \leq$$

$$\leq \alpha_0^{-1/2}\,c_H\,(A_0\,u,\,u)_V^{1/2}\,\|\,\eta\,\|_V = \sigma_0^{-1/2}\,(A_0\,u,\,u)_V^{1/2}\,\|\,\eta\,\|_V,$$

где c_H – постоянная Фридрикса (константа вложения V в H), $\sigma_0 = \alpha_0 / c_H^2$.

Таким образом,

$$\|\,A_0\,u\,\|_V = \sup_{\eta \neq 0} \frac{|\,(A_0\,u,\,\eta)_V\,|}{\|\,\eta\,\|_V} \leq \sigma_0^{-1/2}\,(A_0\,u,\,u)_V^{1/2},$$

откуда в силу линейности A_0 и вытекает требуемое неравенство. □

Следуя [4], нетрудно проверить, что в силу условий (5)–(8) операторы A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, являются обратно сильно монотонным, то есть

$$(A_j\,y - A_j\,z\,,\,y - z)_H \geq \sigma_j\ \|\,A_j\,y - A_j\,z\|_H^2 \quad \forall\,y,\,z \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

а также коэрцитивными. В [5] установлено, что F_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, – выпуклые, липшиц-непрерывные функционалы. Из (10), (11) вытекает, что A_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, – монотонные и липшиц-непрерывные операторы.

Перечисленные выше свойства операторов A_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, а также функционалов F_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, обеспечивают разрешимость вариационного неравенства (9) (см. [6]).

[1] Доказательство получено проф. М.М. Карчевским.

2. Итерационный метод

В дальнейшем будем рассматривать абстрактное вариационное неравенство (9), постулируя свойства (10), (11) и считая $B_j : V \to H$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – линейными непрерывными операторами, а F_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, – выпуклыми, липшиц-непрерывными функционалами. Кроме того, будем предполагать, что $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j^* B_j : V \to V$ – оператор канонического изоморфизма, то есть

$$\sum_{j=1}^{n} \left(B_j^* B_j u, \eta \right)_V = (u, \eta)_V \qquad \forall\, u, \eta \in V. \tag{12}$$

Для решения вариационного неравенства (9) по аналогии с [3] рассмотрим следующий итерационный процесс.

Пусть $u^{(0)} \in V$, $y_j^{(0)} \in H$, $\lambda_j^{(0)} \in H$, $j = 0, 1, \ldots, n$ – произвольные элементы. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$, зная $y_j^{(k)}$, $\lambda_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определим $u^{(k+1)}$ как решение вариационного неравенства

$$\frac{1}{\tau_0} \left(u^{(k+1)} - u^{(k)}, \eta - u^{(k+1)} \right)_V + F_0(\eta) - F_0\left(u^{(k+1)}\right) + \left(A_0 u^{(k)}, \eta - u^{(k+1)} \right)_V +$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{n} B_j^* \lambda_j^{(k)} + r \sum_{j=1}^{n} B_j^* \left(B_j u^{(k)} - y_j^{(k)} \right), \eta - u^{(k+1)} \right)_V \geq 0 \quad \forall \eta \in V. \tag{13}$$

Затем находим $y_j^{(k+1)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, решая вариационные неравенства

$$\frac{1}{\tau_j} \left(y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}, z - y_j^{(k+1)} \right)_H + F_j(z) - F_j\left(y_j^{(k+1)}\right) + \left(A_j y_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)}\, z - y_j^{(k+1)} \right)_H +$$
$$+ r \left(y_j^{(k)} - B_j u^{(k+1)}, z - y_j^{(k+1)} \right)_H \geq 0 \quad \forall z \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Полагаем, наконец,

$$\lambda_j^{(k+1)} = \lambda_j^{(k)} + r \left(B_j u^{(k+1)} - y_j^{(k+1)} \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Здесь $\tau_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$ и $r > 0$ – итерационные параметры.

Обозначим через H^n прямое произведение n пространств H и введем в рассмотрение оператор $T : V \times H^n \times H^n \to V \times H^n \times H^n$, ставящий в соответствие вектору $q = (q_0, q_1, \ldots, q_{2n}) = (u, Y, \Lambda)$, $Y \in H^n$, $\Lambda \in H^n$ элемент $T\,q = (T_0\,q, T_1\,q, \ldots, T_{2n}\,q)$ следующим образом:

$$T_0\,q = \mathrm{Prox}_{\tau_0 F_0} \left(q_0 - \tau_0 \left[A_0\, q_0 + \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, q_{n+j} + r \sum_{j=1}^{n} B_j^* \left(B_j\, q_0 - q_j \right) \right] \right), \tag{16}$$

$$T_j q = \mathrm{Prox}_{\tau_j F_j} \left(q_j - \tau_j \left[A_j\, q_j - q_{n+j} + r\, (q_j - B_j\, T_0\, q) \right] \right), \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

$$T_{n+j}\, q = q_{n+j} + r\, (B_j\, T_0\, q - T_j\, q), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Здесь $\mathrm{Prox}_G : Z \to Z$ – проксимальное отображение (см., например, [6]), ставящее в соответствие произвольному элементу p гильбертова пространства Z элемент $v = \mathrm{Prox}_G(p)$, являющийся решением задачи минимизации

$$\frac{1}{2} \left\| v - p \right\|_Z^2 + G(v) = \min_{z \in P} \left\{ \frac{1}{2} \left\| z - p \right\|_Z^2 + G(z) \right\},$$

которая эквивалентна (см. [6]) в случае, когда G – выпуклый, собственный, полунепрерывный снизу функционал, вариационному неравенству

$$(v-p,\, z-v)_Z + G(z) - G(v) \geq 0 \quad \forall\, z \in Z. \tag{19}$$

Нетрудно проверить, что проксимальное отображение является жестко нерастягивающим, то есть

$$\left\| \operatorname{Prox}_G(p) - \operatorname{Prox}_G(z) \right\|_Z^2 \leq (\operatorname{Prox}_G(p) - \operatorname{Prox}_G(z)\,,\, p-z)_Z \qquad \forall\, p,\, z \in Z.$$

Вводя обозначения $Y^{(k)} = \left(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}\right)$, $\Lambda^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}\right)$, и используя определение проксимального отображения на основе вариационного неравенства (19) , легко установить, что итерационный процесс (13)–(15) записывается в виде

$$\begin{cases} q^{(0)} - \quad \text{произвольный элемент}, \\ \\ q^{(k+1)} = Tq^{(k)},\ q^{(k)} = \left(u^{(k)}, Y^{(k)}, \Lambda^{(k)}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{20}$$

то есть T – оператор перехода этого итерационного процесса.

Справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор* $T : V \times H^n \times H^n \to V \times H^n \times H^n$ *определен с помощью соотношений* (16)–(18). *Точка* $q = (u, Y, \Lambda)$, *где* $u \in V$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H^n$, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in H^n$, *является неподвижной точкой оператора* T *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$y_j = B_j\, u, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

$$\lambda_j \in \partial F_j(y_j) + A_j\, y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} B_j^*\, \lambda_j \in \partial F_0(u) + A_0\, u. \tag{23}$$

При этом первая компонента u *любой неподвижной точки* q *оператора* T *является решением задачи* (9).

Доказательство. Пусть $q = (u, Y, \Lambda)$ – неподвижная точка оператора T, то есть в соответствии с (16)–(18)

$$u = \operatorname{Prox}_{\tau_0 F_0}\left(u - \tau_0 \left[A_0\, u + \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, \lambda_j + r \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, (B_j\, u - y_j) \right] \right), \tag{24}$$

$$y_j = \operatorname{Prox}_{\tau_j F_j}\left(y_j - \tau_j \left[A_j\, y_j - \lambda_j + r\, (y_j - B_j\, u) \right] \right), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{25}$$

$$\lambda_j = \lambda_j + r\, (B_j\, u - y_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Равенства (26), очевидно, эквивалентны равенствам (21).

Равенства (25) с учетом (21) в соответствии с определением проксимального отображения на основе вариационного неравенства (19) эквивалентны вариационным неравенствам

$$\tau_j\, (A_j\, y_j - \lambda_j\,,\, z - y_j)_H + \tau_j\, F_j(z) - \tau_j\, F_j(y_j) \geq 0 \quad \forall\, z \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$(A_j\, y_j - \lambda_j\, ,\, z - y_j\,)_H + F_j(z) - F_j(y_j) \geq 0 \quad \forall\, z \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

каждое из которых эквивалентно соотношению $-A_j y_j - \lambda_j \in \partial F_j(y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то есть имеют место включения (22).

Аналогичным образом имеем, что равенство (24) эквивалентно вариационному неравенству

$$\left(A_0\, u + \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, \lambda_j\, ,\, \eta - u \right)_V + F_0(\eta) - F_0(u) \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V, \tag{28}$$

то есть включению (23).

Таким образом, установлена эквивалентность равенства $Tq = q$ соотношениям (21)–(23).

Проверим теперь, что первая компонента u любой неподвижной точки q оператора T является решением задачи (9). Для этого в неравенствах (27) заменим, пользуясь равенствами (21), y_j на $B_j\, u$, $j = 1, 2, \ldots, n$, положим $z = B_j\, \eta$, где η – произвольный элемент из V, а затем сложим полученные неравенства. Тогда, пользуясь определением сопряженного оператора, имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} (B_j^* \circ A_j \circ B_j\, (u),\, \eta - u)_V + \sum_{j=1}^{n} \Big[F_j\, (B_j\, \eta) - F_j\, (B_j\, u) \Big] \geq 0 \quad \forall\, \eta \in V. \tag{29}$$

Складывая неравенства (28) и (29), получаем, что u – решение вариационного неравенства (9). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть существует решение задачи* (9), *выполнено условие*

$$\exists\, u^* \in \operatorname{dom} F_0 :\ B_j\, u^* \in \operatorname{dom} F_j;\ F_j \text{ непрерывен в точке } B_j\, u^*,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Тогда множество неподвижных точек оператора T *не пусто.*

Доказательство. Пусть u – решение задачи (9), $y_j = B_j\, u$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Вариационное неравенство (9) эквивалентно следующему включению

$$-A_0\, u - \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, A_j\, y_j \in \partial \left[F_0 + \sum_{j=1}^{n} F_j \circ B_j \right] (u). \tag{31}$$

Из предложений 5.6, 5.7 [6, с. 35, 36] при выполнении условий (30) следует, что

$$\partial \left[F_0 + \sum_{j=1}^{n} F_j \circ B_j \right] (u) = \partial\, F_0(u) + \sum_{j=1}^{n} \partial\, (F_j \circ B_j\,)\, (u) = $$
$$= \partial\, F_0(u) + \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, \partial\, F_j(y_j). \tag{32}$$

Из равенства (32) и соотношения (31) вытекает существование таких элементов $v \in \partial\, F_0(u)$, $z_j \in \partial F_j(y_j\,)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, что справедливо равенство

$$-A_0\, u - \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, A_j\, y_j = v + \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, z_j,$$

или

$$-A_0\, u - \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, (\, A_j\, y_j + z_j\,) = v.$$

Пусть $\lambda_j = A_j\, y_j + z_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, тогда имеют место включения

$$-A_0\, u - \sum_{j=1}^{n} B_j^*\, \lambda_j = v \in \partial\, F_0(u); \quad -A_j\, y_j + \lambda_j = z \in \partial F_j(y_j\,), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то есть справедливы соотношения (22), (23). Кроме того, по построению выполнены равенства (21). Но тогда согласно теоремы 1 точка $q = (\, u, Y, \Lambda\,)$, где $Y = (\, y_1, y_2, \ldots, y_n\,) \in H^{\,n}$, $\Lambda = (\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\,) \in H^{\,n}$, является неподвижной точкой оператора T. Теорема доказана. □

3. Сходимость итерационного метода

Введем в рассмотрение гильбертово пространство $Q = V \times H^{\,n} \times H^{\,n}$ со скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_Q = \frac{1 - \tau_0\, r}{\tau_0}\, (\cdot,\cdot)_V + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\tau_j}\, (\cdot,\cdot)_H + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} (\cdot,\cdot)_H,$$

где r, τ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, – положительные постоянные, причем $\tau_j\, r < 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

При исследовании сходимости итерационного процесса (20) нам потребуется следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (10)–(12),

$$\tau_j < \frac{2\,\sigma_j}{2\,\sigma_j\, r + 1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{33}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим. Более того, для любых q, p из Q справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\|\, Tq - Tp\,\|_Q^2 + \delta_0\, (\, A_0\, q_0 - A_0\, p_0\,,\, q_0 - p_0\,)_V + \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, (A_j\, q_j - A_j\, p_j\,,\, q_j - p_j\,)_H + \\ &+ \frac{1}{\tau_0\,(1 - \tau_0\, r)} \left\| (1 - \tau_j\, r) \Big[(q_0 - T_0\, q\,) - (p_0 - T_0\, p\,) \Big] - \tau_0\, (A_0\, q_0 - A_0\, p_0) \right\|_V^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\tau_j\,(1 - \tau_j\, r)} \left\| (1 - \tau_j\, r) \Big[(q_j - T_j\, q\,) - (p_j - T_j\, p\,) \Big] - \tau_j\, (A_j\, q_j - A_j\, p_j) \right\|_H^2 + \\ &+ r \sum_{j=1}^{n} \|\, (\, q_j - B_j\, T_0\, q\,) - (\, p_j - B_j\, T_0\, p\,)\,\|_H^2 \le \|\, q - p\,\|_Q^2, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\delta_j = 2 - \tau_j\,/[\,\sigma_j\,(1 - \tau_j\, r)\,]$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Заметим предварительно, что в силу условий (33) выполнены неравенства $\tau_j\, r < 1$, $\delta_j > 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$, а значит, из (10), (11) и (34) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

С учетом (12) перепишем равенство (16) в виде

$$T_0\, q = \mathrm{Prox}_{\tau_0\, F_0} \left(q_0 - \tau_0\, A_0\, q_0 - \tau_0\, r\, q_0 - \tau_0 \sum_{j=1}^{n} B_j^* \, (\, q_{n+j} - r\, q_j \,) \right) =$$

$$= \mathrm{Prox}_{\tau_0\, F_0} \left(S_0\, q_0 - \tau_0 \sum_{j=1}^{n} B_j^* \, (\, q_{n+j} - r\, q_j \,) \right) ,$$

где оператор $S_0 : V \to V$, определяется соотношением $S_0 = (1 - \tau_0\, r)\, E - \tau_0\, A_0$.

Следуя [3], в силу (10) для любых $q_0, p_0 \in V$ имеем, что

$$\|\, S_0\, p_0 - S_0\, q_0\, \|_V^2 = (1 - \tau_0\, r)^2\, \|\, q_0 - p_0\, \|_V^2 - 2\, \tau_0\, (1 - \tau_0\, r)\, (A_0\, q_0 - A_0\, p_0\, , q_0 - p_0\,)_V +$$
$$+ \tau_0^2\, \| A_0\, q_0 - A_0\, p_0\, \|_V^2 \le (1 - \tau_0\, r)^2\, \|\, q_0 - p_0 \|_V^2 -$$
$$- 2\, \tau_0 \left(1 - \tau_0\, \frac{2\, \sigma_0\, r + 1}{2\, \sigma_0} \right) (A_0\, q_0 - A_0\, p_0,\, q_0 - p_0\,)_V\, ,$$

то есть

$$\|\, S_0 p_0 - S_0 q_0\, \|_V^2 \le$$
$$\le (1 - \tau_0\, r)^2\, \|\, q_0 - p_0 \|_V^2 - \tau_0\, (1 - \tau_0\, r)\, \delta_0\, (A_0\, q_0 - A_0\, p_0,\, q_0 - p_0\,)_V\, . \qquad (35)$$

Далее, используя жесткую нерастягиваемость проксимального отображения $\mathrm{Prox}_{\tau_0\, F_0}$, имеем

$$\|\, T_0\, q - T_0\, p\, \|_V^2 \le (T_0\, q - T_0\, p,\, S_0\, q_0 - S_0\, p_0\,)_V -$$
$$- \tau_0 \sum_{j=1}^{n} \big(B_j^* \, (\, q_{n+j} - p_{\, n+j}\,) - r\, B_j^* \, (q_j - p_j\,)\, ,\, T_0\, q - T_0\, p \big)_V\, .$$

Преобразуя первое слагаемой в правой части при помощью равенства

$$(v, w)_Z = \frac{1}{2\, \varepsilon}\, \|v\|_Z^2 - \frac{1}{2\, \varepsilon}\, \|v - \varepsilon\, w\, \|_Z^2 + \frac{\varepsilon}{2}\, \|w\|_Z^2 \quad \forall\, v, w \in Z,\ \forall\, \varepsilon > 0 \qquad (36)$$

с $Z = V$, $v = S_0\, q_0 - S_0\, p_0$, $w = T_0\, q - T_0\, p$, получаем

$$\|\, T_0\, q - T_0\, p\, \|_V^2 \le \frac{1}{2\, \varepsilon}\, \|S_0\, q_0 - S_0\, p_0\, \|_V^2 + \frac{\varepsilon}{2}\, \|T_0\, q - T_0\, p\, \|_V^2 -$$
$$- \frac{1}{2\, \varepsilon}\, \|(S_0\, q_0 - S_0\, p_0\,) - \varepsilon\, (T_0\, q - T_0\, p\,)\, \|_V^2 -$$
$$- \tau_0 \sum_{j=1}^{n} \big(B_j^* \, (\, q_{n+j} - p_{\, n+j}\,) - r\, B_j^* \, (q_j - p_j\,)\, ,\, T_0\, q - T_0\, p \big)_V\, .$$

Отсюда в силу (35) следует, что

$$\frac{2 - \varepsilon}{2}\, \|\, T_0\, q - T_0\, p\, \|_V^2 \le \frac{(1 - \tau_0\, r)^2}{2\, \varepsilon}\, \|q_0 - p_0\, \|_V^2 -$$
$$- \frac{\tau_0\, (1 - \tau_0\, r)\, \delta_0}{2\, \varepsilon}\, (A_0\, q_0 - A_0\, p_0,\, q_0 - p_0\,)_V -$$
$$- \frac{1}{2\, \varepsilon}\, \|(1 - \tau_0\, r)\, (q_0 - p_0\,) - \tau_0\, (A_0\, q_0 - A_0\, p_0\,) - \varepsilon\, (T_0\, q - T_0\, p\,)\, \|_V^2 -$$
$$- \tau_0 \sum_{j=1}^{n} \big(B_j^* \, (\, q_{n+j} - p_{\, n+j}\,) - r\, B_j^* \, (q_j - p_j\,)\, ,\, T_0\, q - T_0\, p \big)_V\, .$$

Разделив обе части этого неравенства на τ_0 и положив $\varepsilon = 1 - \tau_0\, r$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1+\tau_0\, r}{2\,\tau_0}\;\|\,T_0\,q - T_0\,p\,\|_V^2 + \frac{\delta_0}{2}\;(A_0\,q_0 - A_0\,p_0,\, q_0 - p_0\,)_V + \\ + \frac{1}{2\,(1-\tau_0\,r)\,\tau_0}\;\Big\|(1-\tau_0\,r)\;\Big[(q_0 - T_0\,q) - (p_0 - T_0\,p)\Big] - \tau_0\,(A_0\,q_0 - A_0\,p_0)\Big\|_V^2 \le \\ \le \frac{1-\tau_0\,r}{2\,\tau_0}\;\|q_0 - p_0\,\|_V^2 - \sum_{j=1}^{n}\,(\,q_{\,n+j} - p_{\,n+j}\,,\, B_j\,(T_0\,q - T_0\,p\,))_H + \\ + r\sum_{j=1}^{n}\,(\,q_j - p_j\,,\, B_j\,(T_0\,q - T_0\,p\,)\,)_H\;,\end{gathered}$$

откуда после преобразования величин $(\,q_j - p_j\,,\, B_j\,(T_0\,q - T_0\,p\,)\,)_H$ при помощи равенства (35) с $Z = H$, $\varepsilon = 1$, $v = q_j - p_j$, $w = B_j\,(T_0\,q - T_0\,p\,)$ следует, что

$$\begin{gathered}\frac{1+\tau_0\, r}{2\,\tau_0}\;\|\,T_0\,q - T_0\,p\,\|_V^2 + \frac{\delta_0}{2}\;(A_0\,q_0 - A_0\,p_0,\, q_0 - p_0\,)_V + \\ + \frac{1}{2\,(1-\tau_0\,r)\,\tau_0}\;\Big\|(1-\tau_0\,r)\;\Big[(q_0 - T_0\,q) - (p_0 - T_0\,p)\Big] - \tau_0\,(A_0\,q_0 - A_0\,p_0)\Big\|_V^2 + \\ + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{n}\,\|\,(q_j - B_j\,T_0\,q) - (p_j - B_j\,T_0\,p)\,\|_H^2 \le \\ \le \frac{1-\tau_0\,r}{2\,\tau_0}\;\|q_0 - p_0\,\|_V^2 + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{n}\,\|\,q_j - p_j\,\|_H^2 + \\ + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{n}\,\|\,B_j\,(T_0\,q - T_0\,p\,)\,\|_H^2 - \sum_{j=1}^{n}\,(\,q_{\,n+j} - p_{\,n+j}\,,\, B_j\,(T_0\,q - T_0\,p\,))_H\;. \qquad (37)\end{gathered}$$

Теперь для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ перепишем равенство (17) в виде

$$\begin{gathered}T_j\,q = \mathrm{Prox}_{\tau_j\,F_j}\Big(\,q_j - \tau_j\,r\,q_j - \tau_j\,A_j\,q_j + \tau_j\,q_{\,n+j} + \tau_j\,B_j\,T_{\,0}\,q\,\Big) = \\ = \mathrm{Prox}_{\tau_j\,F_j}\Big(\,S_j\,q_j + \tau_j\,q_{\,n+j} + \tau_j\,B_j\,T_{\,0}\,q\,\Big)\;,\end{gathered}$$

где оператор $S_j : H \to H$ определяется соотношением $S_j = (1 - \tau_j\,r)\,E - \tau_j\,A_j$.

В силу (11) по аналогии с (35) получаем оценку

$$\begin{gathered}\|\,S_j\,p_j - S_j\,q_j\,\|_H^2 \le \\ \le (1-\tau_j\,r)^2\;\|q_j - p_j\,\|_H^2 - \tau_j\,(1-\tau_j\,r)\,\delta_j\;(A_j\,q_j - A_j\,p_j\,,\, q_j - p_j\,)_H\,, \qquad (38)\end{gathered}$$

а в силу жесткой нерастягиваемости проксимального отображения $\mathrm{Prox}_{\tau_j\,F_j}$ и равенства (35) с произвольным $\varepsilon > 0$, $Z = H$, $v = S_j\,q_j - S_j\,p_j$, $w = T_j\,q - T_j\,p$ имеем

$$\begin{gathered}\|\,T_j\,q - T_j\,p\,\|_H^2 \le (\,T_j\,q - T_j\,p\,,\, S_j\,q_j - S_j\,p_j\,)_H + \\ + \tau_j\,r\;(\,T_j\,q - T_j\,p\,,\, B_j\,(\,T_0\,q - T_0\,p\,)\,)_H + \\ + \tau_j\;(\,T_j\,q - T_j\,p\,,\, q_{\,n+j} - p_{\,n+j}\,)_H = \frac{1}{2\,\varepsilon}\;\|\,S_j\,q_j - S_j\,p_j\,\|_H^2 + \frac{\varepsilon}{2}\;\|\,T_j\,q - T_j\,p\,\|_H^2 - \\ - \frac{1}{2\,\varepsilon}\;\|\,(S_j\,q_j - S_j\,p_j\,) - \varepsilon\,(\,T_j\,q - T_j\,p\,)\|_H^2 + \\ + \tau_j\,r\;(\,T_j\,q - T_j\,p\,,\, B_j\,(\,T_0\,q - T_0\,p\,))_H + \tau_j\;(\,T_j\,q - T_j\,p\,,\, q_{\,n+j} - p_{\,n+j}\,)_H\,.\end{gathered}$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon = 1-\tau_j\, r$ и используя полученную выше оценку (38) для $\|S_j\, q_j - S_j\, p_j\,\|_H^2$, приходим к неравенству

$$\begin{gathered}\frac{1+\tau_j\, r}{2\,\tau_j}\;\|\,T_j\, q - T_j\, p\,\|_H^2 + \frac{\delta_j}{2}\;(A_j\, q_j - A_j\, p_j\,,\, q_j - p_j\,)_H + \\ + \frac{1}{2\,(1-\tau_j\, r)\tau_j}\;\Big\|\,(1-\tau_j\, r)\;\Big[\,(q_j - T_j\, q) - (p_j - T_j\, p)\Big] - \tau_j\,(A_j\, q_j - A_j\, p_j\,)\,\Big\|_H^2 \le \\ \le \frac{1-\tau_j\, r}{2\,\tau_j}\;\|\,q_j - p_j\,\|_H^2 - (\,T_j\, q - T_j\, p\,,\, q_{n+j} - p_{n+j}\,)_H + \\ + r\;(\,T_j\, q - T_j\, p\,,\, B_j\,(\,T_0\, q - T_0\, p\,)\,)_H\,,\end{gathered}$$

которое после применения равенства (35) с $\varepsilon = 1$, $\quad Z = H$, $v = T_j\, q - T_j\, p$, $w = B_j\,(\,T_0\, q - T_0\, p\,)$ для преобразования последнего слагаемого приобретает вид

$$\begin{gathered}\frac{1+\tau_j\, r}{2\,\tau_j}\;\|\,T_j\, q - T_j\, p\,\|_H^2 + \frac{\delta_j}{2}\;(A_j\, q_j - A_j\, p_j\,,\, q_j - p_j\,)_H + \\ + \frac{r}{2}\;\|\,(T_j\, q - B_j\, T_0\, q\,) - (T_j\, p - B_j\, T_0\, p\,)\,\|_H^2 + \\ + \frac{1}{2\,(1-\tau_j\, r)\tau_j}\;\Big\|\,(1-\tau_j\, r)\;\Big[\,(q_j - T_j\, q) - (p_j - T_j\, p)\Big] - \tau_j\,(A_j\, q_j - A_j\, p_j\,)\,\Big\|_H^2 \le \\ \le \frac{1-\tau_j\, r}{2\,\tau_j}\;\|\,q_j - p_j\,\|_H^2 + (\,q_{n+j} - p_{n+j}\,,\, T_j\, q - T_j\, p\,)_H + \\ + \frac{r}{2}\;\|\,T_j\, q - T_j\, p\,\|_H^2 + \frac{r}{2}\;\|\,B_j\,(\,T_0\, q - T_0\, p)\,\|_H^2\,. \qquad (39)\end{gathered}$$

Далее, для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ в силу (18) имеем

$$\begin{gathered}\|\,T_{n+j}\, q - T_{n+j}\, p\,\|_H^2 = \|\,q_{n+j} - p_{n+j}\,\|_H^2 + \\ + 2\, r\;(\,q_{n+j} - p_{n+j}\,,\, B_j\,(T_0\, q - T_0\, p\,)\,)_H - \\ - 2\, r\;(\,q_{n+j} - p_{n+j}\,,\, T_j\, q - T_j\, p\,)_H + r^2\;\|\,B_j\,(\,T_0\, q - T_0\, p\,) - (T_j\, q - T_j\, p\,)\,\|_H^2\,,\end{gathered}$$

откуда вытекает, что

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\, r}\;\|\,T_{n+j}\, q - T_{n+j}\, p\,\|_H^2 = \frac{1}{2\, r}\;\|\,q_{n+j} - p_{n+j}\,\|_H^2 + \\ + (\,q_{n+j} - p_{n+j}\,,\, B_j\,(T_0 q - T_0 p\,)\,)_H - \\ - (\,q_{n+j} - p_{n+j}\,,\, T_j\, q - T_j\, p\,)_H + \frac{r}{2}\;\|\,B_j\,(T_0\, q - T_0\, p\,) - (T_j\, q - T_j\, p\,)\,\|_H^2\,. \qquad (40)\end{gathered}$$

Просуммируем соотношения (39) и (40) по $j = 1, 2, \ldots, n$, а сложим эти результаты с (37) и умножим полученное неравенство на 2:

$$\begin{gathered}\frac{1+\tau_0\, r}{\tau_0}\;\|\,T_0\, q - T_0\, p\,\|_V^2 + \delta_0\;(A_0\, q_0 - A_0\, p_0,\, q_0 - p_0\,)_V + \\ + \frac{1}{(1-\tau_0\, r)\,\tau_0}\;\Big\|(1-\tau_0\, r)\;\Big[\,(q_0 - T_0\, q) - (p_0 - T_0\, p)\Big] - \tau_0\,(A_0\, q_0 - A_0\, p_0)\,\Big\|_V^2 + \\ + r\sum_{j=1}^{n}\;\|\,(q_j - B_j\, T_0\, q) - (p_j - B_j\, T_0\, p)\,\|_H^2 + \\ + \sum_{j=1}^{n}\frac{1+\tau_j\, r}{\tau_j}\;\|\,T_j\, q - T_j\, p\,\|_H^2 + \sum_{j=1}^{n}\delta_j\;(A_j\, q_j - A_j\, p_j\,,\, q_j - p_j\,)_H +\end{gathered}$$

$$+ r \sum_{j=1}^{n} \| (T_j q - B_j T_0 q) - (T_j p - B_j T_0 p) \|_H^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-\tau_j r)\tau_j} \left\| (1-\tau_j r) \left[(q_j - T_j q) - (p_j - T_j p) \right] - \tau_j (A_j q_j - A_j p_j) \right\|_H^2 +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} \| T_{n+j} q - T_{n+j} p \|_H^2 \le \frac{1-\tau_0 r}{\tau_0} \|q_0 - p_0\|_V^2 + r \sum_{j=1}^{n} \| q_j - p_j \|_H^2 +$$

$$+ r \sum_{j=1}^{n} \| B_j (T_0 q - T_0 p) \|_H^2 - 2 \sum_{j=1}^{n} (q_{n+j} - p_{n+j} , B_j (T_0 q - T_0 p))_H +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{1-\tau_j r}{\tau_j} \| q_j - p_j \|_H^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} (q_{n+j} - p_{n+j} , T_j q - T_j p)_H +$$

$$+ r \sum_{j=1}^{n} \| T_j q - T_j p \|_H^2 + r \sum_{j=1}^{n} \| B_j (T_0 q - T_0 p) \|_H^2 +$$

$$+ \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} \| q_{n+j} - p_{n+j} \|_H^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} (q_{n+j} - p_{n+j} , B_j (T_0 q - T_0 p))_H -$$

$$- 2 \sum_{j=1}^{n} (q_{n+j} - p_{n+j} , T_j q - T_j p)_H + r \sum_{j=1}^{n} \| B_j (T_0 q - T_0 p) - (T_j q - T_j p) \|_H^2 .$$

Заметим теперь, что в силу (12)

$$\sum_{j=1}^{n} \| B_j \eta \|_H^2 = \| \eta \|_V^2 \qquad \forall \eta \in V. \tag{41}$$

С учетом этого соотношения после несложных выкладок последнее неравенство приобретет вид:

$$\frac{1+\tau_0 r}{\tau_0} \| T_0 q - T_0 p \|_V^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1+\tau_j r}{\tau_j} \| T_j q - T_j p \|_H^2 + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} \| T_{n+j} q - T_{n+j} p \|_H^2 +$$

$$+ \delta_0 \, (A_0 q_0 - A_0 p_0, \, q_0 - p_0)_V + \sum_{j=1}^{n} \delta_j \, (A_j q_j - A_j p_j , \, q_j - p_j)_H +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-\tau_j r)\tau_j} \left\| (1-\tau_j r) \left[(q_j - T_j q) - (p_j - T_j p) \right] - \tau_j (A_j q_j - A_j p_j) \right\|_H^2 +$$

$$+ \frac{1}{(1-\tau_0 r)\tau_0} \left\| (1-\tau_0 r) \left[(q_0 - T_0 q) - (p_0 - T_0 p) \right] - \tau_0 (A_0 q_0 - A_0 p_0) \right\|_V^2 +$$

$$+ r \sum_{j=1}^{n} \| (q_j - B_j T_0 q) - (p_j - B_j T_0 p) \|_H^2 \le$$

$$\le \frac{1-\tau_0 r}{\tau_0} \|q_0 - p_0\|_V^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\tau_j} \| q_j - p_j \|_H^2 + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} \| q_{n+j} - p_{n+j} \|_H^2 ,$$

то есть неравенство (34) справедливо. Теорема доказана. □

Напомним (см. [7]), что оператор $T : Q \to Q$ называется асимптотически регулярным, если $T^{k+1} q - T^k q \to 0$ при $k \to +\infty$ для любого $q \in Q$.

Справедлива

Теорема 4. *Пусть оператор* T *имеет по крайней мере одну неподвижную точку и выполнены условия* (10)–(12), (33). *Тогда итерационная последовательность* $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, *построенная согласно* (20), *сходится слабо к* q^* *в* Q *при* $k \to +\infty$, q^* *является неподвижной точкой оператора* T, *справедливы равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k)} \right\|_H = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{42}$$

и оператор $T: Q \to Q$ *является асимптотически регулярным, то есть*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k+1)} - q^{(k)} \right\|_Q = 0. \tag{43}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (34), положив в нем $q = q^{(k)}$ и считая p неподвижной точкой оператора T (по условиям настоящей теоремы существует хотя бы одна такая точка). По определению итерационной последовательности $Tq^{(k)} = q^{(k+1)}$, для неподвижной точки справедливы равенства $p_j = T_j\, p$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Далее, согласно теореме 1 выполнены соотношения $p_j = B_j\, T_0\, p = B_j\, p_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. С учетом вышесказанного получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\| q^{(k+1)} - p \right\|_Q^2 + \delta_0 \left(A_0\, u^{(k)} - A_0\, p_0\,,\ u^{(k)} - p_0 \right)_V + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^n \delta_j \left(A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j\,,\, y_j^{(k)} - p_j \right)_H + \\
&+ \frac{1}{\tau_0\,(1-\tau_0\, r)} \left\| (1-\tau_0\, r)\,(u^{(k)} - u^{(k+1)}) - \tau_0\,(A_0\, u^{(k)} - A_0\, p_0) \right\|_V^2 + \\
&+ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_j\,(1-\tau_j\, r)} \left\| (1-\tau_j\, r)\,(y_j^{(k)} - y_j^{(k+1)}) - \tau_j\,(A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j) \right\|_H^2 + \\
&\qquad + r \sum_{j=1}^n \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)} \right\|_H^2 \le \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q^2,
\end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает, что числовая последовательность $\left\{ \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q \right\}_{k=0}^{+\infty}$ не возрастает, и, следовательно, имеет конечный предел:

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q < +\infty,$$

и значит, выполнены соотношения:

$$\lim_{k\to+\infty} \left(A_0\, u^{(k)} - A_0\, p_0\,,\, u^{(k)} - p_0 \right)_V = 0, \tag{44}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left(A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j\,,\, y_j^{(k)} - p_j \right)_H = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{45}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)} \right\|_H = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{46}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| (1-\tau_0\, r) \left(u^{(k)} - u^{(k+1)} \right) - \tau_0 \left(A_0\, u^{(k)} - A_0\, p_0 \right) \right\|_V = 0, \tag{47}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| (1-\tau_j r) \left(y_j^{(k)} - y_j^{(k+1)} \right) - \tau_j \left(A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j \right) \right\|_H = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{48}$$

Используя (10), (11), (44) и (45), получаем

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| A_0\, u^{(k)} - A_0\, p_0 \right\|_V = 0,\ \lim_{k\to+\infty} \left\| A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j \right\|_H = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \quad (49)$$

Из (47)–(49) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| u^{(k)} - u^{(k+1)} \right\|_V = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \left\| y_j^{(k)} - y_j^{(k+1)} \right\|_H = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (50)$$

Далее, используя (41), (46), (50), из неравенства

$$\left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k)} \right\|_H \le \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)} \right\|_H + \left\| B_j\, (u^{(k)} - u^{(k+1)}\,) \right\|_H \le$$
$$\le \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)} \right\|_H + \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| B_i\, (u^{(k)} - u^{(k+1)}\,) \right\|_H^2 \right)^{1/2} =$$
$$= \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)} \right\|_H + \left\| u^{(k)} - u^{(k+1)} \right\|_V, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

получаем соотношения (42). Из (18) и (42) имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(k+1)} \right\|_H = r \lim_{k\to+\infty} \left\| y_j^{(k+1)} - B_j u^{(k+1)} \right\|_H = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n. \quad (51)$$

Равенства (50), (51) означают, что выполнено условие (43), то есть T – асимптотически регулярный оператор. Поскольку к тому же оператор T по условиям настоящей теоремы имеет непустое множество неподвижных точек и является в силу теоремы 3 нерастягивающим, то из [8] следует, что итерационная последовательность $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$, построенная согласно (20), сходится слабо в Q при $k \to +\infty$, ее предел q^* является неподвижной точкой оператора T. Теорема доказана. □

Отметим, что если выполнены условия теоремы 1, то из теорем 2, 4 вытекает, что последовательности $\left\{ u^{(k)} \right\}_{k=0}^{+\infty}$, $\left\{ y_j^{(k)} \right\}_{k=0}^{+\infty}$, построенные согласно (13)–(15), сходятся слабо к u в V и к $B_j\, u$ в H, $j = 1, 2, \ldots, n$, соответственно, при $k \to +\infty$, где u – решение вариационного неравенства (9).

4. Сходимость итерационного метода в случае сильно монотонного и липшиц-непрерывного оператора

Рассмотрим теперь случай, когда один из операторов, входящих в вариационнное неравенство (9), является сильно монотонным и липшиц-непрерывным, то есть либо вместо (10) выполнены условия

$$(A_0\, \eta - A_0\, u\,,\, \eta - u)_V \ge \mu_0\, \|\, \eta - u\,\|_V^2\,, \quad \forall\, u,\, \eta \in V, \quad (52)$$

$$\|\, A_0\, \eta - A_0\, u\,\|_V \le \gamma_0\, \|\, \eta - u\,\|_V\,, \quad \forall\, u,\, \eta \in V, \quad (53)$$

либо вместо (11) выполнены условия

$$(A_j\, y - A_j\, z\,,\, y - z)_H \ge \mu_j\, \|\, y - z\,\|_H^2 \quad \forall\, y,\, z \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (54)$$

$$\|\, A_j\, y - A_j\, z\,\|_H \le \gamma_j\, \|\, y - z\,\|_H \quad \forall\, y,\, z \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (55)$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (11), (12), (52), (53),

$$\tau_0 < \frac{2\,\mu_0}{2\,\mu_0\, r + \gamma_0^2}\,, \quad \tau_j < \frac{2\,\sigma_j}{2\,\sigma_j\, r + 1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{56}$$

Тогда оператор T *является нерастягивающим. Более того, для любых* q, p *из* Q *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\|\, Tq - Tp\,\|_Q^2 + \beta_0\, \|\, q_0 - p_0\,\|_V^2 + \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, (A_j\, q_j - A_j\, p_j\,,\, q_j - p_j\,)_H + \\ &+ \frac{1}{\tau_0\,(1-\tau_0\, r)} \left\| (1-\tau_j\, r) \Big[(q_0 - T_0\, q\,) - (p_0 - T_0\, p\,) \Big] - \tau_0\,(A_0\, q_0 - A_0\, p_0) \right\|_V^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\tau_j\,(1-\tau_j\, r)} \left\| (1-\tau_j\, r) \Big[(q_j - T_j\, q\,) - (p_j - T_j\, p\,) \Big] - \tau_j\,(A_j\, q_j - A_j\, p_j) \right\|_H^2 + \\ &\qquad + r \sum_{j=1}^{n} \|\,(\, q_j - B_j\, T_0\, q\,) - (\, p_j - B_j\, T_0\, p\,)\,\|_H^2 \le \|\, q - p\,\|_Q^2\,, \end{aligned} \tag{57}$$

где $\beta_0 = 2\,\mu_0 - \tau_0\,\gamma_0^2/(1-\tau_0\, r\,)$, $\delta_j = 2 - \tau_j\,/[\,\sigma_j\,(1-\tau_j\, r)\,]$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу условий (56) выполнены неравенства $\tau_0\, r < 1$, $\beta_0 > 0$, $\tau_j\, r < 1$, $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а значит, из (11) и (57) будет следовать нерастягиваемость оператора T.

Далее, для оператора $S_0 = (1-\tau_0\, r)\, E - \tau_0\, A_0$, введенного в теореме 3, используя (52) и (53), получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\|\, S_0\, q_0 - S_0\, p_0\,\|_V^2 = (\,1-\tau_0\, r\,)^2\, \|\, q_0 - p_0\,\|_V^2 - \\ &\quad - 2\,\tau_0\,(1-\tau_0\, r)\,(\,A_0\, q_0 - A_0\, p_0\,,\, q_0 - p_0\,)_V + \tau_0^2\, \|\, A_0\, q_0 - A_0\, p_0\,\|_V^2 \le \\ &\qquad \le (\,1-\tau_0\, r\,)^2\, \|\, q_0 - p_0\,\|_V^2 - \tau_0\,(2\,\mu_0 - \tau_0\,(\,2\, r\mu_0 + \gamma_0^2))\, \|\, q_0 - p_0\,\|_V^2\,. \end{aligned}$$

Используя это неравенство, следуя доказательству теоремы 3, вместо (37) получаем неравенство:

$$\begin{aligned} &\frac{1+\tau_0\, r}{2\,\tau_0}\, \|\, T_0\, q - T_0\, p\,\|_V^2 + \frac{\beta_0}{2}\, \|\, q_0 - p_0\,\|_V^2 + \\ &+ \frac{1}{2\,(1-\tau_0\, r)\,\tau_0} \left\| (1-\tau_0\, r)\, \Big[(q_0 - T_0\, q) - (p_0 - T_0\, p) \Big] - \tau_0\,(A_0\, q_0 - A_0\, p_0) \right\|_V^2 + \\ &\qquad + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n} \|\,(q_j - B_j\, T_0\, q) - (p_j - B_j\, T_0\, p)\,\|_H^2 \le \\ &\qquad \le \frac{1-\tau_0\, r}{2\,\tau_0}\, \|\, q_0 - p_0\,\|_V^2 + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n} \|\, q_j - p_j\,\|_H^2 + \\ &\quad + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{n} \|\, B_j\,(T_0\, q - T_0\, p\,)\,\|_H^2 - \sum_{j=1}^{n} (\, q_{n+j} - p_{n+j}\,,\, B_j\,(T_0\, q - T_0\, p\,))_H\,. \end{aligned}$$

Повторяя выкладки, проведенные при доказательстве теоремы 3, получаем неравенство (57). Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (11), (12), (52), (53), (56), *итерационная последовательность* $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ *построена согласно* (20). *Тогда выполнены* (42), (43) *и следующие равенства*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| u^{(k)} - u \right\|_V = 0\,, \quad \lim_{k\to+\infty} \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u \right\|_H = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{58}$$

где u *– решение задачи* (9).

Доказательство. Отметим, что из (52) вытекает существование единственного решения вариационного неравенства (9) (см., например, [6]), а значит, в силу теоремы 2 множество неподвижных точек оператора T не пусто.

Положим в неравенстве (57) $q = q^{(k)}$, а в качестве p выберем неподвижную точку оператора T (при этом $p_j = T_j\, p$, $j = 0, 1, \ldots, n$). В силу теоремы 1 справедливы соотношения $p_j = B_j\, T_0\, p = B_j\, p_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, поскольку $T\, q^{(k)} = q^{(k+1)}$, имеем

$$\begin{aligned} &\left\| q^{(k+1)} - p \right\|_Q^2 + \beta_0 \left\| u^{(k)} - p_0 \right\|_V^2 + \sum_{j=1}^n \delta_j \left(A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j\,,\, y_j^{(k)} - p_j \right)_H + \\ &\quad + \frac{1}{\tau_0\,(1 - \tau_0\, r)} \left\| (1 - \tau_0\, r)\, (u^{(k)} - u^{(k+1)}) - \tau_0\, (A_0\, u^{(k)} - A_0\, p_0) \right\|_V^2 + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_j\,(1 - \tau_j\, r)} \left\| (1 - \tau_j\, r)\, (y_j^{(k)} - y_j^{(k+1)}) - \tau_j\, (A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j) \right\|_H^2 + \\ &\qquad + r \sum_{j=1}^n \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)} \right\|_H^2 \le \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q^2 . \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает, что числовая последовательность $\left\{ \left\| q^{(k)} - p \right\|_Q \right\}_{k=0}^{+\infty}$ не возрастает, и следовательно, имеет конечный предел, а значит, выполнены соотношения (45)–(48), а также следующее равенство

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| u^{(k)} - p_0 \right\|_V = 0\,. \tag{59}$$

Из (11), (45) и (53), (59) имеем (49), и далее, следуя доказательству теоремы 4, получаем (42), (43). Поскольку задача (9) имеет единственное решение u, то в силу теоремы 1 выполнены равенства $p_0 = u$, $p_j = B_j\, u$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\left\| y_j^{(k)} - B_j\, u \right\|_H \le \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k)} \right\|_H + \left\| B_j\, (u^{(k)} - u) \right\|_H \le \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k)} \right\|_H + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n \left\| B_i\, (u^{(k)} - u) \right\|_H^2 \right)^{1/2} = \left\| y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k)} \right\|_H + \left\| u^{(k)} - u \right\|_V, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

и из (42), (59) получаем (58). Теорема доказана. □

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (10), (12), (54), (55),

$$\tau_0 < \frac{2\,\sigma_0}{2\,\sigma_0\, r + 1}\,, \quad \tau_j < \frac{2\,\mu_j}{2\,\mu_j\, r + \gamma_j^2}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{60}$$

Тогда оператор T является нерастягивающим. Более того, для любых q, p из Q справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\| Tq - Tp \|_Q^2 + \delta_0 \, (A_0 \, q_0 - A_0 \, p_0 \, , \, q_0 - p_0)_V + \sum_{j=1}^n \beta_j \, \| q_j - p_j \|_H^2 + \\ + \frac{1}{\tau_0 \, (1 - \tau_0 \, r)} \, \Big\| (1 - \tau_0 \, r) \Big[(q_0 - T_0 \, q) - (p_0 - T_0 \, p) \Big] - \tau_0 \, (A_0 \, q_0 - A_0 \, p_0) \Big\|_V^2 + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_j \, (1 - \tau_j \, r)} \, \Big\| (1 - \tau_j \, r) \Big[(q_j - T_j \, q) - (p_j - T_j \, p) \Big] - \tau_j \, (A_j \, q_j - A_j \, p_j) \Big\|_V^2 + \\ + r \sum_{j=1}^n \| \, (q_j - B_j \, T_0 \, q) - (p_j - B_j \, T_0 \, p) \, \|_H^2 \le \| \, q - p \, \|_Q^2 , \end{gathered} \tag{61}$$

где $\delta_0 = 2 - \tau_j \, / [\, \sigma_0 \, (1 - \tau_0 \, r) \,]$, $\beta_j = 2 \, \mu_j - \tau_j \, \gamma_j^2 / (1 - \tau_j \, r \,)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Доказательство данной теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 5. □

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (10), (12), (54), (55), (60), *итерационная последовательность* $\{q^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ *построена согласно* (20). *Тогда выполнены* (42), (43), (58).

Доказательство. Из (41), (55) вытекает, что

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^n (B_j^* \circ A_j \circ B_j \, (u), \, \eta - u)_V = \sum_{j=1}^n (A_j \circ B_j \, (u), \, B_j \, \eta - B_j \, u)_H \ge \sum_{j=1}^n \mu_j \, \| \, B_j \, (\eta - u) \|_H^2 \ge \\ \ge \mu^* \sum_{j=1}^n \| \, B_j \, (\eta - u) \|_H^2 = \mu^* \, \| \, \eta - u \, \|_V^2, \quad \mu^* = \max\{ \, \mu_1 \, , \, \mu_2 \, , \ldots , \, \mu_n \, \},\end{gathered}$$

а значит, вариационное неравенство (9) имеет единственное решение, и в силу теоремы 2 множество неподвижных точек оператора T не пусто.

Так же, как и при доказательстве теорем 4, 6, из неравенства (61), считая p неподвижной точкой оператора T и полагая $q = q^{(k)}$, имеем

$$\begin{gathered}\Big\| \, q^{(k+1)} - p \, \Big\|_Q^2 + \delta_0 \, \Big(A_0 \, u^{(k)} - A_0 \, p_0 \, , \, u^{(k)} - p_0 \Big)_V + \sum_{j=1}^n \beta_j \, \Big\| \, y_j^{(k)} - p_j \, \Big\|_H^2 + \\ + \frac{1}{\tau_0 \, (1 - \tau_0 \, r)} \, \Big\| (1 - \tau_0 \, r) \, (u^{(k)} - u^{(k+1)} \,) - \tau_0 \, (A_0 \, u^{(k)} - A_0 \, p_0) \Big\|_V^2 + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_j \, (1 - \tau_j \, r)} \, \Big\| (1 - \tau_j \, r) \, (y_j^{(k)} - y_j^{(k+1)} \,) - \tau_j \, (A_j \, y_j^{(k)} - A_j \, p_j) \Big\|_H^2 + \\ + r \sum_{j=1}^n \Big\| \, y_j^{(k)} - B_j \, u^{(k+1)} \, \Big\|_H^2 \le \Big\| \, q^{(k)} - p \, \Big\|_Q^2 .\end{gathered}$$

Отсюда следуют соотношения (44), (46)–(48) и, кроме того,

$$\lim_{k \to +\infty} \Big\| \, y_j^{(k)} - p_j \, \Big\|_H = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{62}$$

а значит, в силу (55)

$$\lim_{k\to+\infty}\left\| A_j\, y_j^{(k)} - A_j\, p_j \right\|_H = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Но тогда справедливы равенства (45) и, как это было установлено при доказательстве теоремы 4, равенства (42), (43).

Далее, в силу (42), (62) имеем для всех $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\left\| B_j\, u^{(k)} - B_j\, u \right\|_H = \left\| B_j\, u^{(k)} - p_j \right\|_H \leq$$
$$\leq \left\| B_j\, u^{(k)} - y_j^{(k)} \right\|_H + \left\| y_j^{(k)} - p_j \right\|_H \to 0 \quad \text{при } k \to +\infty,$$

а значит, согласно (41)

$$\lim_{k\to+\infty}\left\| u^{(k)} - u \right\|_V^2 = \lim_{k\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\left\| B_j\, u^{(k)} - B_j\, u \right\|_H^2 = 0.$$

Таким образом установлена справедливость (58). Теорема доказана. □

Отметим, что для задачи (1)–(3) в случае, когда $B_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, соотношение (12), как нетрудно установить, имеет место. Кроме того, условия (54), (55) выполнены, если, в частности, $\beta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (см., например, лемму 1.6. [6, с. 89]).

5. Реализация итерационного метода для задачи (1)–(3)

Рассмотрим особенности реализации итерационного метода (13)–(15) применительно к задаче (1)–(3). Очевидно, в рассмотрении нуждаются лишь задачи (13), (14), поскольку в (15) вычисления производятся по явным формулам.

С учетом того, что функционал F_0 является линейным, вариационное неравенство (13) стандартным образом приводится к виду

$$\frac{1}{\tau_0}\left(u^{(k+1)} - u^{(k)},\, \eta\right)_V +$$
$$+\left(A_0\, u^{(k)} - \widehat{f} + r\, u^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} B_j^*\left(\lambda_j^{(k)} - r\, y_j^{(k)}\right),\, \eta\right)_V = 0 \quad \forall\, \eta \in V,$$

где элемент $\widehat{f} \in V$ определяется соотношением

$$(\widehat{f},\, \eta)_V = \int_\Omega (f, \eta)\, dx, \quad \eta \in V.$$

Таким образом, первый шаг итерационного метода сводится к решению n задач Дирихле для уравнения Пуассона.

Далее, для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ перепишем вариационное неравенство (14) в виде

$$\left(y_j^{(k+1)},\, z - y_j^{(k+1)}\right)_H + G_j(z) - G_j\left(y_j^{(k+1)}\right) \geq 0 \quad \forall\, z \in H, \tag{63}$$

где

$$G_j\,(z) = \tau_j\, F_j\,(z) - \left(y_j^{(k)} - \tau_j\left[A_j\, y_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)} + r\left(y_j^{(k)} - B_j\, u^{(k+1)}\right)\right],\, z\right)_H.$$

Пользуясь определением проксимального отображения, получаем, что вариационное неравенство (63) эквивалентно задаче минимизации

$$\frac{1}{2}\,\left\|z\right\|_H^2 + G_j\,(z) \geq \frac{1}{2}\,\left\|\,y_j^{(k+1)}\,\right\|_H^2 + G_j\,\left(y_j^{(k+1)}\right) \quad \forall\, z \in H$$

или

$$\frac{1}{2\,\tau_j}\,\left\|z\right\|_H^2 + F_j\,(z) - \frac{1}{2\,\tau_j}\,\left\|\,y_j^{(k+1)}\,\right\|_H^2 - F_j\,\left(y_j^{(k+1)}\right) \geq$$
$$\geq \left(\frac{1}{\tau_j}\,y_j^{(k)} - \left[\,A_j\,y_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)} + r\,\left(y_j^{(k)} - B_j\,u^{(k+1)}\right)\right],\, z - y_j^{(k+1)}\right)_H \quad \forall\, z \in H,$$

то есть

$$\frac{1}{\tau_j}\,y_j^{(k)} - \left[\,A_j\,y_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)} + r\,\left(y_j^{(k)} - B_j\,u^{(k+1)}\right)\right] \in \partial\,\widehat{F}_j\,\left(y_j^{(k+1)}\right), \tag{64}$$

где

$$\widehat{F}_j\,(z) = \frac{1}{2\,\tau_j}\,\left\|z\right\|_H^2 + F_j\,(z).$$

Известно (см. [6]), что $p \in \partial\,\widehat{F}_j(z)$ тогда и только тогда, когда $z \in \partial\,\widehat{F}_j^{\,*}(q)$, где $\widehat{F}_j^{\,*}$ – сопряженный к $\widehat{F}_j$ функционал (см., например, [6, с. 26]). Поэтому включение (64) эквивалентно следующему:

$$y_j^{(k+1)} \in \partial\,\widehat{F}_j^{\,*}\,\left(\frac{1}{\tau_j}\,y_j^{(k)} - \left[\,A_j\,y_j^{(k)} - \lambda_j^{(k)} + r\,\left(y_j^{(k)} - B_j\,u^{(k+1)}\right)\right]\right). \tag{65}$$

Поскольку

$$\widehat{F}_j(z) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^{|z|} g_{\tau_j}\,(\xi)\,d\,\xi\,d\,x, \quad g_{\tau_j}\,(\xi) = \begin{cases} \xi/\tau_j, & \xi \leq \beta_j\,, \\ \xi/\tau_j + \vartheta_j\,, & \xi \geq \beta_j\,, \end{cases}$$

то следуя [9], нетрудно проверить, что

$$\widehat{F}_j^{\,*}(z) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^{|z|} \varphi_{\tau_j}\,(\xi)\,d\,\xi\,d\,x, \quad \varphi_{\tau_j}\,(\xi) = \begin{cases} \tau_j\,\xi, & \xi \leq \beta_j\,/\tau_j\,, \\ \beta_j\,, & \beta_j\,/\tau_j < \xi \leq \beta_j\,/\tau_j + \vartheta_j\,, \\ \tau_j\,(\xi + \vartheta_j\,), & \xi \geq \beta_j\,/\tau_j + \vartheta_j\,. \end{cases}$$

Тогда по аналогии с [10, с. 321] и [11, с. 116] получаем, что функционал $\widehat{F}_j^{\,*}$ дифференцируем по Гато, причем

$$\left(\widehat{F}_j^{\,*}\right)'(z) = \frac{\varphi_{\tau_j}\,(|\,z\,|)}{|\,z\,|}\,z,$$

следовательно, в силу предложения 5.3 [6, с. 33] субдифференциал $\partial\,\widehat{F}_j^{\,*}(z)$ состоит из единственного элемента совпадающего с $\left(\widehat{F}_j^{\,*}\right)'(z)$. Поэтому соотношение (65) представляет из себя вычисления по явным формулам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00633).

Summary

I.B. Badriev, O.A. Zadvornov. On the iterative method for solving a variational inequalities with inversely strongly monotone operators.

We consider a boundary valued problem whose generalized statement is formulated as a mixed variational inequality in Hilbert space. The operator of this variational inequality is a sum of several inversely strongly monotone operators (which are not necessarily potential operators). The functional occurring in this variational inequality is also a sum of several lower semi-continuous convex proper functionals. For the solving of the considered variational inequality the decomposition iterative method is offered. The suggested method does not require the inversion of original operators. The convergence of this method is investigated.

Литература

1. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Методы декомпозиции для решения вариационных неравенств второго рода с обратно сильно монотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 888–895.
2. *Задворнов О.А.* О сходимости полуявного метода с расщеплением для решения вариационных неравенств второго рода // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 6. – С. 61–70.
3. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* О сходимости итерационного метода двойственного типа решения смешанных вариационных неравенств // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1115–1122.
4. *Глушенков В.Д.* Об одном уравнении нелинейной теории фильтрации // Прикладная математика в научно-технических задачах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – С. 12–21.
5. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Саддек А.М.* Исследование сходимости итерационных методов решения некоторых вариационных неравенств с псевдомонотнными операторами // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 7. – С. 891–898.
6. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 400 с.
7. *Browder F.E., Petryshin W.V.* The soluyion by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc. – 1966. – V. 72. – P. 571–575.
8. *Opial Z.* Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 591–597.
9. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А., Исмагилов Л.Н.* Применение метода декомпозиции для численного решения некоторых нелинейных стационарных задач теории фильтрации // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 12–24.
10. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 430 с.
11. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Поступила в редакцию
06.08.06

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Ildar.Badriev@ksu.ru*

Задворнов Олег Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*