Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Отчет по гранту BP (British Petroleum) за 2017-2018 г.г.

Руководитель Хуснутдинова Э.М.

Казань, 2018

Рассмотрим течение жидкости в каналах с интенсификатором теплообмена в виде многозаходной шнековой вставки. В качестве основных, примем следующие основные допущения: течение жидкости стационарное, ламинарное, со сформировавшимся профилем скорости. Реологическое поведение текущей жидкости может быть описано с помощью модели обобщенной ньютоновской жидкости

$\sigma = -P + T, T = 2\mu(t, I_2)D$

где σ - тензор напряжений; T - девиатор тензора напряжений; $\mu(t, I_2)$ - эффективная вязкость; $D = \frac{1}{2}\left(grad\vec{V} + \left(grad\vec{V} \right)^T \right)$ - тензор скоростей деформаций; $grad\vec{V}$ - тензор градиента скорости; $\vec{V}$ - вектор скорости; верхний индекс T - символ транспонирования; t - температура; $I_2 = \frac{1}{2} trD^2$ - второй инвариант тензора скоростей деформаций. В качестве зависимости $\mu(I_2)$ можно использовать любую реологическую модель. Например, универсальная функция вязкости Виноградова и Малкина представляется следующей регрессионной формулой [Виноградов Г.В., Реология полимеров/ Г.В.Виноградов, А.Я.Малкин. – М.: Химия, 1977. – 440 с.]:

$$\mu(I_2) = \frac{\mu_0}{1 + A_1(\mu_0 I_2)^{\alpha} + A_2(\mu_0 I_2)^{2\alpha}},$$

где μ_0 – вязкость при нулевом сдвиге или наибольшая ньютоновская вязкость, т.е. предельное значение вязкости при $I_2 \to 0$; A_1 – коэффициент регрессии, имеющий значение $1{,}386 \cdot 10^{-2}$; A_2 – коэффициент регрессии, имеющий значение $1{,}462 \cdot 10^{-3}$; α – показатель степени, имеющий значение 0,355. Приведенные значения справедливы для размерностей $[\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$, $[I_2] = \text{с}^{-2}$.

В качестве второго реологического уравнения, которое наиболее часто встречается на практике при описании течения нефтей и нефтепродуктов следует отметить уравнение Оствальда - де Вилля, или степенной закон

$\mu(I_2) = kI_2^{(n-1)/2}$,

где k, n - реологические параметры.

В ряде случаев зависимость $\mu(I_2)$ может быть представлена в наиболее распространенных с практической точки зрения диапазонах изменения I_2 в виде аппроксимирующего полинома.

Температурные зависимости эффективной вязкости могут быть представлены в линейном или аррениусовском виде.

Винтовая симметрия рассматриваемых каналов позволяет ввести в рассмотрение специальную систему координат.

Винтовая система координат связана с декартовой системой координат соотношениями

$$\begin{cases} x = \zeta^1 \cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right) \\ y = \zeta^1 \sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right). \\ z = \zeta^3 \end{cases} \quad (1)$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{S}$, R - больший радиус канала с винтовой шнековой вставкой, S -шаг винтового канала.

Получим основные характеристики этой винтовой системы координат

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \zeta^1} = \cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta^1} = \sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \zeta^1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \zeta^2} = -\left(\zeta^1 / R\right)\sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta^2} = \left(\zeta^1 / R\right)\cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \zeta^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \zeta^3} = \omega\zeta^1 \sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta^3} = -\omega\zeta^1 \cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial \zeta^3} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_1 = \dfrac{\partial x}{\partial \zeta^1}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial \zeta^1}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial \zeta^1}\vec{k} \\ \vec{e}_2 = \dfrac{\partial x}{\partial \zeta^2}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial \zeta^2}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial \zeta^2}\vec{k}, \\ \vec{e}_3 = \dfrac{\partial x}{\partial \zeta^3}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial \zeta^3}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial \zeta^3}\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right)\vec{i} + \sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right)\vec{j} \\ \vec{e}_2 = -\left(\zeta^1 / R\right)\sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right)\vec{i} + \left(\zeta^1 / R\right)\cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right)\vec{j}, \\ \vec{e}_3 = \omega\zeta^1 \sin\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right)\vec{i} - \omega\zeta^1 \cos\left(\zeta^2 / R - \omega\zeta^3\right)\vec{j} + \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \left(\zeta^1 / R\right)^2 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \left(1 + \omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} \left(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2\right) = 0 \\ \left(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3\right) = 0 \\ \left(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3\right) = -\left(\omega / R\right)\left(\zeta^1\right)^2 \end{cases}.$$

Тогда компоненты метрического тензора примут вид

$$\left\{g_{ij}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\zeta^1 / R\right)^2 & -\left(\omega / R\right)\left(\zeta^1\right)^2 \\ 0 & -\left(\omega / R\right)\left(\zeta^1\right)^2 & \left(1 + \omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right) \end{pmatrix};$$

$$g=\det\left\{g_{ij}\right\}=\left\|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\zeta^1/R\right)^2 & -\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2\\ 0 & -\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2 & \left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\end{pmatrix}\right\|=\left(\zeta^1/R\right)^2;$$

$$\left\{g^{ij}\right\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2} & \omega R\\ 0 & \omega R & 1\end{pmatrix};$$

$$G=\det\left\{g^{ij}\right\}=\left\|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2} & \omega R\\ 0 & \omega R & 1\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{\left(\zeta^1/R\right)^2}.$$

Символы Кристоффеля первого рода запишутся как

$$\Gamma_{jk,m}=\Gamma_{kj,m}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial\zeta^k}+\frac{\partial g_{km}}{\partial\zeta^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial\zeta^m}\right),$$

$$\Gamma_{11,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^1}\right)=0,$$

$$\Gamma_{22,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^1}\right)=-\zeta^1/R^2,$$

$$\Gamma_{33,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{31}}{\partial\zeta^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^1}\right)=-\omega^2\zeta^1,$$

$$\Gamma_{12,1}=\Gamma_{21,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial g_{21}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^1}\right)=0,$$

$$\Gamma_{13,1}=\Gamma_{31,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{31}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^1}\right)=0,$$

$$\Gamma_{23,1}=\Gamma_{32,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{31}}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^1}\right)=\omega\zeta^1/R,$$

$$\Gamma_{33,1}=\Gamma_{33,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{31}}{\partial\zeta^j}-\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^1}\right)=-\omega^2\zeta^1,$$

$$\Gamma_{11,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^2}\right)=0,$$

$$\Gamma_{22,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^2}\right)=0,$$

$$\Gamma_{33,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{32}}{\partial\zeta^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^2}\right)=0,$$

$$\Gamma_{12,2}=\Gamma_{21,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^2}\right)=\zeta^1/R^2,$$

$$\Gamma_{13,2}=\Gamma_{31,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{32}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^2}\right)=-\omega\zeta^1/R,$$

$$\Gamma_{23,2}=\Gamma_{32,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{32}}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^2}\right)=0,$$

$$\Gamma_{11,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial\zeta^3}\right)=0,$$

$$\Gamma_{22,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial\zeta^3}\right)=0,$$

$$\Gamma_{33,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^3}-\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^3}\right)=0,$$

$$\Gamma_{12,3}=\Gamma_{21,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{12}}{\partial\zeta^3}\right)=-\omega\zeta^1/R,$$

$$\Gamma_{13,3}=\Gamma_{31,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^1}-\frac{\partial g_{13}}{\partial\zeta^3}\right)=\omega^2\zeta^1,$$

$$\Gamma_{23,3}=\Gamma_{32,3}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial g_{33}}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial g_{23}}{\partial\zeta^3}\right)=0.$$

Для символов Кристоффеля второго рода имеем

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}=g^{im}\Gamma_{jk,m},$$

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}=g^{i1}\Gamma_{jk,1}+g^{i2}\Gamma_{jk,2}+g^{i3}\Gamma_{jk,3},$$

$$\Gamma^1_{jk}=\Gamma^1_{kj}=g^{11}\Gamma_{jk,1}+g^{12}\Gamma_{jk,2}+g^{13}\Gamma_{jk,3}=g^{11}\Gamma_{jk,1},$$

$$\Gamma^1_{jk}=\Gamma_{jk,1},$$

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma_{11,1}=0,$$

$$\Gamma^1_{22}=\Gamma_{22,1}=-\zeta^1/R^2,$$

$$\Gamma^1_{33}=\Gamma_{33,1}=-\omega^2\zeta^1,$$

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma_{12,1}=0,$$

$$\Gamma^1_{13}=\Gamma^1_{31}=\Gamma_{13,1}=0,$$

$$\Gamma^1_{23}=\Gamma^1_{32}=\Gamma_{23,1}=\omega\zeta^1/R,$$

$$\Gamma^2_{jk}=\Gamma^2_{kj}=g^{21}\Gamma_{jk,1}+g^{22}\Gamma_{jk,2}+g^{23}\Gamma_{jk,3}=g^{22}\Gamma_{jk,2}+g^{23}\Gamma_{jk,3},$$

$$\Gamma^2_{jk}=\Gamma^2_{kj}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{jk,2}+\omega R\Gamma_{jk,3},$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{11,2}+\omega R\Gamma_{11,3}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\cdot 0+\omega R\cdot 0=0,$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{22,2}+\omega R\Gamma_{22,3}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\cdot 0+\omega R\cdot 0=0,$$

$$\Gamma^2_{33}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{33,2}+\omega R\Gamma_{33,3}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\cdot 0+\omega R\cdot 0=0,$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{12,2}+\omega R\Gamma_{12,3}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\cdot\frac{\zeta^1}{R^2}+\omega R\cdot\left(-\frac{\omega\zeta^1}{R}\right)=\frac{1}{\zeta^1},$$

$$\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{13,2}+\omega R\Gamma_{13,3}=-\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\cdot\frac{\omega\zeta^1}{R}+\omega R\cdot\omega^2\zeta^1=-\frac{\omega R}{\zeta^1},$$

$$\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\Gamma_{23,2}+\omega R\Gamma_{23,3}=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\cdot 0+\omega R\cdot 0=0,$$

$$\Gamma^3_{jk}=\Gamma^3_{kj}=g^{31}\Gamma_{jk,1}+g^{32}\Gamma_{jk,2}+g^{33}\Gamma_{jk,3}=g^{32}\Gamma_{jk,2}+g^{33}\Gamma_{jk,3},$$

$$\Gamma^3_{jk}=\Gamma^3_{kj}=\omega R\Gamma_{jk,2}+\Gamma_{jk,3},$$

$$\Gamma^3_{11}=\omega R\Gamma_{11,2}+\Gamma_{11,3}=0,$$

$$\Gamma^3_{22}=\omega R\Gamma_{22,2}+\Gamma_{22,3}=0,$$

$$\Gamma^3_{33}=\omega R\Gamma_{33,2}+\Gamma_{33,3}=0,$$

$$\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=\omega R\Gamma_{12,2}+\Gamma_{12,3}=0,$$

$$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\omega R\Gamma_{13,2}+\Gamma_{13,3}=0,$$

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\omega R\Gamma_{23,2}+\Gamma_{23,3}=0.$$

Получим выражения для основных операторов в выбранной системе координат. Для ковариантных компонент вектора ∇p получим

$$gradp=\left(gradp\right)_i e^i, \text{ или } \left(gradp\right)_i=\frac{\partial p}{\partial\zeta^i},$$

$$(gradp)^i = g^{ij}(gradp)_j = g^{i1}(gradp)_1 + g^{i2}(gradp)_2 + g^{i3}(gradp)_3,$$

$$(gradp)^i = g^{i1}\frac{\partial p}{\partial \zeta^1} + g^{i2}\frac{\partial p}{\partial \zeta^2} + g^{i3}\frac{\partial p}{\partial \zeta^3},$$

$$(gradp)^1 = g^{11}\frac{\partial p}{\partial \zeta^1} + g^{12}\frac{\partial p}{\partial \zeta^2} + g^{13}\frac{\partial p}{\partial \zeta^3} = \frac{\partial p}{\partial \zeta^1},$$

$$(gradp)^2 = g^{21}\frac{\partial p}{\partial \zeta^1} + g^{22}\frac{\partial p}{\partial \zeta^2} + g^{23}\frac{\partial p}{\partial \zeta^3} = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial p}{\partial \zeta^2} + \omega R\frac{\partial p}{\partial \zeta^3},$$

$$(gradp)^3 = g^{31}\frac{\partial p}{\partial \zeta^1} + g^{32}\frac{\partial p}{\partial \zeta^2} + g^{33}\frac{\partial p}{\partial \zeta^3} = \omega R\frac{\partial p}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial p}{\partial \zeta^3}.$$

Для дивергенции вектора q имеем

$$divq = (gradq)^i{}_i = \frac{\partial q^i}{\partial \zeta^i} + \Gamma^i_{ik}q^k = \frac{\partial q^i}{\partial \zeta^i} + \Gamma^i_{i1}q^1 + \Gamma^i_{i2}q^2 + \Gamma^i_{i3}q^3, \text{ или}$$

$$divq = \frac{\partial q^1}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial q^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial q^3}{\partial \zeta^3} + \left(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}\right)q^1 + \left(\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{32}\right)q^2 + \left(\Gamma^1_{13} + \Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{33}\right)q^3$$

,

или

$$divq = \frac{\partial q^1}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial q^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial q^3}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{\zeta^1}q^1.$$

Учитывая, что $q = -\lambda\nabla T$, получим

$$div(-\lambda gradT) = \lambda\left(\frac{\partial(gradT)^1}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial(gradT)^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial(gradT)^3}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{\zeta^1}(gradT)^1\right) =$$

$$= -\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial\left(\zeta^1\right)^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta^2}\left(\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial T}{\partial \zeta^2} + \omega R\frac{\partial T}{\partial \zeta^3}\right) + \frac{\partial T}{\partial \zeta^3}\left(\omega R\frac{\partial T}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial T}{\partial \zeta^3}\right) + \frac{1}{\zeta^1}\frac{\partial T}{\partial \zeta^1}\right).$$

Для $V \cdot gradT$ имеем

$$V \cdot gradT = V^i e_i \cdot (gradT)_j e^j = V^i (gradT)_j \delta^j_i = V^i (gradT)_i =$$

$$= V^1(gradT)_1 + V^2(gradT)_2 + V^3(gradT)_3,$$

или

$$V \cdot gradT = V^1\frac{\partial T}{\partial \zeta^1} + V^2\frac{\partial T}{\partial \zeta^2} + V^3\frac{\partial T}{\partial \zeta^3}.$$

Для смешанных компонент тензора градиента скорости имеем

$$(gradV)^i_{\ j} = \frac{\partial V^i}{\partial \zeta^j} + \Gamma^i_{jk}V^k = \frac{\partial V^i}{\partial \zeta^j} + \Gamma^i_{j1}V^1 + \Gamma^i_{j2}V^2 + \Gamma^i_{j3}V^3,$$

$$(gradV)^1_{\ 1} = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1} + \Gamma^1_{11}V^1 + \Gamma^1_{12}V^2 + \Gamma^1_{13}V^3 = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1},$$

$$(gradV)^1_{\ 2}=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2}+\Gamma^1_{21}V^1+\Gamma^1_{22}V^2+\Gamma^1_{23}V^3=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2}-\frac{\zeta^1}{R^2}V^2+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^3,$$

$$(gradV)^1_{\ 3}=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3}+\Gamma^1_{31}V^1+\Gamma^1_{32}V^2+\Gamma^1_{33}V^3=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3}+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^2-\omega^2\zeta^1V^3,$$

$$(gradV)^2_{\ 1}=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1}+\Gamma^2_{11}V^1+\Gamma^2_{12}V^2+\Gamma^2_{13}V^3=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1}+\frac{1}{\zeta^1}V^2-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^3,$$

$$(gradV)^2_{\ 2}=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^2}+\Gamma^2_{21}V^1+\Gamma^2_{22}V^2+\Gamma^2_{23}V^3=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{\zeta^1}V^1,$$

$$(gradV)^2_{\ 3}=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^3}+\Gamma^2_{31}V^1+\Gamma^2_{32}V^2+\Gamma^2_{33}V^3=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^3}-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^1,$$

$$(gradV)^3_{\ 1}=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1}+\Gamma^3_{11}V^1+\Gamma^3_{12}V^2+\Gamma^3_{13}V^3=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1},$$

$$(gradV)^3_{\ 2}=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^2}+\Gamma^3_{21}V^1+\Gamma^3_{22}V^2+\Gamma^3_{23}V^3=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^2},$$

$$(gradV)^3_{\ 3}=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3}+\Gamma^3_{31}V^1+\Gamma^3_{32}V^2+\Gamma^3_{33}V^3=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3},$$

или

$$(gradV)^1_{\ 1}=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1},$$

$$(gradV)^1_{\ 2}=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2}-\frac{\zeta^1}{R^2}V^2+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^3,$$

$$(gradV)^1_{\ 3}=\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3}+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^2-\omega^2\zeta^1V^3,$$

$$(gradV)^2_{\ 1}=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1}+\frac{1}{\zeta^1}V^2-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^3,$$

$$(gradV)^2_{\ 2}=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{\zeta^1}V^1,$$

$$(gradV)^2_{\ 3}=\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^3}-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^1,$$

$$(gradV)^3_{\ 1}=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1},$$

$$(gradV)^3_{\ 2}=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^2},$$

$$(gradV)^3_{\ 3}=\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3}.$$

Для ковариантных компонент тензора градиента скорости имеем

$$(gradV)_{ij} = g_{ik}(gradV)^{k}{}_{j} = g_{i1}(gradV)^{1}{}_{j} + g_{i2}(gradV)^{2}{}_{j} + g_{i3}(gradV)^{3}{}_{j}, \text{ или}$$

$$(gradV)_{1j} = (gradV)^{1}{}_{j},$$

$$(gradV)_{2j} = \frac{(\zeta^1)^2}{R^2}(gradV)^{2}{}_{j} - \frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{3}{}_{j},$$

$$(gradV)_{3j} = -\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{2}{}_{j} + \left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)(gradV)^{3}{}_{j}.$$

Тогда

$$(gradV)_{11} = (gradV)^{1}{}_{1},$$

$$(gradV)_{12} = (gradV)^{1}{}_{2},$$

$$(gradV)_{13} = (gradV)^{1}{}_{3},$$

$$(gradV)_{21} = \frac{(\zeta^1)^2}{R^2}(gradV)^{2}{}_{1} - \frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{3}{}_{1},$$

$$(gradV)_{22} = \frac{(\zeta^1)^2}{R^2}(gradV)^{2}{}_{2} - \frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{3}{}_{2},$$

$$(gradV)_{23} = \frac{(\zeta^1)^2}{R^2}(gradV)^{2}{}_{3} - \frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{3}{}_{3},$$

$$(gradV)_{31} = -\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{2}{}_{1} + \left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)(gradV)^{3}{}_{1},$$

$$(gradV)_{32} = -\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{2}{}_{2} + \left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)(gradV)^{3}{}_{2},$$

$$(gradV)_{33} = -\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}(gradV)^{2}{}_{3} + \left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)(gradV)^{3}{}_{3}.$$

Подставляя сюда выражения для смешанных компонент тензора градиента скорости, получим

$$(gradV)_{11} = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1},$$

$$(gradV)_{12} = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2} - \frac{\zeta^1}{R^2}V^2 + \frac{\omega\zeta^1}{R}V^3,$$

$$(gradV)_{13} = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3} + \frac{\omega\zeta^1}{R}V^2 - \omega^2\zeta^1 V^3,$$

$$(gradV)_{21} = \frac{(\zeta^1)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1} - \frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1} + \frac{\zeta^1}{R^2}V^2 - \frac{\omega\zeta^1}{R}V^3,$$

$$(gradV)_{22}=\frac{(\zeta^1)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}+\frac{\zeta^1}{R^2}V^1,$$

$$(gradV)_{23}=\frac{(\zeta^1)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\zeta^1}{R}V^1,$$

$$(gradV)_{31}=-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}-\frac{\omega\zeta^1}{R}V^2+\omega^2\zeta^1V^3,$$

$$(gradV)_{32}=-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{\omega\zeta^1}{R}V^1,$$

$$(gradV)_{33}=-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}+\omega^2\zeta^1V^1.$$

Для ковариантных компонент тензора скоростей деформаций $D=\frac{1}{2}\left(gradV+gradV^T\right)$ имеем

$D_{ij}=\frac{1}{2}\left((gradV)_{ij}+\left(gradV^T\right)_{ij}\right)=\frac{1}{2}\left((gradV)_{ij}+(gradV)_{ji}\right)$, тогда

$$D_{11}=\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^1},$$

$$D_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{(\zeta^1)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}\right),$$

$$D_{13}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_{22}=\frac{(\zeta^1)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}+\frac{\zeta^1}{R^2}V^1,$$

$$D_{23}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega\zeta^1}{R}V^1+\frac{(\zeta^1)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_{33}=\omega^2\zeta^1V^1-\frac{\omega(\zeta^1)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(1+\omega^2(\zeta^1)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}.$$

Для смешанных компонент тензора скоростей деформаций имеем

$D_i^j=g^{jk}D_{ik}=g^{j1}D_{i1}+g^{j2}D_{i2}+g^{j3}D_{i3}$, или

$D_i^1=g^{11}D_{i1}+g^{12}D_{i2}+g^{13}D_{i3}=D_{i1}$,

$$D_i^{\ 2} = g^{21}D_{i1} + g^{22}D_{i2} + g^{23}D_{i3} = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}D_{i2} + \omega R D_{i3},$$

$$D_i^{\ 3} = g^{31}D_{i1} + g^{32}D_{i2} + g^{33}D_{i3} = \omega R D_{i2} + D_{i3}.$$

Тогда

$$D_1^{\ 1} = D_{11},$$

$$D_2^{\ 1} = D_{21},$$

$$D_3^{\ 1} = D_{31},$$

$$D_1^{\ 2} = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}D_{12} + \omega R D_{13},$$

$$D_2^{\ 2} = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}D_{22} + \omega R D_{23},$$

$$D_3^{\ 2} = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}D_{32} + \omega R D_{33},$$

$$D_1^{\ 3} = \omega R D_{12} + D_{13},$$

$$D_2^{\ 3} = \omega R D_{22} + D_{23},$$

$$D_3^{\ 3} = \omega R D_{32} + D_{33}.$$

Подставляя сюда ковариантные компоненты тензора скоростей деформаций получим

$$D_1^{\ 1} = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1},$$

$$D_2^{\ 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2} + \frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1} - \frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1}\right),$$

$$D_3^{\ 1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1} + \left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3}\right),$$

$$D_1^{\ 2} = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2} + \frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1} - \frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1}\right) +$$

$$+\omega R\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial \zeta^1} + \left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3}\right),$$

$$D_2{}^2=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\left(\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}+\frac{\zeta^1}{R^2}V^1\right)+$$

$$+\omega R\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega\zeta^1}{R}V^1+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_3{}^2=\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega\zeta^1}{R}V^1+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right)+$$

$$+\omega R\left(\omega^2\zeta^1V^1-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_1{}^3=\omega R\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_2{}^3=\omega R\left(\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}+\frac{\zeta^1}{R^2}V^1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega\zeta^1}{R}V^1+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_3{}^3=\omega R\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega\zeta^1}{R}V^1+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right)+$$

$$+\omega^2\zeta^1V^1-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}.$$

или после преобразований, получим

$$D_1{}^1=\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^1},$$

$$D_2{}^1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}\right),$$

$$D_3{}^1=\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_1{}^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\omega R\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_2{}^2=\frac{1}{2}\left(\left(2+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}-\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}+\frac{2}{\zeta^1}V^1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_3{}^2=\frac{1}{2}\left(-\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)^2}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega R}{\zeta^1}V^1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(1-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_1{}^3=\frac{1}{2}\left(\omega R\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_2{}^3=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_3{}^3=\frac{1}{2}\left(-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(2+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right).$$

Ускорение может быть представлено в виде

$\left((gradV)\cdot V\right)=(gradV)^i{}_j\,\vec{e}_i\vec{e}^j\cdot V^k\vec{e}_k=(gradV)^i{}_j\,\delta^j_kV^k\vec{e}_i=(gradV)^i{}_jV^j\vec{e}_i$, или

$\left((gradV)\cdot V\right)^i\vec{e}_i=(gradV)^i{}_jV^j\vec{e}_i$, тогда

$$\left((gradV)\cdot V\right)^i=(gradV)^i{}_1V^1+(gradV)^i{}_2V^2+(gradV)^i{}_3V^3,$$

$$\left((gradV)\cdot V\right)^1=(gradV)^1{}_1V^1+(gradV)^1{}_2V^2+(gradV)^1{}_3V^3=$$

$$=\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^1}V^1+\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}-\frac{\zeta^1}{R^2}V^2+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^3\right)V^2+\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^2-\omega^2\zeta^1V^3\right)V^3,$$

$$\left((gradV)\cdot V\right)^2=\left(gradV\right)^2{}_1V^1+\left(gradV\right)^2{}_2V^2+\left(gradV\right)^2{}_3V^3=$$
$$=\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\frac{1}{\zeta^1}V^2-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^3\right)V^1+\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^1}V^1\right)V^2+\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^1\right)V^3,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)^3=\left(gradV\right)^3{}_1V^1+\left(gradV\right)^3{}_2V^2+\left(gradV\right)^3{}_3V^3=$$
$$=\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}V^3.$$

Ковариантные компоненты ускорения могут быть записаны в виде

$\left((gradV)\cdot V\right)_i=g_{ij}\left((gradV)\cdot V\right)^j$, или

$$\left((gradV)\cdot V\right)_i=g_{i1}\left((gradV)\cdot V\right)^1+g_{i2}\left((gradV)\cdot V\right)^2+g_{i3}\left((gradV)\cdot V\right)^3.$$

Тогда

$$\left((gradV)\cdot V\right)_1=g_{11}\left((gradV)\cdot V\right)^1+g_{12}\left((gradV)\cdot V\right)^2+g_{13}\left((gradV)\cdot V\right)^3,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_1=\left((gradV)\cdot V\right)^1,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_2=g_{21}\left((gradV)\cdot V\right)^1+g_{22}\left((gradV)\cdot V\right)^2+g_{23}\left((gradV)\cdot V\right)^3,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_2=\left(\zeta^1/R\right)^2\left((gradV)\cdot V\right)^2-\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2\left((gradV)\cdot V\right)^3,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_3=g_{31}\left((gradV)\cdot V\right)^1+g_{32}\left((gradV)\cdot V\right)^2+g_{33}\left((gradV)\cdot V\right)^3,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_3=-\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2\left((gradV)\cdot V\right)^2+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\left((gradV)\cdot V\right)^3.$$

Подставим в полученные выражения контравариантные компоненты ускорения

$$\left((gradV)\cdot V\right)_1=\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^1}V^1+\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}-\frac{\zeta^1}{R^2}V^2+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^3\right)V^2+\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}+\frac{\omega\zeta^1}{R}V^2-\omega^2\zeta^1V^3\right)V^3,$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_2=$$
$$=\left(\zeta^1/R\right)^2\left(\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\frac{1}{\zeta^1}V^2-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^3\right)V^1+\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^1}V^1\right)V^2+\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^1\right)V^3\right)-$$
$$-\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2\left(\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}V^3\right),$$
$$\left((gradV)\cdot V\right)_3=$$
$$=-\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2\left(\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\frac{1}{\zeta^1}V^2-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^3\right)V^1+\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{\zeta^1}V^1\right)V^2+\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega R}{\zeta^1}V^1\right)V^3\right)+$$
$$+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\left(\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}V^3\right).$$

После некоторых преобразований, получим

$$\left((gradV)\cdot V\right)_1=\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}V^3-\frac{\zeta^1}{R^2}V^2V^2+\frac{2\omega\zeta^1}{R}V^2V^3-\omega^2\zeta^1V^3V^3\right),$$

$$\left((gradV)\cdot V\right)_2=$$

$$=\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}V^3+\frac{2}{\zeta^1}V^1V^2-\frac{2\omega R}{\zeta^1}V^1V^3\right)-$$

$$-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\left(\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}V^3\right),$$

$$\left((gradV)\cdot V\right)_3=$$

$$=-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}V^3+\frac{2}{\zeta^1}V^1V^2-\frac{2\omega R}{\zeta^1}V^1V^3\right)+$$

$$+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\left(\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}V^3\right).$$

Для ковариантных компонент дивергенции тензора имеем

$\left(divT\right)_i=T_i^{m}{}_{,m}=T_i^{1}{}_{,1}+T_i^{2}{}_{,2}+T_i^{3}{}_{,3}$, где

$$T_i^{j}{}_{,k}=\frac{\partial T_i^j}{\partial\zeta^k}-\Gamma_{ik}^nT_n^{\ j}+\Gamma_{kn}^jT_i^n,$$

$$T_i^{j}{}_{,j}=\frac{\partial T_i^j}{\partial\zeta^j}-\Gamma_{ij}^nT_n^{\ j}+\Gamma_{jn}^jT_i^n=,$$

$$=\frac{\partial T_i^1}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_i^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_i^3}{\partial\zeta^3}-\Gamma_{i1}^nT_n^{\ 1}-\Gamma_{i2}^nT_n^{\ 2}-\Gamma_{i3}^nT_n^{\ 3}+\Gamma_{1n}^1T_i^n+\Gamma_{2n}^2T_i^n+\Gamma_{3n}^3T_i^n=$$

$$=\frac{\partial T_i^1}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_i^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_i^3}{\partial\zeta^3}-\Gamma_{i1}^nT_n^{\ 1}-\Gamma_{i2}^nT_n^{\ 2}-\Gamma_{i3}^nT_n^{\ 3}+\frac{1}{\zeta^1}T_i^1=$$

$$T_i^{j}{}_{,j}=\frac{\partial T_i^1}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_i^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_i^3}{\partial\zeta^3}-$$

$$-\Gamma_{i1}^1T_1^1-\Gamma_{i1}^2T_2^{\ 1}-\Gamma_{i1}^3T_3^{\ 1}-\Gamma_{i2}^1T_1^2-\Gamma_{i2}^2T_2^{\ 2}-\Gamma_{i2}^3T_3^{\ 2}-\Gamma_{i3}^1T_1^3-\Gamma_{i3}^2T_2^{\ 3}-\Gamma_{i3}^3T_3^{\ 3}+\frac{1}{\zeta^1}T_i^1,$$

$$T_1^{j}{}_{,j}=\frac{\partial T_1^1}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_1^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_1^3}{\partial\zeta^3}-$$

$$-\Gamma_{11}^1T_1^1-\Gamma_{11}^2T_2^{\ 1}-\Gamma_{11}^3T_3^{\ 1}-\Gamma_{12}^1T_1^2-\Gamma_{12}^2T_2^{\ 2}-\Gamma_{12}^3T_3^{\ 2}-\Gamma_{13}^1T_1^3-\Gamma_{13}^2T_2^{\ 3}-\Gamma_{13}^3T_3^{\ 3}+\frac{1}{\zeta^1}T_1^1,$$

$$T_2^{j}{}_{,j}=\frac{\partial T_2^{\ 1}}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_2^{\ 2}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_2^{\ 3}}{\partial\zeta^3}-$$

$$-\Gamma_{21}^1T_1^1-\Gamma_{21}^2T_2^{\ 1}-\Gamma_{21}^3T_3^{\ 1}-\Gamma_{22}^1T_1^2-\Gamma_{22}^2T_2^{\ 2}-\Gamma_{22}^3T_3^{\ 2}-\Gamma_{23}^1T_1^3-\Gamma_{23}^2T_2^{\ 3}-\Gamma_{23}^3T_3^{\ 3}+\frac{1}{\zeta^1}T_2^{\ 1},$$

$$T_3^{\ j}{}_{,j} = \frac{\partial T_3^{\ 1}}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial T_3^{\ 2}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial T_3^{\ 3}}{\partial \zeta^3} -$$

$$-\Gamma_{31}^1 T_1^{\ 1} - \Gamma_{31}^2 T_2^{\ 1} - \Gamma_{31}^3 T_3^{\ 1} - \Gamma_{32}^1 T_1^{\ 2} - \Gamma_{32}^2 T_2^{\ 2} - \Gamma_{32}^3 T_3^{\ 2} - \Gamma_{33}^1 T_1^{\ 3} - \Gamma_{33}^2 T_2^{\ 3} - \Gamma_{33}^3 T_3^{\ 3} + \frac{1}{\zeta^1} T_3^{\ 1},$$

Или с учетом ненулевых символов Кристоффеля второго рода, получим

$$T_1^{\ j}{}_{,j} = \frac{\partial T_1^{\ 1}}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial T_1^{\ 2}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial T_1^{\ 3}}{\partial \zeta^3} - \frac{1}{\zeta^1} T_2^{\ 2} + \frac{\omega R}{\zeta^1} T_2^{\ 3} + \frac{1}{\zeta^1} T_1^{\ 1},$$

$$T_2^{\ j}{}_{,j} = \frac{\partial T_2^{\ 1}}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial T_2^{\ 2}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial T_2^{\ 3}}{\partial \zeta^3} + \frac{\zeta^1}{R^2} T_1^{\ 2} - \frac{\omega \zeta^1}{R} T_1^{\ 3},$$

$$T_3^{\ j}{}_{,j} = \frac{\partial T_3^{\ 1}}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial T_3^{\ 2}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial T_3^{\ 3}}{\partial \zeta^3} + \frac{\omega R}{\zeta^1} T_2^{\ 1} - \frac{\omega \zeta^1}{R} T_1^{\ 2} + \omega^2 \zeta^1 T_1^{\ 3} + \frac{1}{\zeta^1} T_3^{\ 1}.$$

Для дивергенции вектора $\vec{V}$ имеем

$$divV = \left(gradV\right)_i^{\ i} = \frac{\partial V^i}{\partial \zeta^i} + \Gamma_{ik}^i V^k = \frac{\partial V^i}{\partial \zeta^i} + \Gamma_{i1}^i V^1 + \Gamma_{i2}^i V^2 + \Gamma_{i3}^i V^3, \text{ или}$$

$$divV = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial V^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3} + \left(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3\right) V^1 + \left(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{32}^3\right) V^2 +$$

$$+\left(\Gamma_{13}^1 + \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{33}^3\right) V^3.$$

Таким образом, уравнение неразрывности примет вид

$$divV = \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial V^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{\zeta^1} V^1.$$

Уравнения переноса количества движения в векторном виде можно записать как

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -gradP + divT,$$

или с учетом стационарности процесса в виде

$$\rho\left(\vec{V} \cdot grad\vec{V}\right) = -gradP + divT,$$

а в проекциях на $\vec{e}_i$ в виде

$$\rho\left(\vec{V} \cdot grad\vec{V}\right)_1 = -\left(gradP\right)_1 + \left(divT\right)_1,$$

$$\rho\left(\vec{V} \cdot grad\vec{V}\right)_2 = -\left(gradP\right)_2 + \left(divT\right)_2,$$

$$\rho\left(\vec{V} \cdot grad\vec{V}\right)_3 = -\left(gradP\right)_3 + \left(divT\right)_3.$$

Подставляя сюда выведенные выше соотношения, получим

$$\rho\left(\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1} V^1 + \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^2} V^2 + \frac{\partial V^1}{\partial \zeta^3} V^3 - \frac{\zeta^1}{R^2} V^2 V^2 + \frac{2\omega\zeta^1}{R} V^2 V^3 - \omega^2 \zeta^1 V^3 V^3\right) =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial T_1^{\ 1}}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial T_1^{\ 2}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial T_1^{\ 3}}{\partial \zeta^3} - \frac{1}{\zeta^1} T_2^{\ 2} + \frac{\omega R}{\zeta^1} T_2^{\ 3} + \frac{1}{\zeta^1} T_1^{\ 1},$$

$$\rho\left(\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{2}{\zeta^1}V^1V^2-\frac{2\omega R}{\zeta^1}V^1V^3\right)-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\left(\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2\right)\right)+$$

$$+\rho\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\omega R\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right)V^3=-\frac{\partial P}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_2^{\ 1}}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_2^{\ 2}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_2^{\ 3}}{\partial\zeta^3}+\frac{\zeta^1}{R^2}T_1^{\ 2}-\frac{\omega\zeta^1}{R}T_1^{\ 3},$$

$$\rho\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\left(\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}V^2+\frac{2}{\zeta^1}V^1V^2-\frac{2\omega R}{\zeta^1}V^1V^3\right)\right)+$$

$$+\rho\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\left(\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}V^1+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}V^2\right)+\rho\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right)V^3=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial\zeta^3}+\frac{\partial T_3^{\ 1}}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial T_3^{\ 2}}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial T_3^{\ 3}}{\partial\zeta^3}+\frac{\omega R}{\zeta^1}T_2^{\ 1}-\frac{\omega\zeta^1}{R}T_1^{\ 2}+\omega^2\zeta^1T_1^{\ 3}+\frac{1}{\zeta^1}T_3^{\ 1}.$$

где

$$T_i^{\ j}=2\mu\left(t,I_2\right)D_i^{\ j},$$

$$D_1^{\ 1}=\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^1},$$

$$D_2^{\ 1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}\right),$$

$$D_3^{\ 1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_1^{\ 2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^1}+\omega R\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_2^{\ 2}=\frac{1}{2}\left(\left(2+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}-\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}+\frac{2}{\zeta^1}V^1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_3^{\ 2}=\frac{1}{2}\left(-\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)^2}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}-\frac{2\omega R}{\zeta^1}V^1\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(1-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_1{}^3=\frac{1}{2}\left(\omega R\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^1}+\frac{\partial V^1}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_2{}^3=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\left(1-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\zeta^1\right)^2}{R^2}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right),$$

$$D_3{}^3=\frac{1}{2}\left(-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^2}+\omega R\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}+\left(2+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right).$$

Введем безразмерные переменные

$\eta^i=\zeta^i/R\left(i=1,2,3\right)$ и безразмерные функции $v^i=V^*V^i\left(i=1,2,3\right).$

$$\mathrm{Re}^*\left(\frac{\partial v^1}{\partial\eta^1}v^1+\frac{\partial v^1}{\partial\eta^2}v^2+\frac{\partial v^1}{\partial\eta^3}v^3-\eta^1v^2v^2+2\kappa\eta^1v^2v^3-\kappa^2\eta^1v^3v^3\right)=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial\eta^1}+\frac{\partial S_1{}^1}{\partial\eta^1}+\frac{\partial S_1{}^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial S_1{}^3}{\partial\eta^3}-\frac{1}{\eta^1}S_2{}^2+\frac{\kappa}{\eta^1}S_2{}^3+\frac{1}{\eta^1}S_1{}^1,$$

$$\mathrm{Re}^*\left(\left(\eta^1\right)^2\left(\frac{\partial v^2}{\partial\eta^1}v^1+\frac{\partial v^2}{\partial\eta^2}v^2+\frac{2}{\eta^1}v^1v^2-\frac{2\kappa}{\eta^1}v^1v^3\right)-\kappa\left(\eta^1\right)^2\left(\frac{\partial v^3}{\partial\eta^1}v^1+\frac{\partial v^3}{\partial\eta^2}v^2\right)\right)+$$

$$+\mathrm{Re}^*\left(\eta^1\right)^2\left(\frac{\partial v^2}{\partial\eta^3}-\kappa\frac{\partial v^3}{\partial\eta^3}\right)V^3=-\frac{\partial p}{\partial\eta^2}+\frac{\partial S_2{}^1}{\partial\eta^1}+\frac{\partial S_2{}^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial S_2{}^3}{\partial\eta^3}+\eta^1S_1{}^2-\kappa\eta^1S_1{}^3,$$

$$\mathrm{Re}^*\left(-\kappa\left(\eta^1\right)^2\left(\frac{\partial v^2}{\partial\eta^1}v^1+\frac{\partial v^2}{\partial\eta^2}v^2+\frac{2}{\eta^1}v^1v^2-\frac{2\kappa}{\eta^1}v^1v^3\right)+\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\left(\frac{\partial v^3}{\partial\eta^1}v^1+\frac{\partial v^3}{\partial\eta^2}v^2\right)\right)+$$

$$+\mathrm{Re}^*\left(-\kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^3}+\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^3}\right)v^3=$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial\eta^3}+\frac{\partial S_3{}^1}{\partial\eta^1}+\frac{\partial S_3{}^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial S_3{}^3}{\partial\eta^3}+\frac{\kappa}{\eta^1}S_2{}^1-\kappa\eta^1S_1{}^2+\kappa^2\eta^1S_1{}^3+\frac{1}{\eta^1}S_3{}^1,$$

где $\mathrm{Re}^*\dfrac{\rho V^*R}{\mu}$, $p=\dfrac{PR}{\mu V^*}$, $\kappa=\omega R.$

1) $S_i{}^j=2\mu\left(t,I_2\right)E_i{}^j,$

$$E_1^{\ 1} = 2\frac{\partial v^1}{\partial \eta^1},$$

$$E_2^{\ 1} = \frac{\partial v^1}{\partial \eta^2} + \left(\eta^1\right)^2 \frac{\partial v^2}{\partial \eta^1} - \kappa\left(\eta^1\right)^2 \frac{\partial v^3}{\partial \eta^1},$$

$$E_3^{\ 1} = -\kappa\left(\eta^1\right)^2 \frac{\partial v^2}{\partial \eta^1} + \left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^1} + \frac{\partial v^1}{\partial \eta^3},$$

$$E_1^{\ 2} = \frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial v^1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial v^2}{\partial \eta^1} + \kappa\frac{\partial v^1}{\partial \eta^3},$$

$$E_2^{\ 2} = \left(2+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial \eta^2} - \kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\eta^1}v^1 + \kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial \eta^3} - \kappa^2\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^3}{\partial \eta^3},$$

$$E_3^{\ 2} = -\kappa\left(1+\left(\kappa\right)^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial \eta^2} + \frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)^2}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial v^3}{\partial \eta^2} - \frac{2\kappa}{\eta^1}v^1 +$$

$$+\left(1-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial \eta^3} + \kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^3},$$

$$E_1^{\ 3} = \kappa\frac{\partial v^1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial v^3}{\partial \eta^1} + \left(1-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial \eta^3} + \kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^3},$$

$$E_2^{\ 3} = \kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial \eta^2} + \left(1-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^2} + \left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial \eta^3} - \kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^3}{\partial \eta^3},$$

$$E_3^{\ 3} = -\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial \eta^2} + \kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^2} - \kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial \eta^3} + \left(2+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial \eta^3}.$$

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

$$\frac{\partial V^1}{\partial \zeta^1} + \frac{\partial V^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial V^3}{\partial \zeta^3} + \frac{1}{\zeta^1}V^1 = 0.$$

После введения безразмерных переменных получим

$$\frac{\partial v^1}{\partial \eta^1} + \frac{\partial v^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial v^3}{\partial \eta^3} + \frac{1}{\eta^1}v^1 = 0.$$

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА КОЛИЧЕСТВА ТЕПЛА

$$\rho C_p\left(V^1\frac{\partial t}{\partial \zeta^1} + V^2\frac{\partial t}{\partial \zeta^2} + V^3\frac{\partial t}{\partial \zeta^3}\right) =$$

$$= \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial\left(\zeta^1\right)^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta^2}\left(\frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}\frac{\partial t}{\partial \zeta^2} + \omega R\frac{\partial t}{\partial \zeta^3}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta^3}\left(\omega R\frac{\partial t}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial t}{\partial \zeta^3}\right) + \frac{1}{\zeta^1}\frac{\partial t}{\partial \zeta^1}\right).$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$Pe^*\left(v^1\frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}+v^2\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+v^3\frac{\partial\theta}{\partial\eta^3}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\theta}{\partial\left(\eta^1\right)^2}+\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+\kappa\frac{\partial\theta}{\partial\eta^3}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta^3}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\eta^3}\right)+\frac{1}{\eta^1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}.$$

где $\theta=\frac{t-t_0}{t_w-t_0}$, $Pe^*=\frac{\rho C_p V^* R}{\lambda}$.

Введем новую независимую переменную $\varsigma=\eta^3/Pe^*$. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial\eta^3}=\frac{\partial}{\partial\varsigma}\frac{d\varsigma}{d\eta^3}=\frac{1}{Pe^*}\frac{\partial}{\partial\varsigma}$, получим

$$Pe^*\left(v^1\frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}+v^2\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+\frac{v^3}{Pe^*}\frac{\partial\theta}{\partial\varsigma}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\theta}{\partial\left(\eta^1\right)^2}+\frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+\frac{\kappa}{Pe^*}\frac{\partial\theta}{\partial\varsigma}\right)+\frac{1}{Pe^*}\frac{\partial}{\partial\varsigma}\left(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+\frac{1}{Pe^*}\frac{\partial\theta}{\partial\varsigma}\right)+\frac{1}{\eta^1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}.$$

Пренебрегая членами порядка $\frac{1}{Pe^*}$ и выше, получим окончательно

$$Pe^*\left(v^1\frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}+v^2\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}+\frac{v^3}{Pe^*}\frac{\partial\theta}{\partial\varsigma}\right)=\frac{\partial^2\theta}{\partial\left(\eta^1\right)^2}+\frac{1}{\eta^1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}+\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial\theta}{\partial\left(\eta^2\right)^2}.$$

Примем граничное условие прилипания жидкости на стенке канала

$\vec{V}\big|_\Gamma=0$,

где Γ - граница поперечного сечения канала.

На входе и на границе канала температура принимает постоянное значение T_{in} и T_w соответственно.

Принятые выше условия однозначности в выбранной системе координат могут быть записаны в виде

$v^i\left(\eta^1,0\right)=0\left(i=1,2,3\right), r\le\eta^1\le R,$

$v^i\left(\eta^1,2\pi/n\right)=0\left(i=1,2,3\right), r\le\eta^1\le R,$

$v^i\left(r,\eta^2\right)=0\left(i=1,2,3\right), 0\le\eta^2\le 2\pi/n,$

$v^i\left(R,\eta^2\right)=0\left(i=1,2,3\right), 0\le\eta^2\le 2\pi/n,$

$\theta\left(\eta^1,0,\eta^3\right)=1, r\le\eta^1\le R, 0\le\varsigma<\infty,$

$\theta\left(\eta^1,2\pi/n,\eta^3\right)=1, r\le\eta^1\le R, 0\le\varsigma<\infty,$

$\theta\left(r,\eta^2,\eta^3\right)=1, 0\le\eta^2\le 2\pi/n, 0\le\varsigma<\infty,$

$\theta\left(R,\eta^2,\eta^3\right)=1, 0\le\eta^2\le 2\pi/n, 0\le\varsigma<\infty,$

$\theta\left(\eta^1,\eta^2,0\right)=0, 0\le\eta^2\le 2\pi/n, 0\le\eta^2\le 2\pi/n,$

где n - число заходов многозаходного канала.

Согласно определению $trD^2=\left(D^2\right)_i^i=\left(D^2\right)_1^1+\left(D^2\right)_2^2+\left(D^2\right)_3^3$, тогда

$D^2=D_i{}^j e^i e_j\cdot D_n{}^m e^n e_m=\delta_j^n D_i{}^j D_n{}^m e^i e_m=D_i{}^j D_j{}^m e^i e_m,$

$\left(D^2\right)_i^m=D_i{}^j D_j{}^m=D_i^1 D_1{}^m+D_i^2 D_2{}^m+D_i^3 D_3{}^m,$

$\left(D^2\right)_i^i=D_i^1 D_1{}^i+D_i^2 D_2{}^i+D_i^3 D_3{}^i$, или

$\left(D^2\right)_i^i=\left(D_1^1\right)^2+\left(D_2{}^2\right)^2+\left(D_3{}^3\right)^2+2D_2{}^1 D_1{}^2+2D_3{}^1 D_1{}^3+2D_3{}^2 D_2{}^3.$

Выражение для $I_2=\frac{1}{2}\frac{V^{*2}}{R^2}trS^2$ примет вид

$$I_2/\left(\frac{1}{2}\frac{V^{*2}}{R^2}\right)=\left(2\frac{\partial v^1}{\partial\eta^1}\right)^2+$$

$$+\left(\left(2+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial\eta^2}-\kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^2}+\frac{2}{\eta^1}v^1+\frac{\omega\left(\zeta^1\right)^2}{R}\frac{\partial V^2}{\partial\zeta^3}-\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\frac{\partial V^3}{\partial\zeta^3}\right)^2+$$

$$+\left(-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^2}+\kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^2}-\kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^3}+\left(2+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^3}\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{\partial v^1}{\partial\eta^2}+\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^1}-\kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^3}{\partial\eta^1}\right)\left(\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial v^1}{\partial\eta^2}+\frac{\partial v^2}{\partial\eta^1}+\kappa\frac{\partial v^1}{\partial\eta^3}\right)+$$

$$+2\left(-\kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^1}+\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^1}+\frac{\partial v^1}{\partial\eta^3}\right)\times$$

$$\times\left(\kappa\frac{\partial v^1}{\partial\eta^2}+\frac{\partial v^3}{\partial\eta^1}+\left(1-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial\eta^3}+\kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^3}\right)+$$

$$+2\left(-\kappa\left(1+\left(\kappa\right)^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial\eta^2}+\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)^2}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial v^3}{\partial\eta^2}-\frac{2\kappa}{\eta^1}v^1+\left(1-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^2}{\partial\eta^3}+\kappa\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v}{\partial\eta}\right.$$

$$\times\left(\kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^2}+\left(1-\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)\frac{\partial v^3}{\partial\eta^2}+\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^2}{\partial\eta^3}-\kappa\left(\eta^1\right)^2\frac{\partial v^3}{\partial\eta^3}\right).$$

Соотношения, связывающие ковариантные и контравариантные компоненты примут вид

$V^i=g^{ij}V_j=g^{i1}V_1+g^{i2}V_2+g^{i3}V_3,$

$$V^1 = g^{11}V_1 + g^{12}V_2 + g^{13}V_3 = V_1,$$

$$V^2 = g^{21}V_1 + g^{22}V_2 + g^{23}V_3 = \frac{\left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)}{\left(\zeta^1/R\right)^2}V_2 + \omega R V_3,$$

$$V^3 = g^{31}V_1 + g^{32}V_2 + g^{33}V_3 = \omega R V_2 + V_3,$$

и

$$V_i = g_{ij}V^j = g_{i1}V^1 + g_{i2}V^2 + g_{i3}V^3,$$

$$V_1 = g_{11}V^1 + g_{12}V^2 + g_{13}V^3 = V^1,$$

$$V_2 = g_{21}V^1 + g_{22}V^2 + g_{23}V^3 = \left(\zeta^1/R\right)^2 V^2 - \left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2 V^3,$$

$$V_3 = g_{31}V^1 + g_{32}V^2 + g_{33}V^3 = -\left(\omega/R\right)\left(\zeta^1\right)^2 V^2 + \left(1+\omega^2\left(\zeta^1\right)^2\right)V^3.$$

Таким образом, для безразмерных компонент имеем

$$v^1 = v_1,$$

$$v^2 = \frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}v_2 + \kappa v_3,$$

$$v^3 = \kappa v_2 + v_3,$$

$$v_1 = v^1,$$

$$v_2 = \left(\eta^1\right)^2 v^2 - \kappa\left(\eta^1\right)^2 v^3,$$

$$v_3 = -\kappa\left(\eta^1\right)^2 v^2 + \left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)v^3.$$

Соотношения, связывающие различные компоненты скорости с физическими компонентами примут вид

$$v^{\langle 1\rangle} = \frac{v^1}{\sqrt{g^{11}}} = v^1,$$

$$v^{\langle 2\rangle} = \frac{v^2}{\sqrt{g^{22}}} = \frac{\eta^1 v^2}{\sqrt{1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2}},$$

$$v^{\langle 3\rangle} = \frac{v^3}{\sqrt{g^{33}}} = v^3,$$

и

$$v_{\langle 1\rangle} = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} = v^1,$$

$$v_{\langle 2\rangle} = \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{v_2}{\eta^1},$$

$$v_{\langle 3\rangle}=\frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}}=\frac{v_3}{\sqrt{1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2}}.$$

Среднерасходную скорость найдем на основе ее определения

$$V_a=\frac{\int_\Omega\left(\vec{V}\cdot\vec{k}\right)d\Omega}{\frac{\pi\left(R^2-r^2\right)}{3}}.$$

Тогда

$$V_a=\frac{3}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\int_\Omega\left(\left(V^1\vec{e}_1+V^2\vec{e}_2+V^3\vec{e}_3\right)\cdot\vec{k}\right)d\Omega=$$

$$=\frac{3V^*}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\int_\Omega\left(v^3\vec{e}_3\cdot\vec{k}\right)d\Omega=\frac{3V^*}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\int_\Omega v^3d\Omega.$$

Учитывая, что $d\Omega=\left|J\right|d\zeta^1d\zeta^2$, а

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\zeta^1} & \frac{\partial x}{\partial\zeta^2}\\ \frac{\partial y}{\partial\zeta^1} & \frac{\partial y}{\partial\zeta^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\zeta^1} & \frac{\partial x}{\partial\zeta^2}\\ \frac{\partial y}{\partial\zeta^1} & \frac{\partial y}{\partial\zeta^2}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial\zeta^1}\frac{\partial y}{\partial\zeta^2}-\frac{\partial x}{\partial\zeta^2}\frac{\partial y}{\partial\zeta^1}=$$

$$=\cos\left(\zeta^2/R-\omega\zeta^3\right)\left(\zeta^1/R\right)\cos\left(\zeta^2/R-\omega\zeta^3\right)+\left(\zeta^1/R\right)\sin\left(\zeta^2/R-\omega\zeta^3\right)\sin\left(\zeta^2/R-\omega\zeta^3\right)=$$

$$=\cos\left(\eta^2-\kappa\eta^3\right)\eta^1\cos\left(\eta^2-\kappa\eta^3\right)+\eta^1\sin\left(\eta^2-\kappa\eta^3\right)\sin\left(\eta^2-\kappa\eta^3\right)=\eta^1,$$

получим

$$V_a=\frac{3V^*R^2}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\int_\Omega v^3\eta^1d\eta^1d\eta^2=\frac{3V^*R^2}{\pi\left(R^2-r^2\right)}\int_0^{2\pi/3}d\eta^2\int_{r/R}^1v^3\eta^1d\eta^1.$$

Для удобства представим скорость в виде суммы двух составляющих

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w},$$

где $\vec{w}=w\vec{k}$ - составляющая, перпендикулярная плоскости поперечного сечения.

Учитывая, что $w=\left(\vec{v}\cdot\vec{k}\right)=\left(\left(v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2+v^3\vec{e}_3\right)\cdot\vec{k}\right)=v^3$, получим $\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2+v^3\vec{e}_3-v^3\vec{k}$ - составляющая скорости в плоскости поперечного сечения канала.

Так как $\vec{k}=\vec{e}_3+\kappa\vec{e}_2$, то получим

$$\vec{u}=v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2+v^3\vec{e}_3-v^3\left(\vec{e}_3+\kappa\vec{e}_2\right)=v^1\vec{e}_1+\left(v^2-\kappa v^3\right)\vec{e}_2.$$

Проекции этого вектора на направления $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$

$$\left(\vec{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\vec{e}_1\right)=\left(\left(v^1\vec{e}_1+\left(v^2-\kappa v^3\right)\vec{e}_2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\vec{e}_1\right)=v^1\sqrt{g_{11}}=v_1,$$

$$\left(\vec{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\vec{e}_2\right)=\left(\left(v^1\vec{e}_1+\left(v^2-\kappa v^3\right)\vec{e}_2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\vec{e}_2\right)=\left(v^2-\kappa v^3\right)\sqrt{g_{22}}=\frac{v_2\sqrt{g_{22}}}{g_{22}}=\frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}},$$

и, следовательно,

$$\vec{u}=v^1\sqrt{g_{11}}\frac{\vec{e}_1}{\sqrt{g_{11}}}+\frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\vec{e}_2}{\sqrt{g_{22}}}=v_1\vec{e}_1+\frac{v_2}{g_{22}}\vec{e}_2.$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА

Представим решение уравнения в виде

$$\theta=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)e^{-\lambda p^2\varsigma}.$$

Найдем $\dfrac{\partial\theta}{\partial\varsigma}=-\sum_{p=1}^{\infty}A_p\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)\lambda_p{}^2e^{-\lambda p^2\varsigma}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta^1}=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\dfrac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^1}e^{-\lambda p^2\varsigma}$,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\left(\eta^1\right)^2}=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^1\right)^2}e^{-\lambda p^2\varsigma},\frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^2}e^{-\lambda p^2\varsigma},$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\left(\eta^2\right)^2}=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^2\right)^2}e^{-\lambda p^2\varsigma}.$$

Подставим эти ряды в уравнение переноса энергии

$$Pe^*v^1\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^1}e^{-\lambda p^2\varsigma}+Pe^*v^2\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^2}e^{-\lambda p^2\varsigma}+$$

$$-\lambda_p{}^2v^3\sum_{p=1}^{\infty}A_p\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)e^{-\lambda p^2\varsigma}=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^1\right)^2}e^{-\lambda p^2\varsigma}+$$

$$+\frac{1}{\eta^1}\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^1}e^{-\lambda p^2\varsigma}+\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\sum_{p=1}^{\infty}A_p\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^2\right)^2}e^{-\lambda p^2\varsigma}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях

$$Pe^*v^1\left(\eta^1,\eta^2\right)\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^1}+Pe^*v^2\left(\eta^1,\eta^2\right)\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^2}-\lambda_p{}^2v^3\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)=$$

$$=\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^1\right)^2}+\frac{1}{\eta^1}\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^1}+\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^2\right)^2},$$

или

$$\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^1\right)^2}+\frac{1}{\eta^1}\frac{\partial\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\eta^1}+\frac{\left(1+\kappa^2\left(\eta^1\right)^2\right)}{\left(\eta^1\right)^2}\frac{\partial^2\Phi_p\left(\eta^1,\eta^2\right)}{\partial\left(\eta^2\right)^2}-$$

$$-Pe^{*}v^{1}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right)\frac{\partial\Phi_{p}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right)}{\partial\eta^{1}}-Pe^{*}v^{2}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right)\frac{\partial\Phi_{p}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right)}{\partial\eta^{2}}+\lambda_{p}{}^{2}v^{3}\Phi_{p}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right)=0.$$

Функции $\Phi_{p}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right)$ ортогональны в области Ω с весом v^{3}. Это свойство

Для определения неизвестных коэффициентов A_{p} используем начальное условие

$$\theta(0)=\sum_{p=1}^{\infty}A_{p}\Phi_{p}\left(\eta^{1},\eta^{2}\right).$$

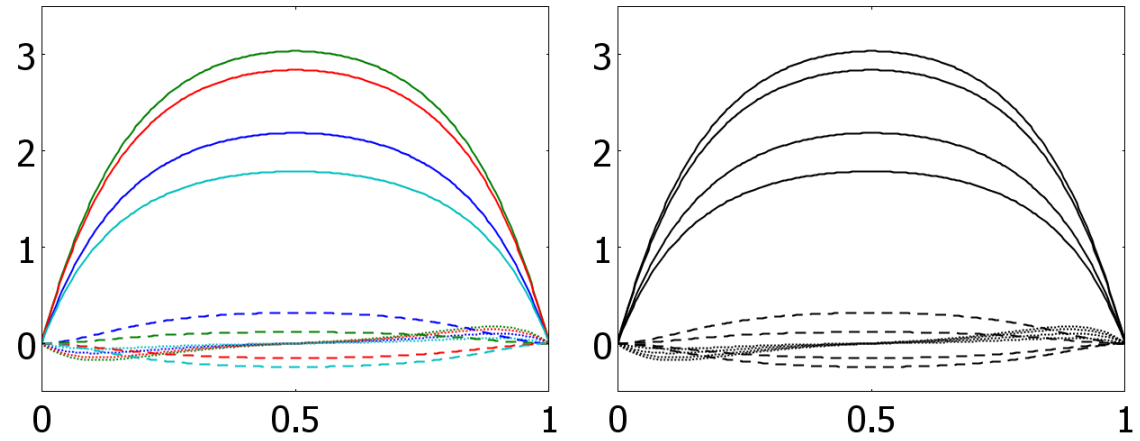
Результаты расчетов

Анализ структуры гидродинамических полей проводился для чисел $\mathrm{Re}\to 0$ $\mathrm{Re}=\dfrac{V_{a}D\rho}{\mu_{0}}$ и $\mathrm{Re}=10;100;1000$ для отношения $r/R=0.5$ для канала с трехзаходной шнековой вставкой.

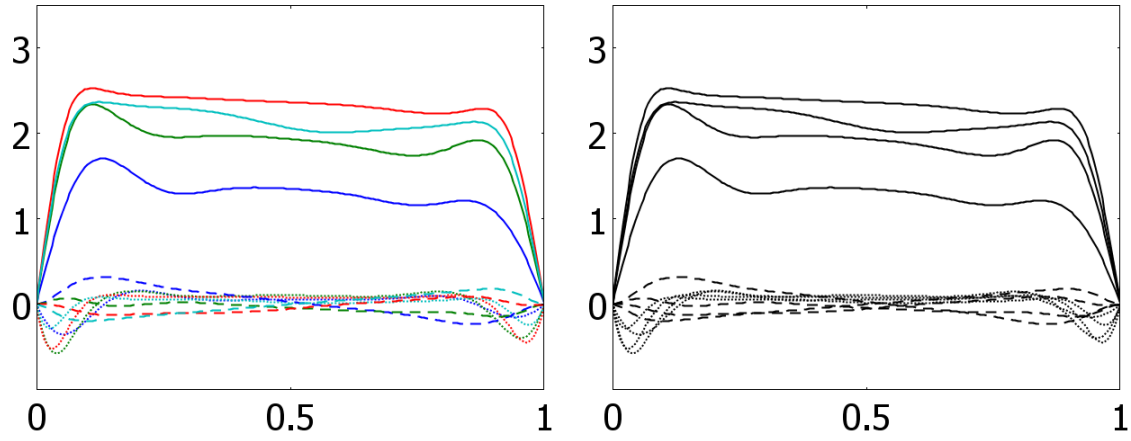
Предложена винтовая система координат для математического описания ламинарных течений вязкой жидкости в каналах с трехзаходными шнековыми вставками. Уравнения движения записаны в проекции на направления естественного базиса. На основе полученных численных результатов проанализированы распределения гидродинамических характеристик в каналах с трехзаходными шнековыми вставками различной геометрией (S/D=4…8, r/R=0.3…0.7) для чисел Re до 1500.

S=4R=2D

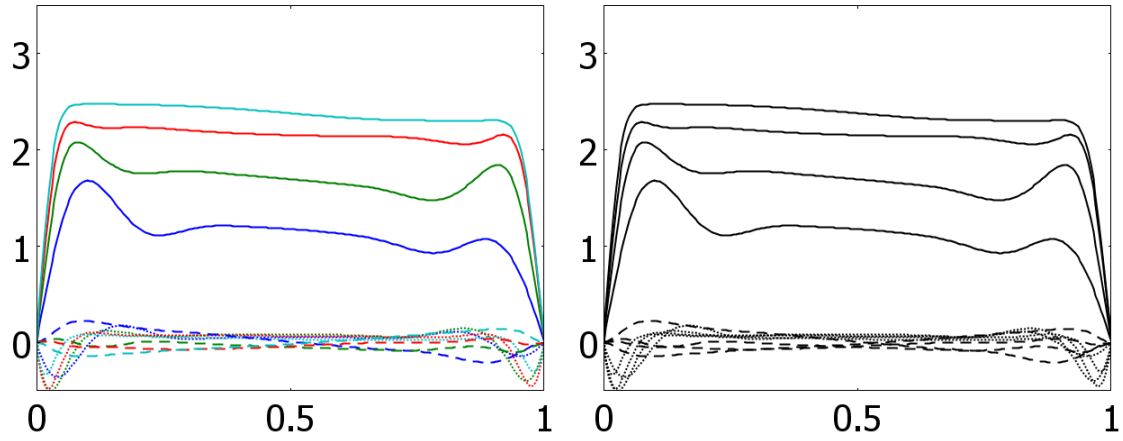
Окружные разрезы и компоненты скорости u3, w1,w2



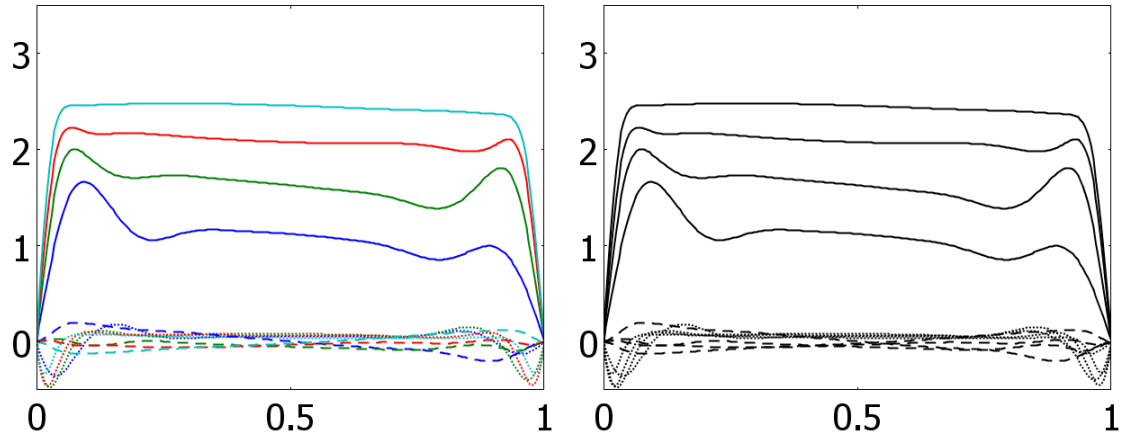
$\mathrm{Re}\to 0$



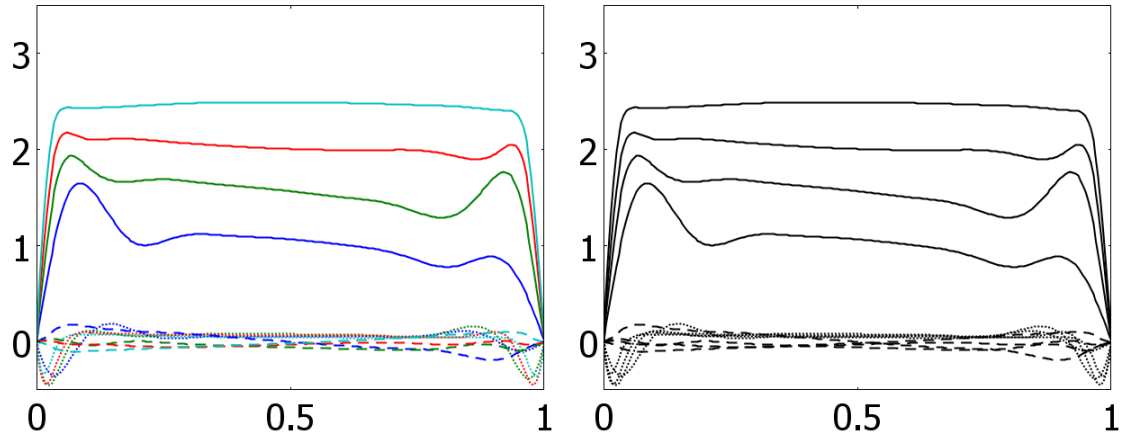
Re = 200



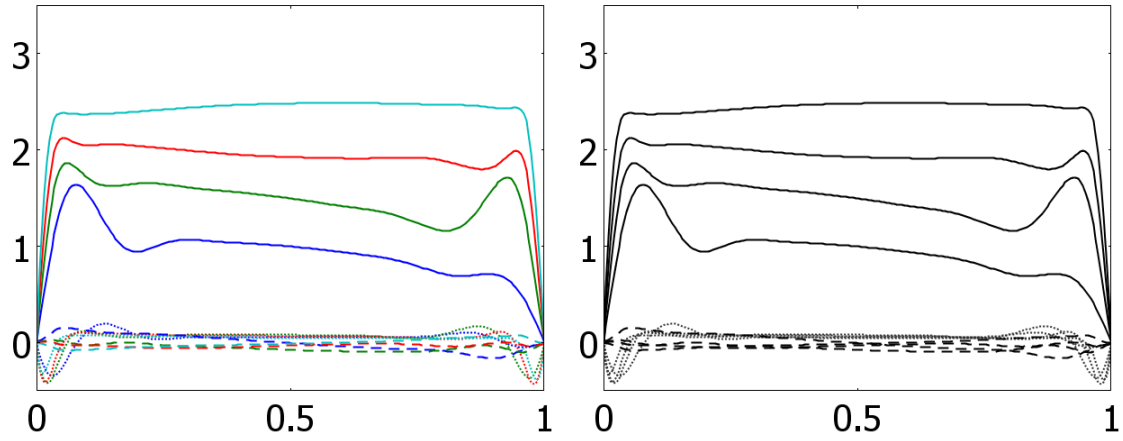
Re = 400



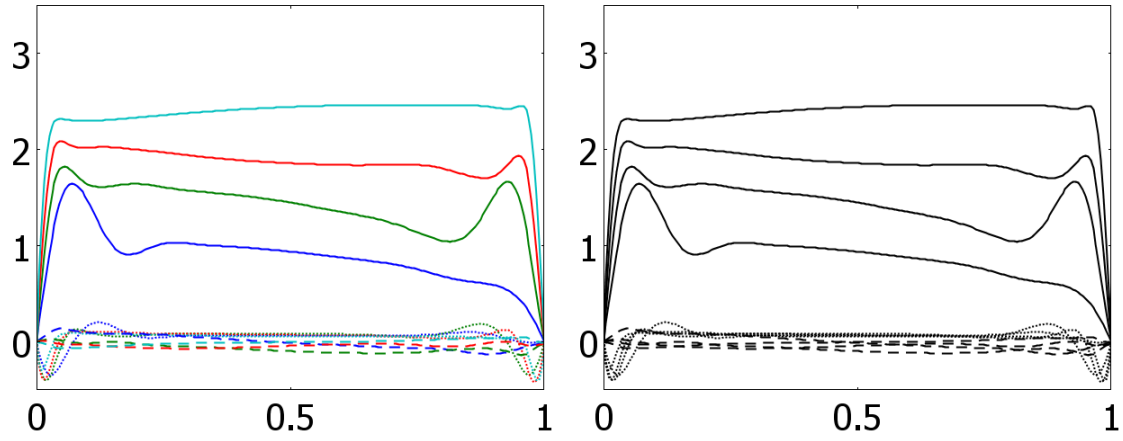
Re = 500



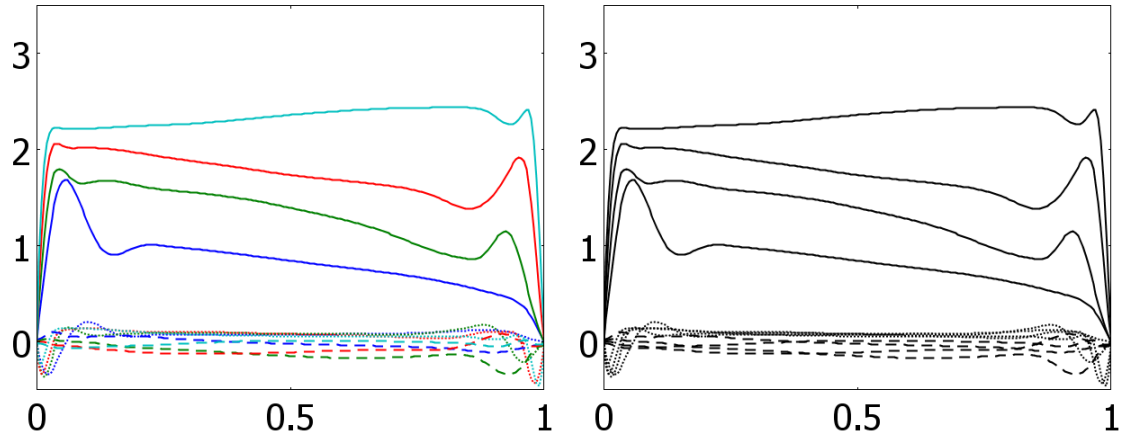
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

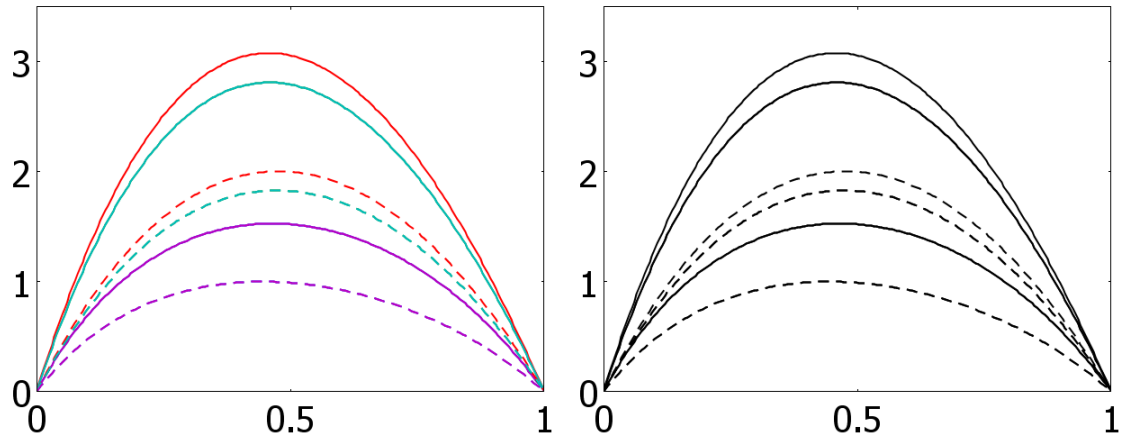


$\mathrm{Re} = 1000$

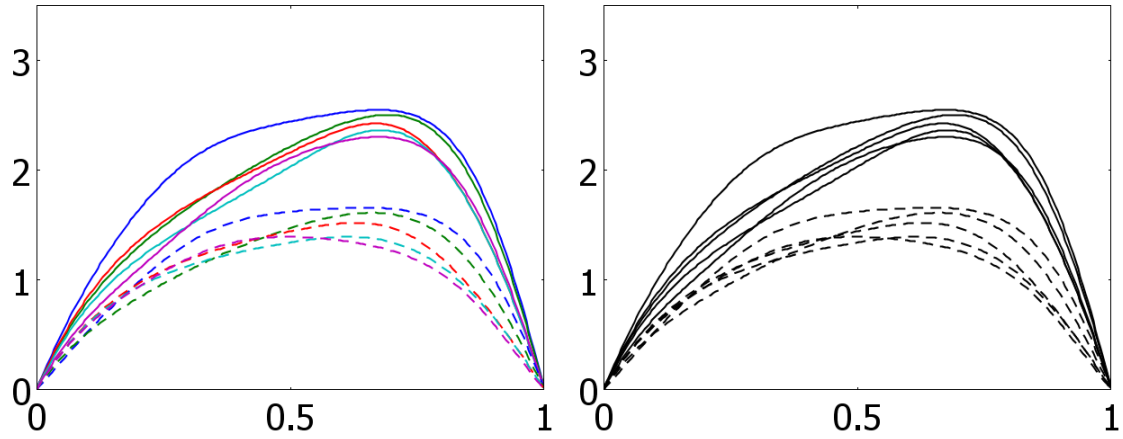


$\mathrm{Re} = 1500$

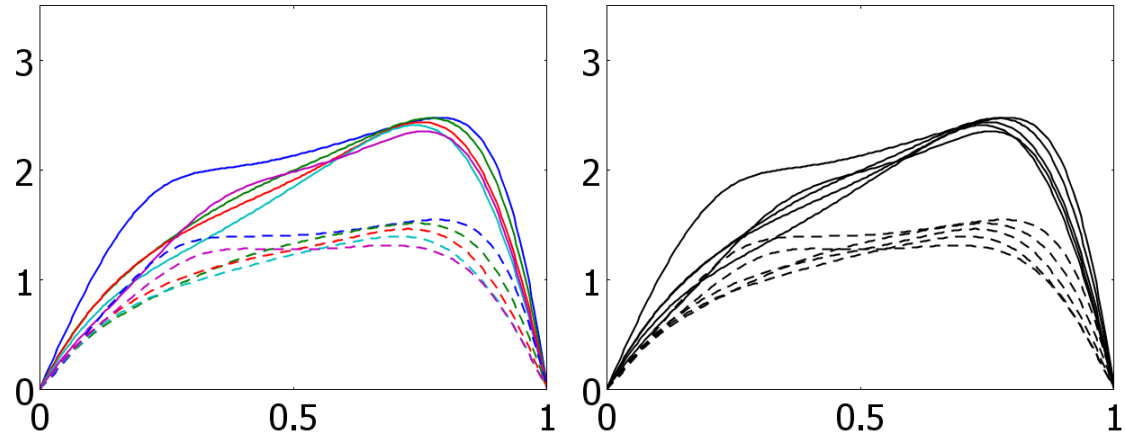
Профили радиальный разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



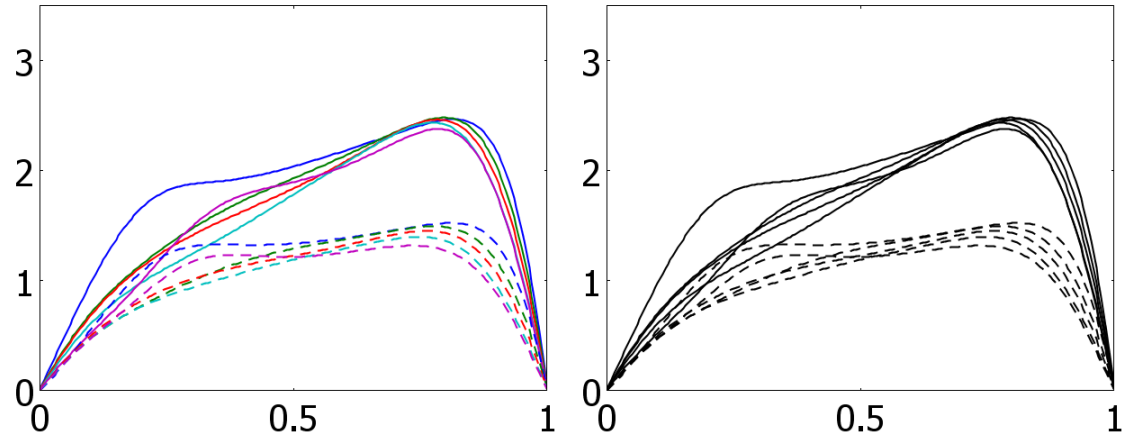
$\mathrm{Re} \to 0$



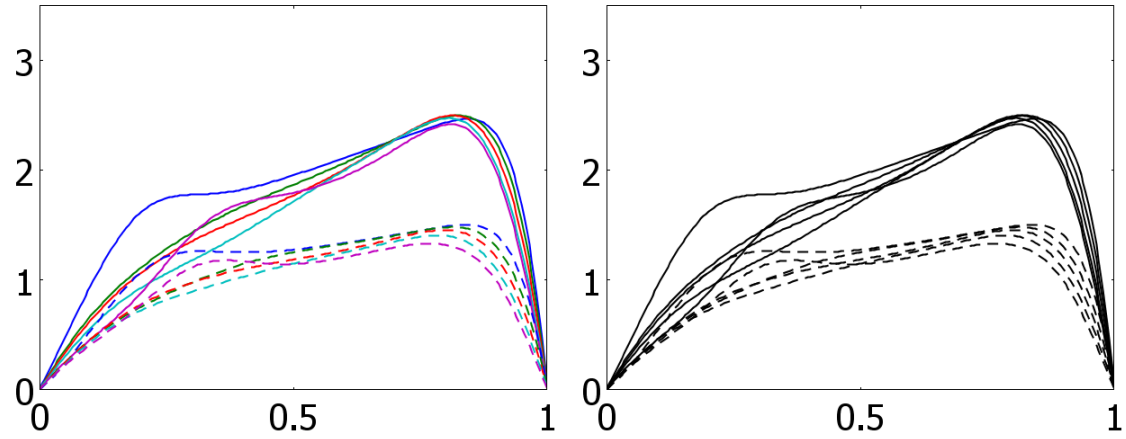
$\mathrm{Re} = 200$



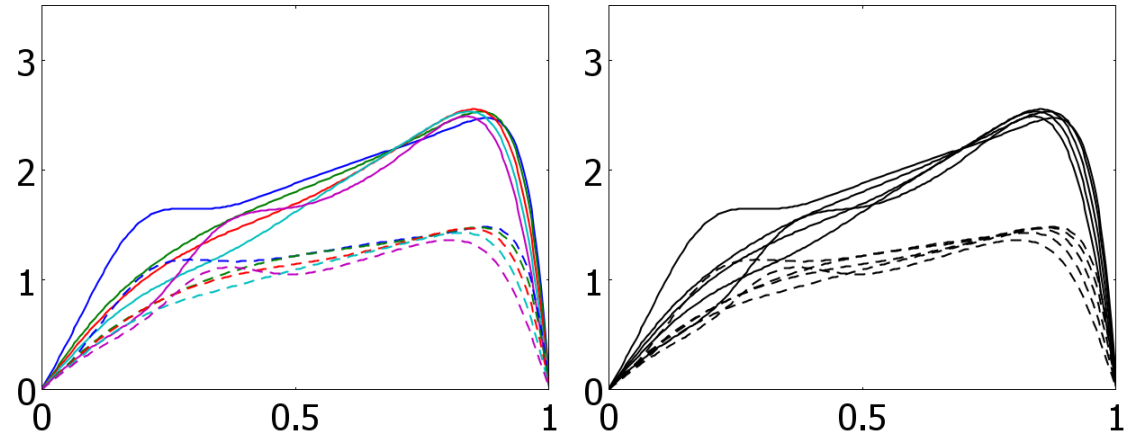
Re = 400



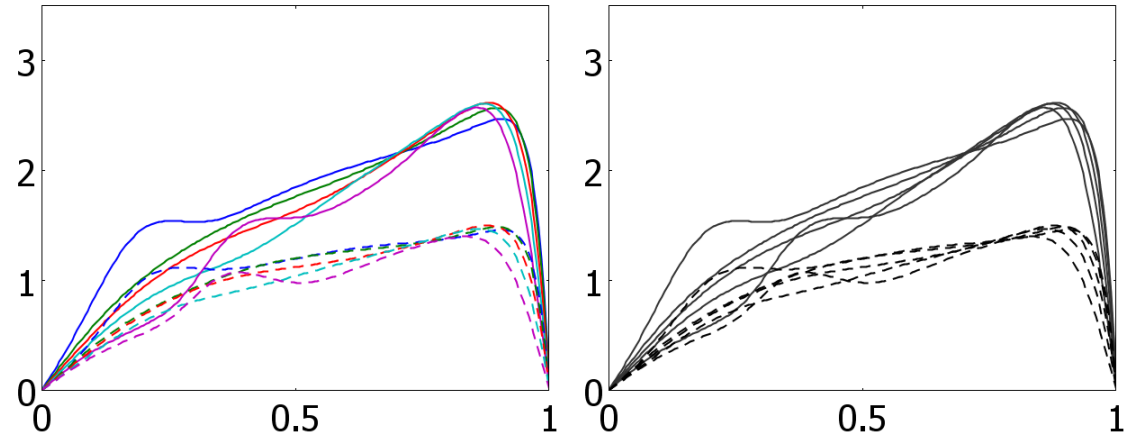
Re = 500



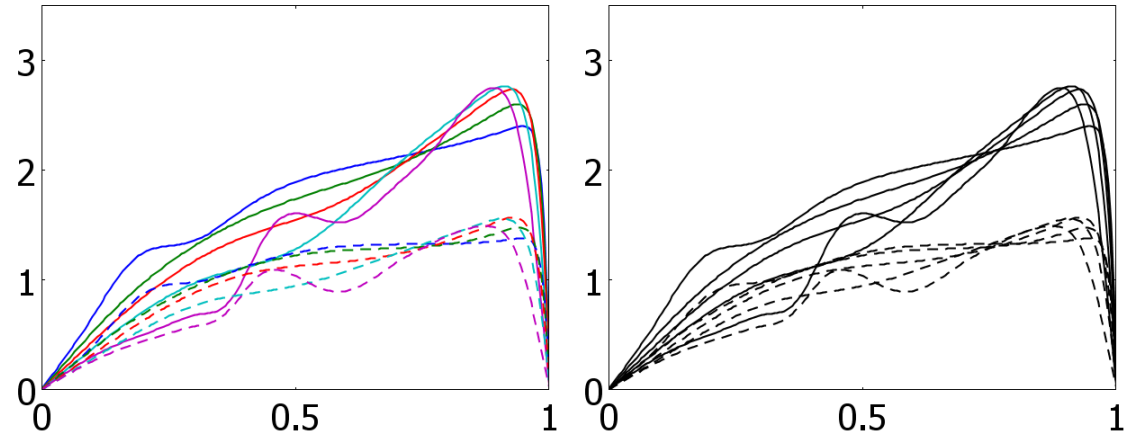
Re = 600



Re = 800

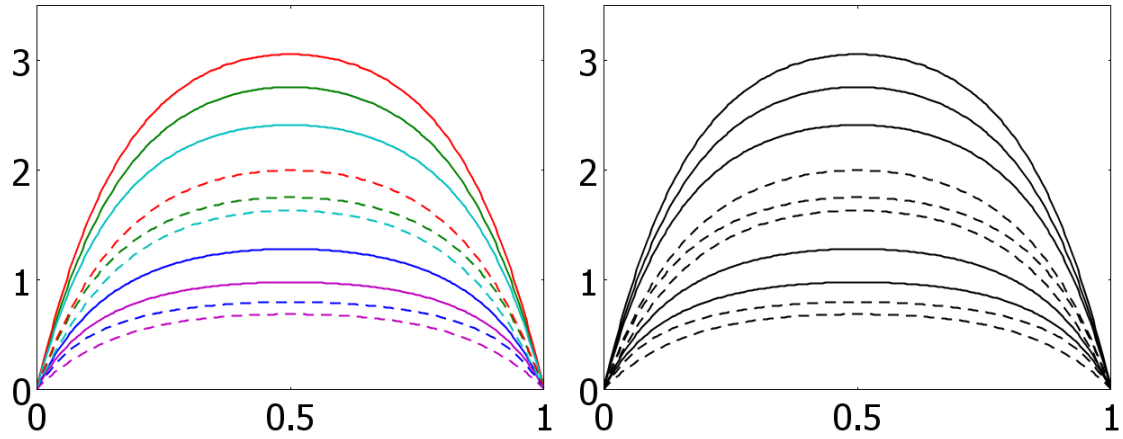


Re = 1000

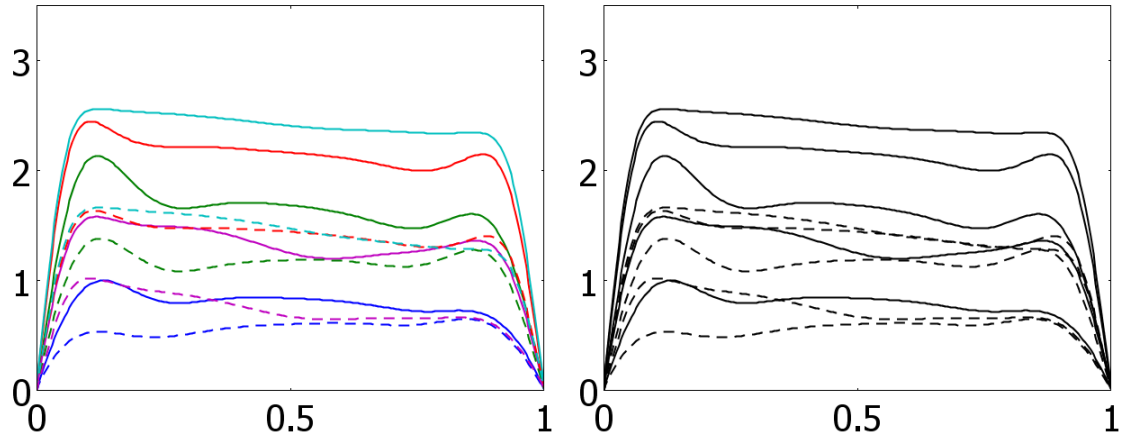


Re = 1500

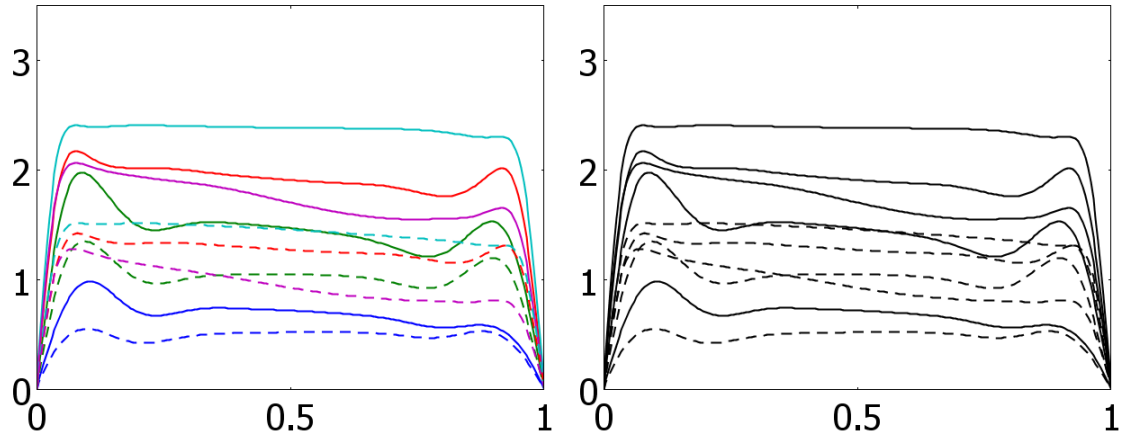
Профили винтовой и осевой компонент u3 и v3 окружной разрез



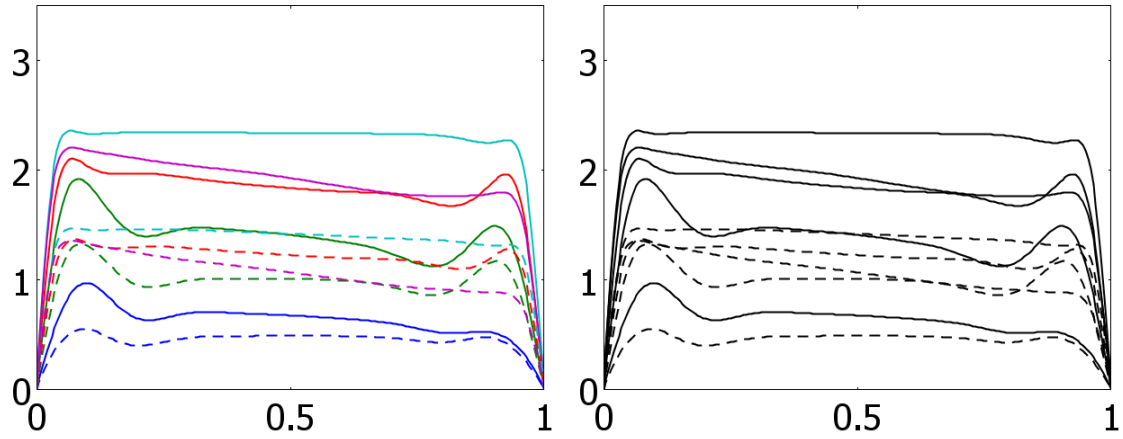
$\mathrm{Re} \to 0$



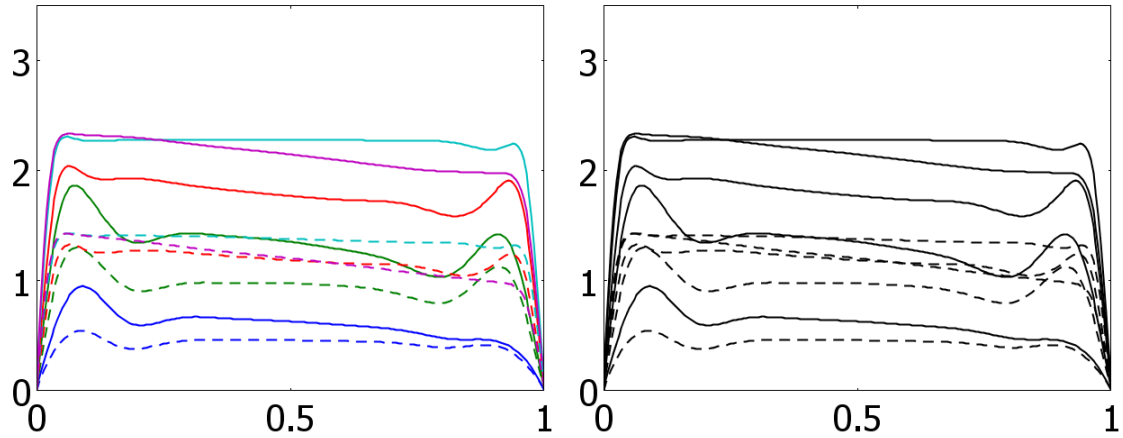
$\mathrm{Re} = 200$



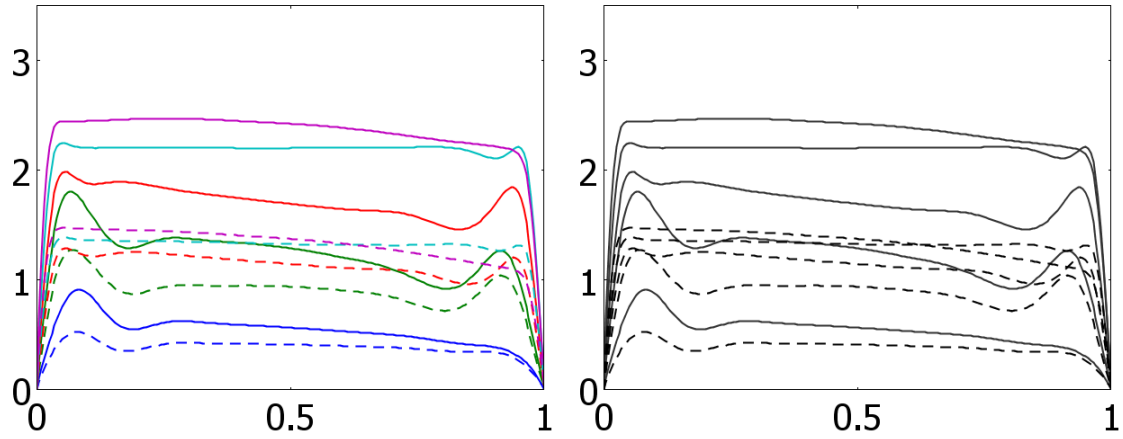
$\mathrm{Re} = 400$



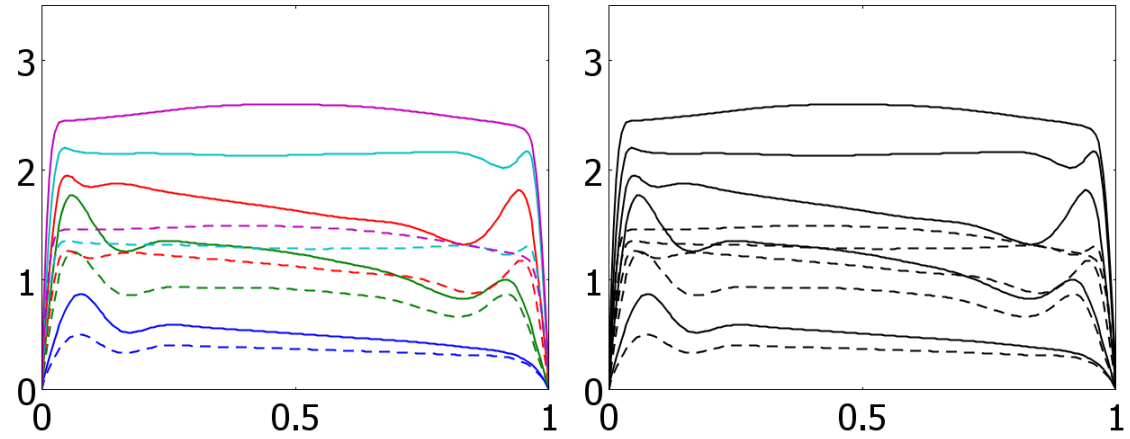
Re = 500



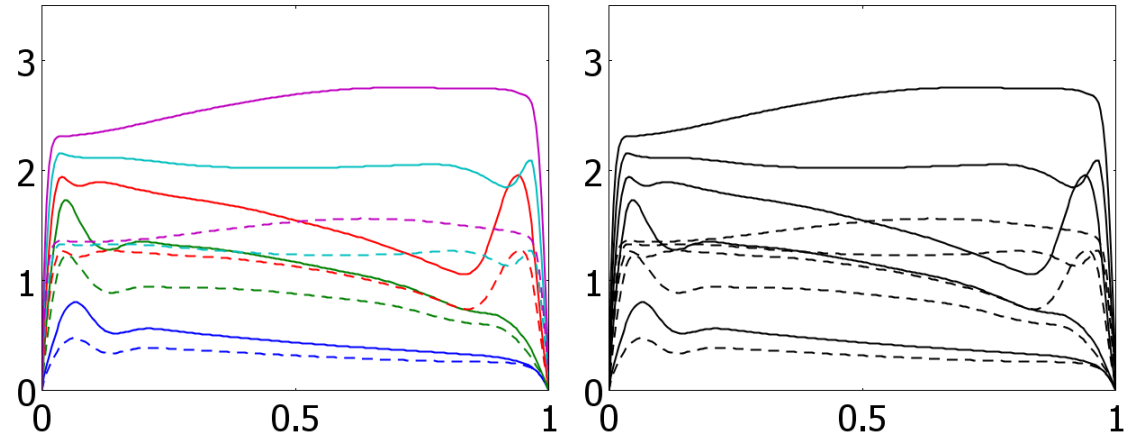
Re = 600



Re = 800

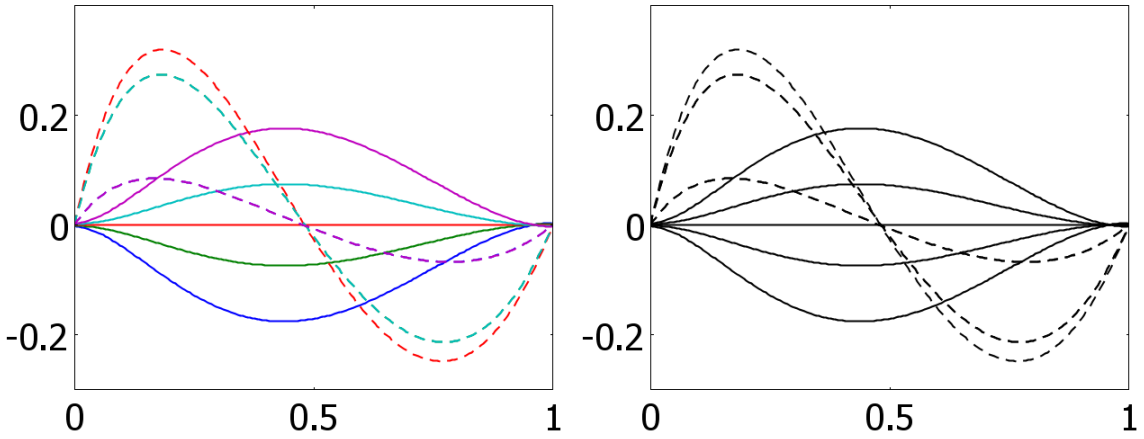


$\mathrm{Re} = 1000$

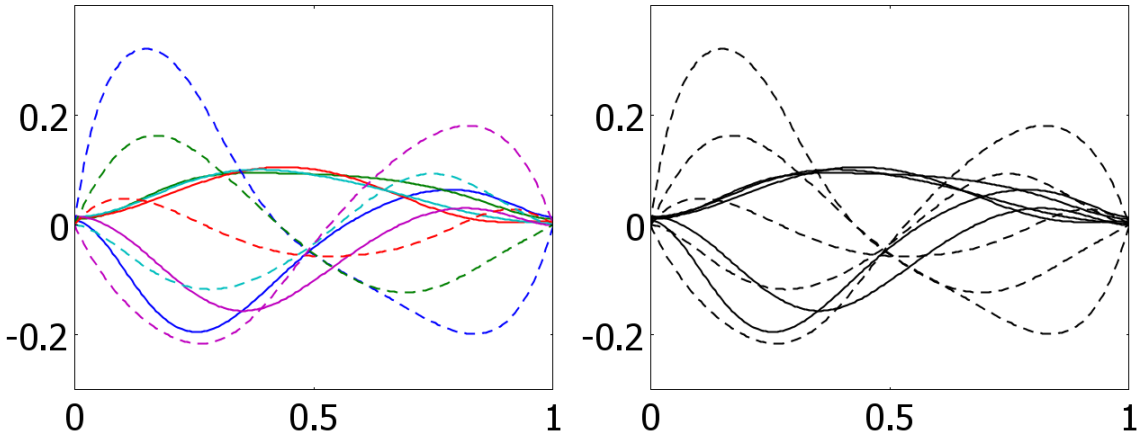


$\mathrm{Re} = 1500$

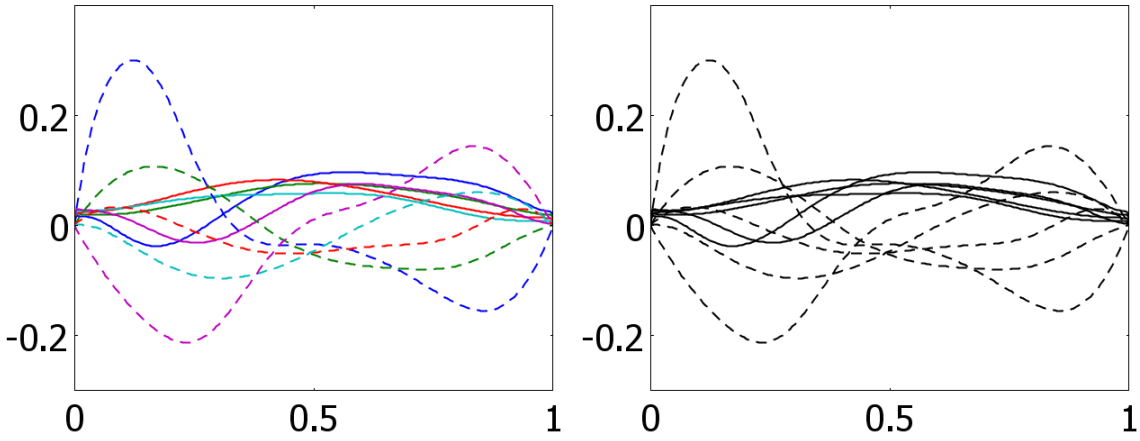
Профили контравариантных компонент w1 и w2 радиальный разрез



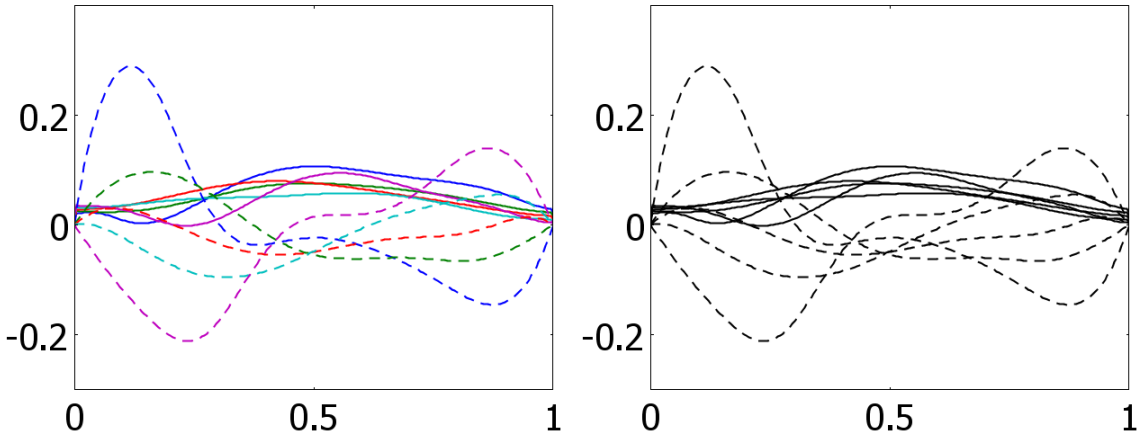
$\mathrm{Re} \to 0$



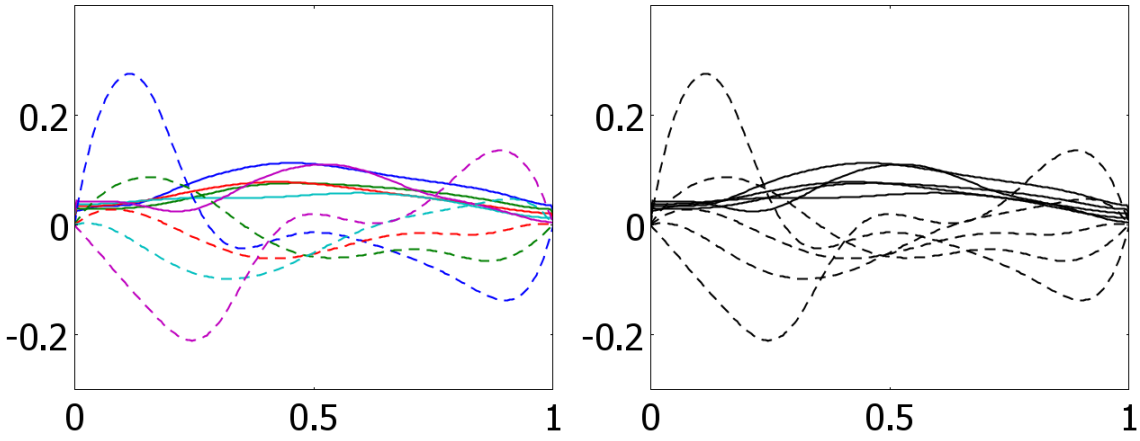
Re = 200



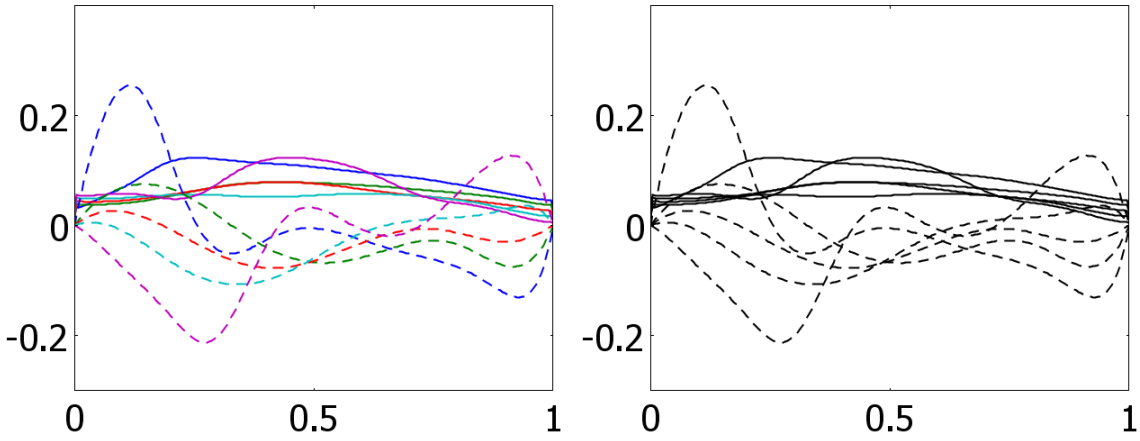
Re = 400



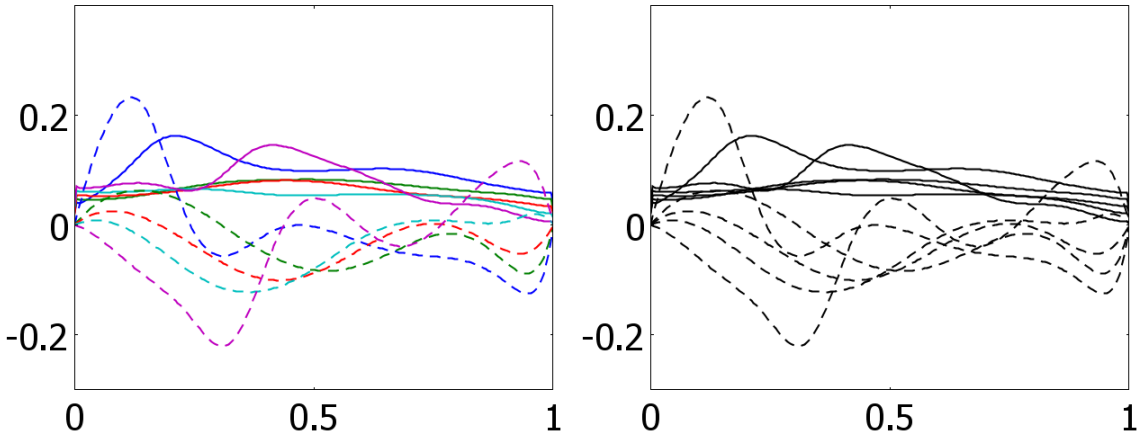
Re = 500



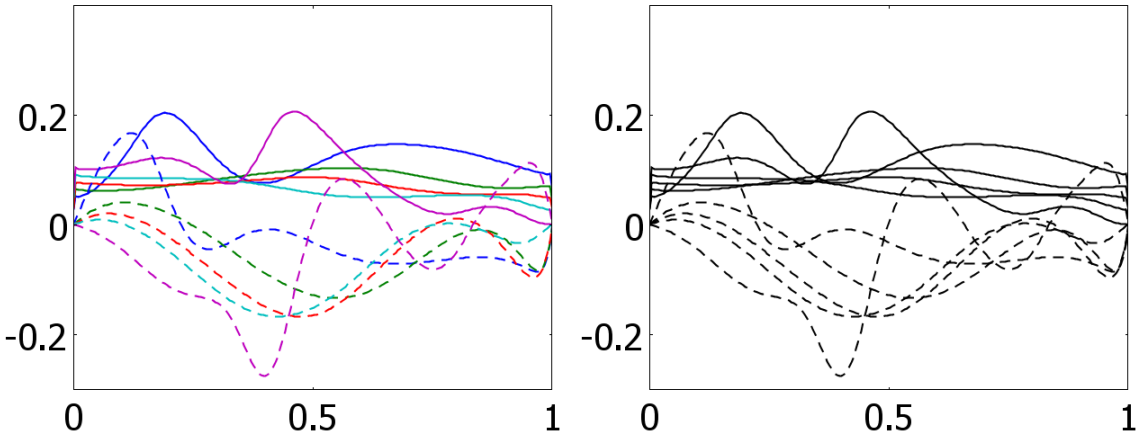
Re = 600



Re = 800

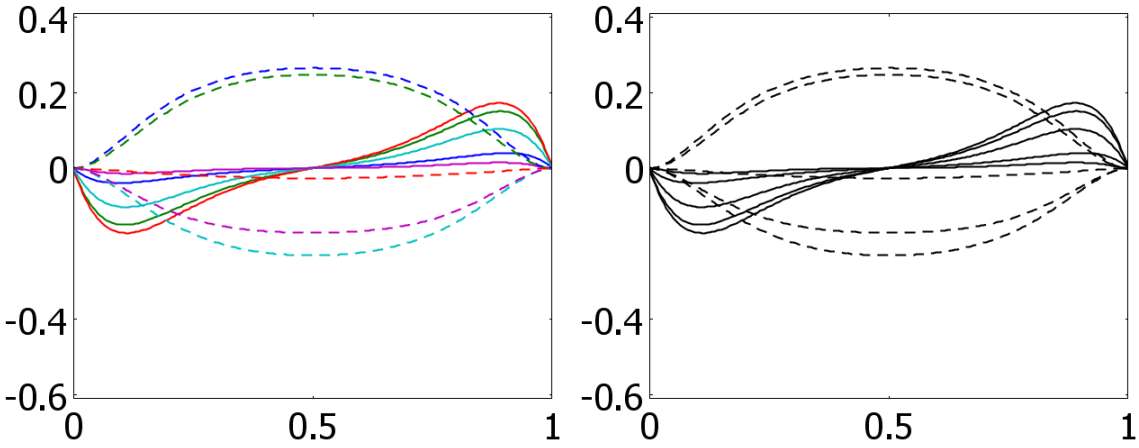


Re = 1000

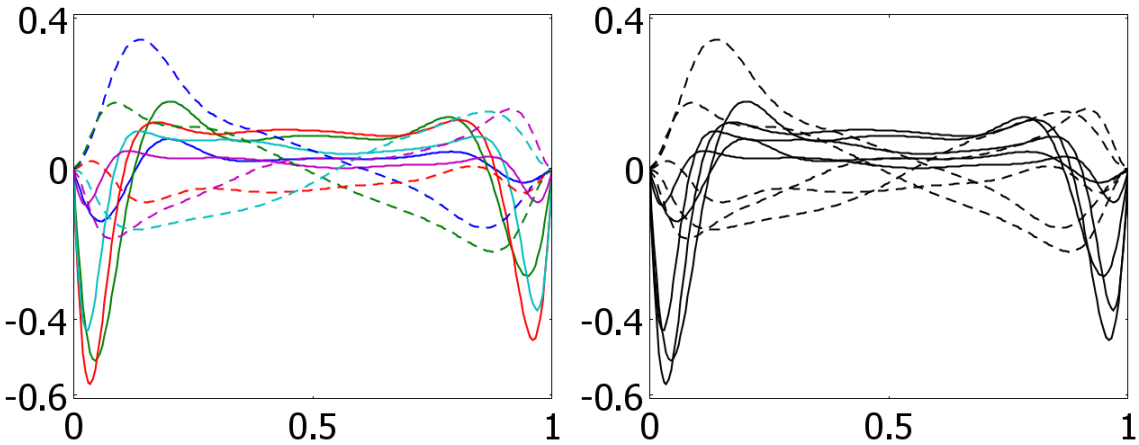


$\mathrm{Re} = 1500$

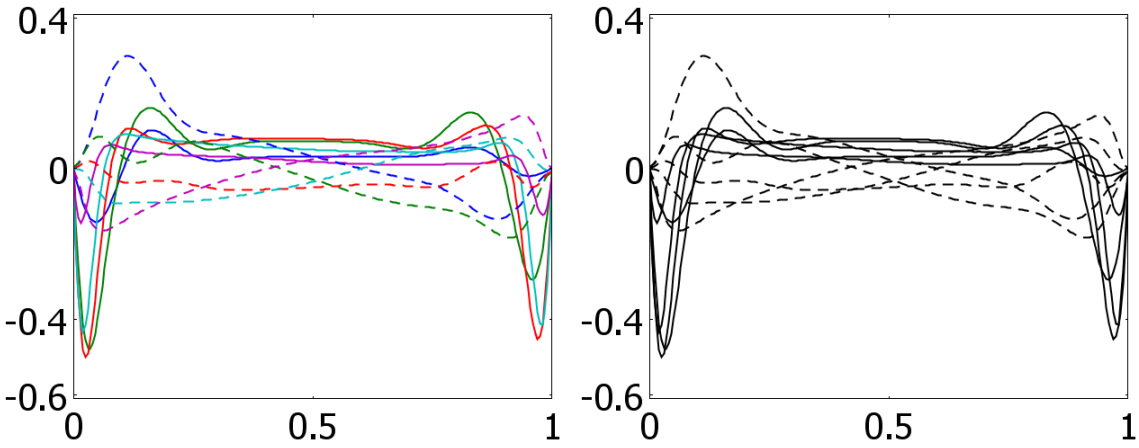
Профили окружной разрез контравариантных компонент w1 и w2



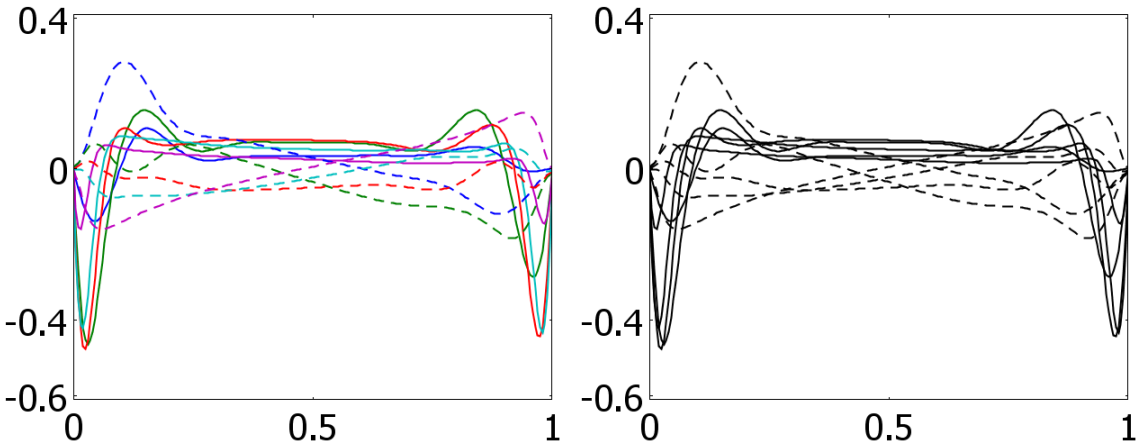
$\mathrm{Re} \to 0$



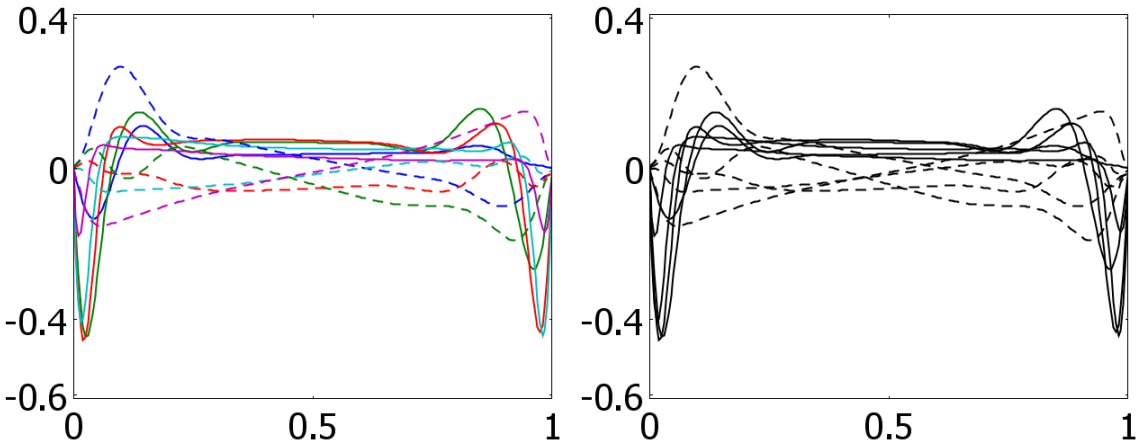
$\mathrm{Re} = 200$



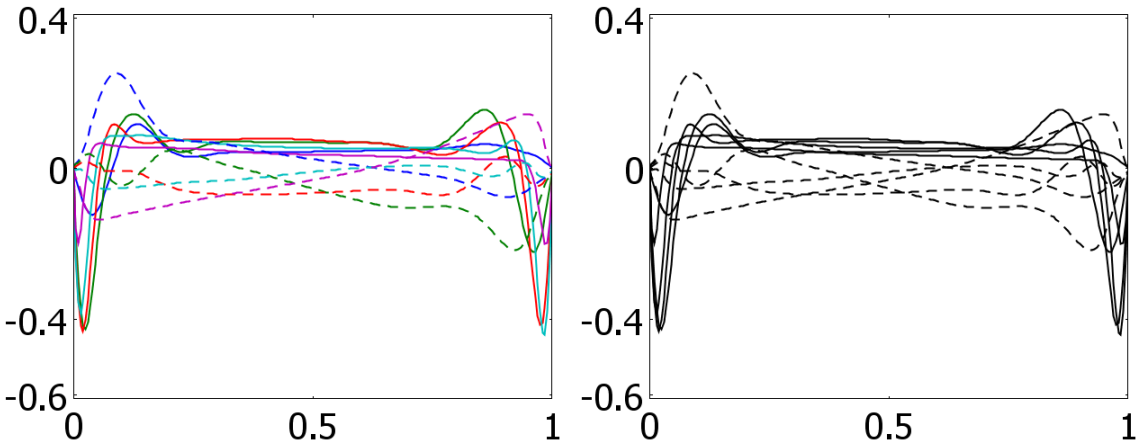
Re = 400



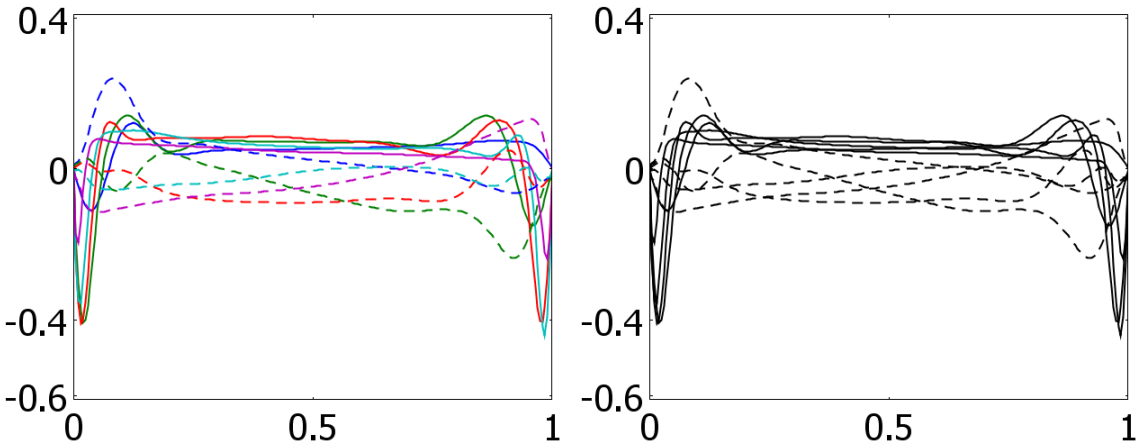
Re = 500



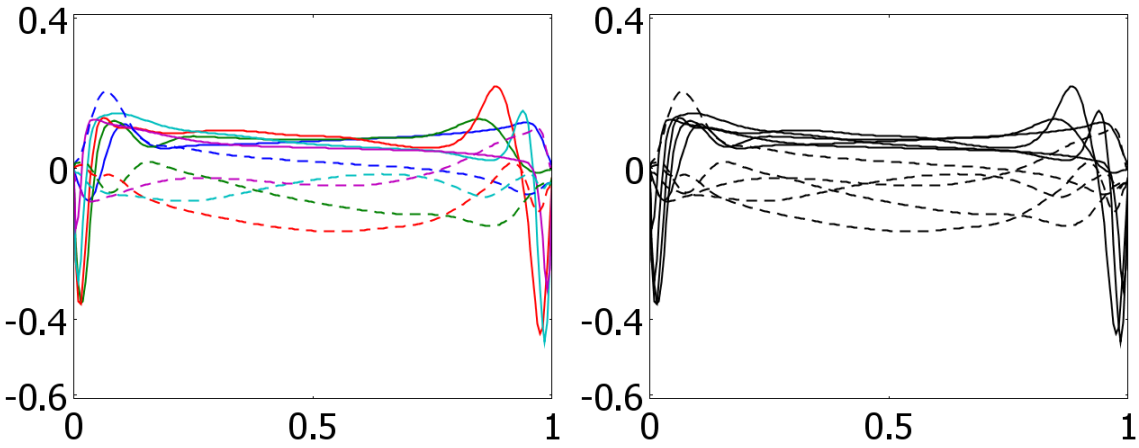
Re = 600



Re = 800



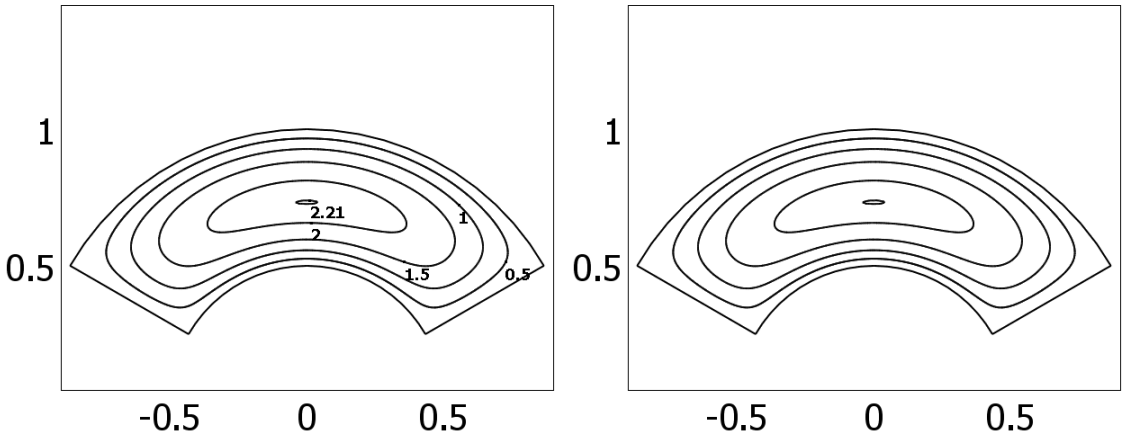
Re = 1000



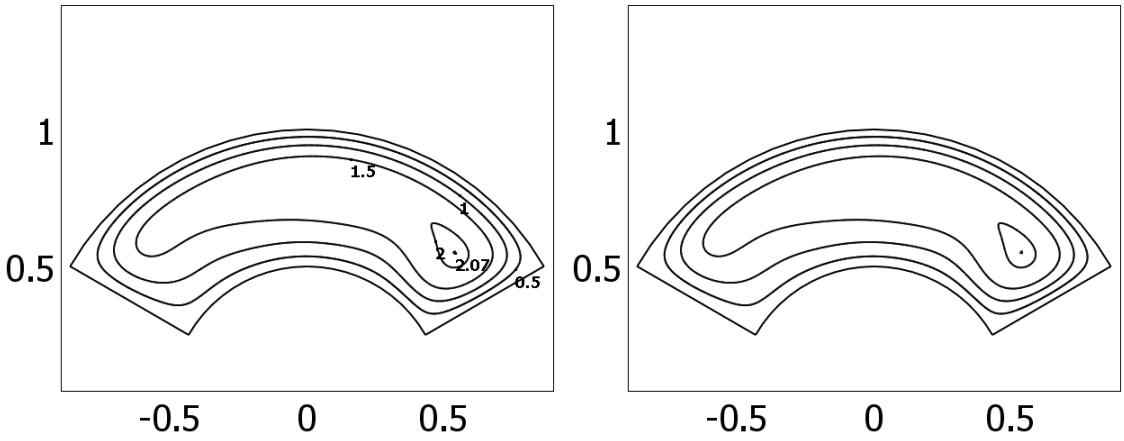
Re = 1500

S=8R=4D

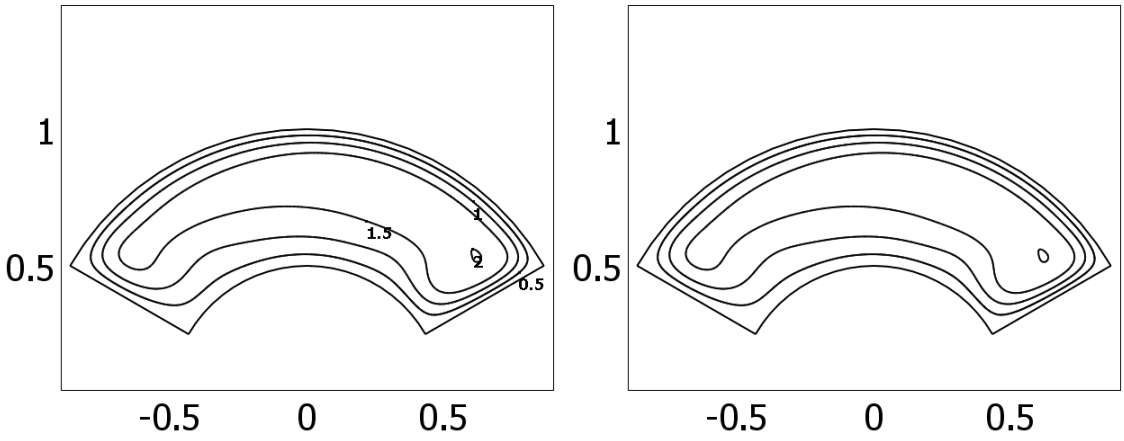
Линии уровня Ковариантная компонента u3



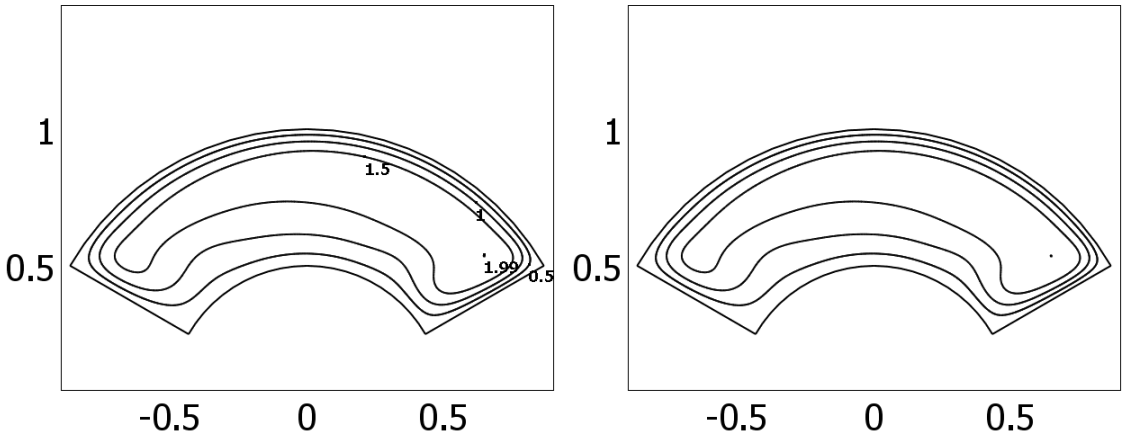
$\mathrm{Re} \to 0$



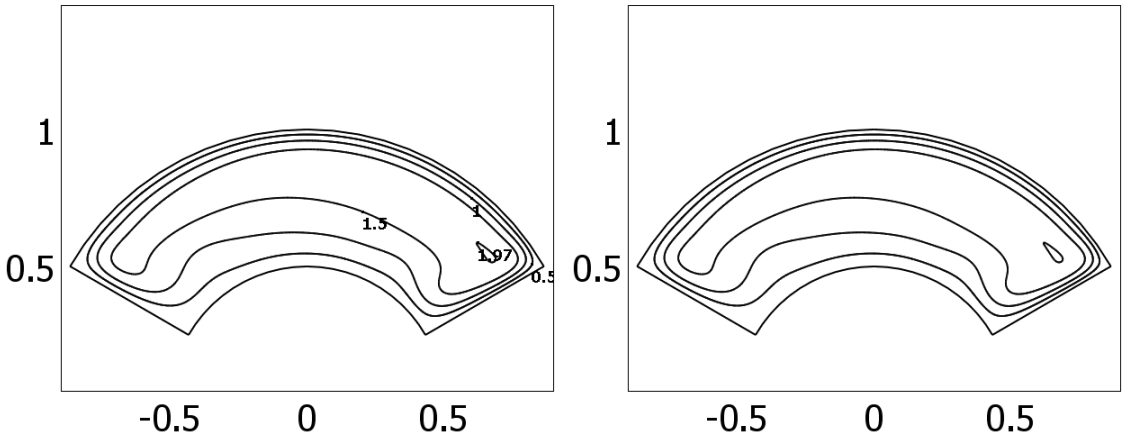
$\mathrm{Re} = 200$



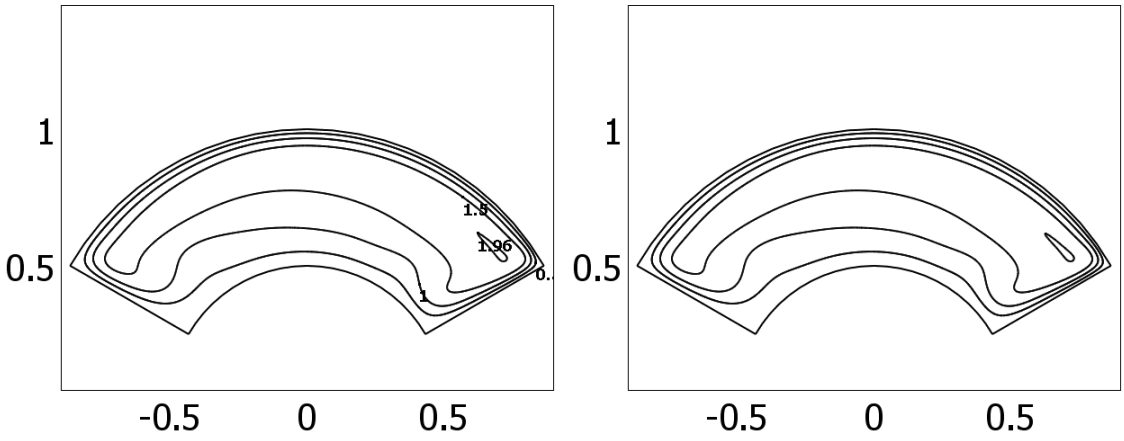
$\mathrm{Re} = 400$



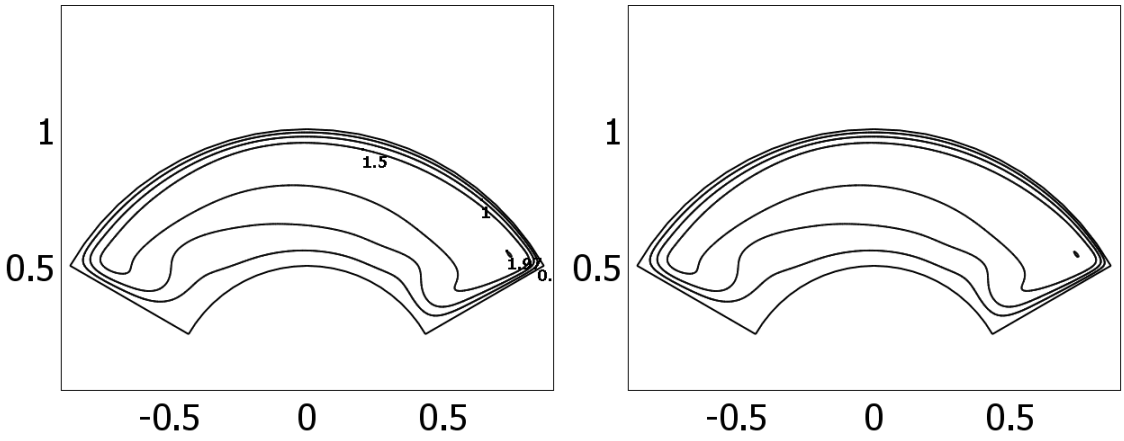
Re = 500



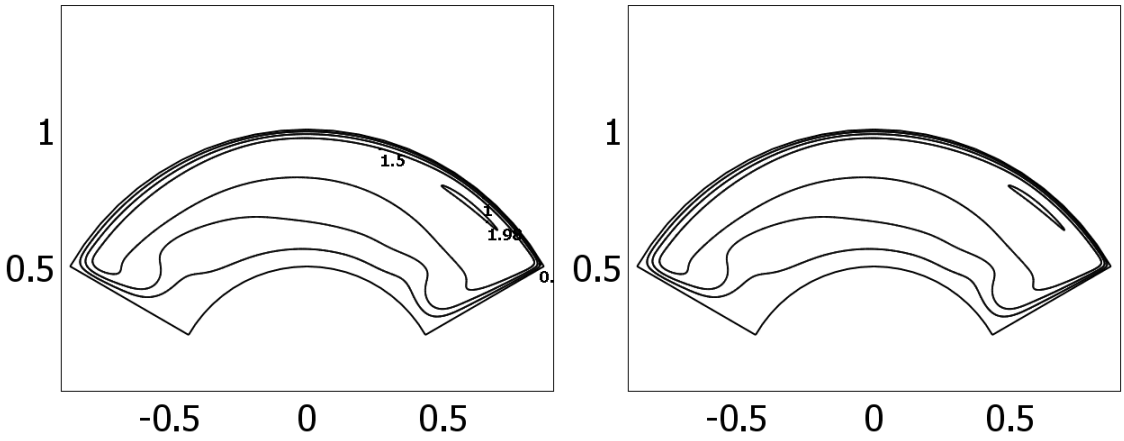
Re = 600



Re = 800

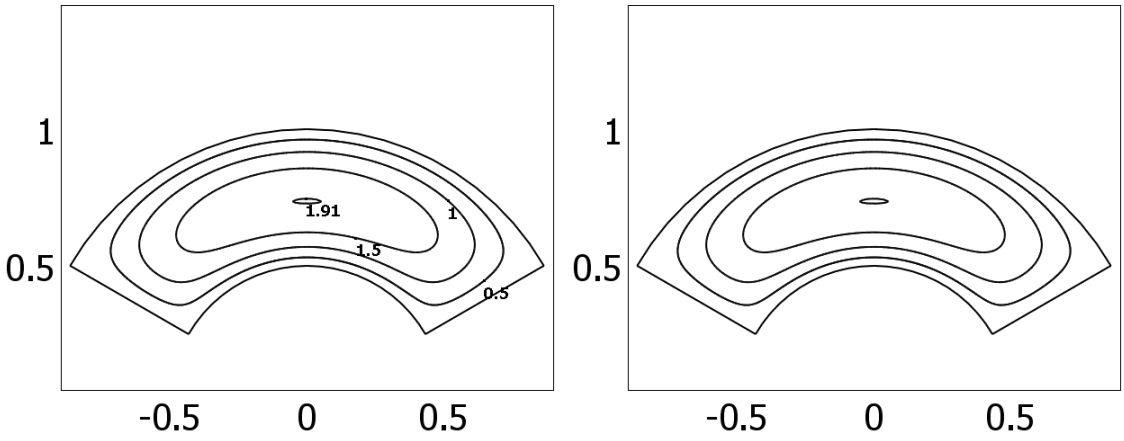


$\mathrm{Re} = 1000$

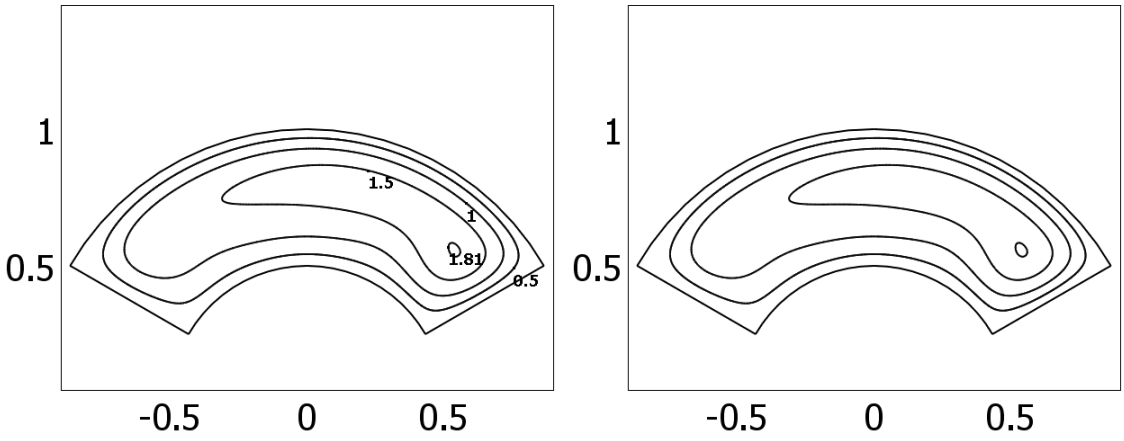


$\mathrm{Re} = 1500$

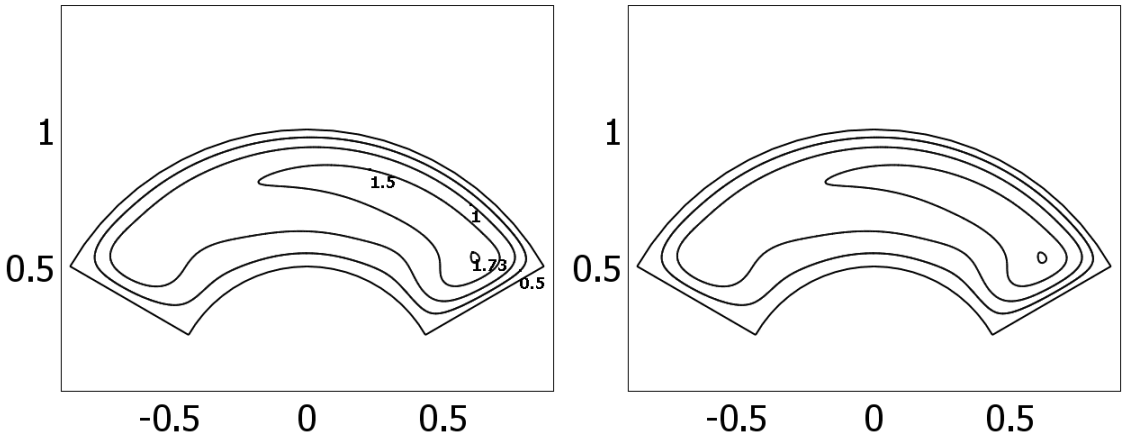
Линии уровня осевой Контравариантная компонента v3



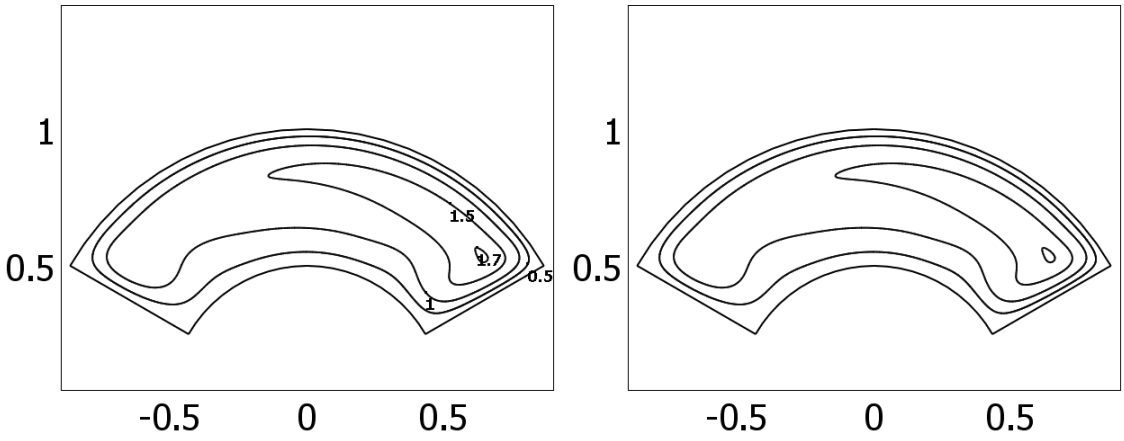
$\mathrm{Re} \to 0$



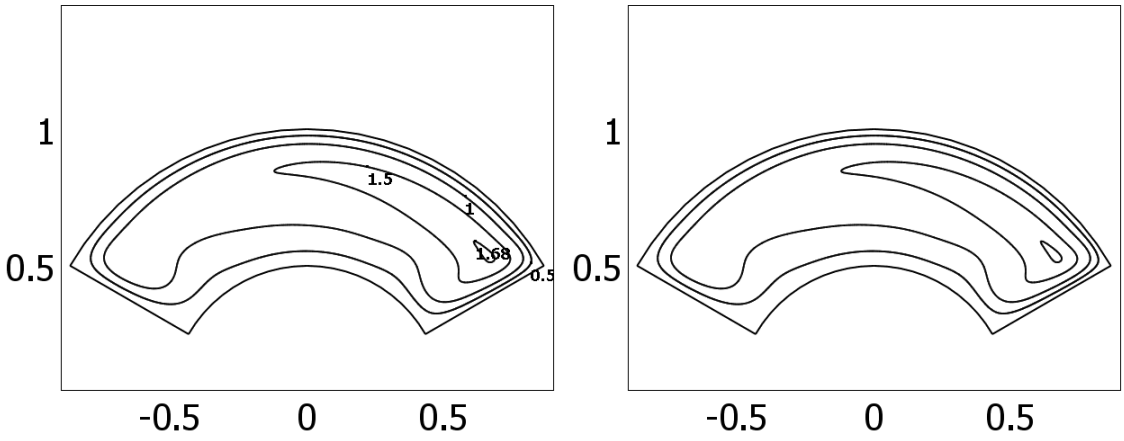
Re = 200



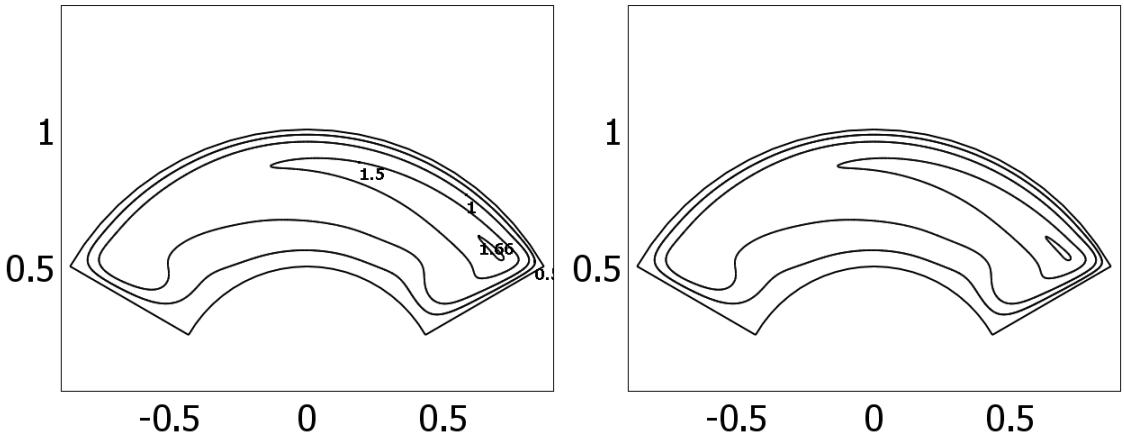
Re = 400



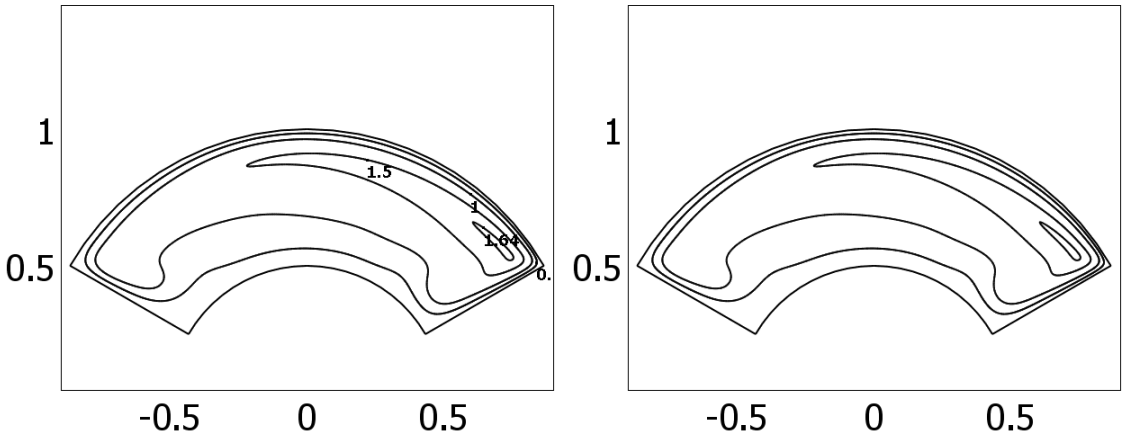
Re = 500



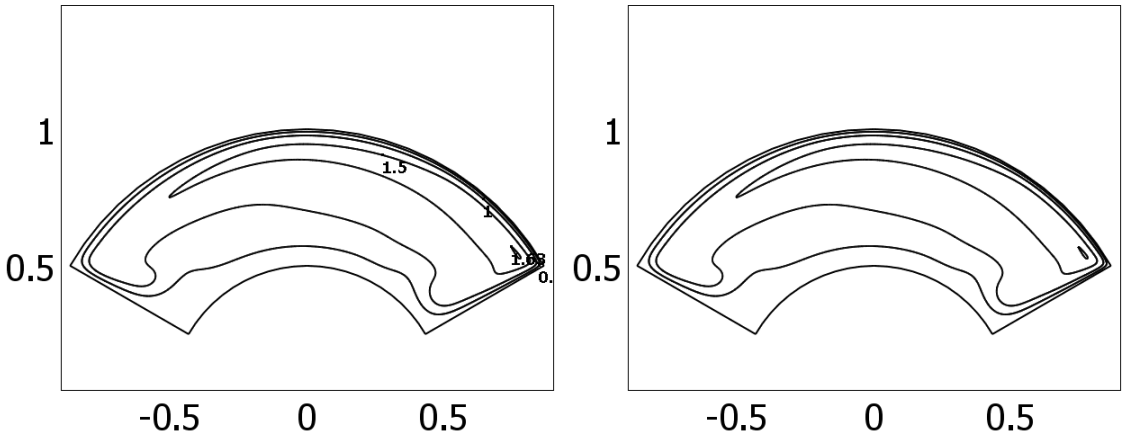
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

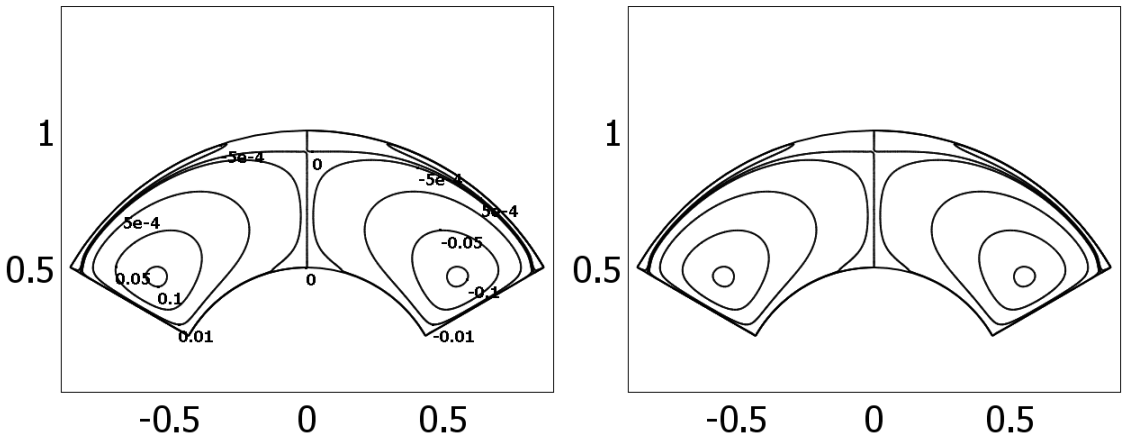


$\mathrm{Re} = 1000$

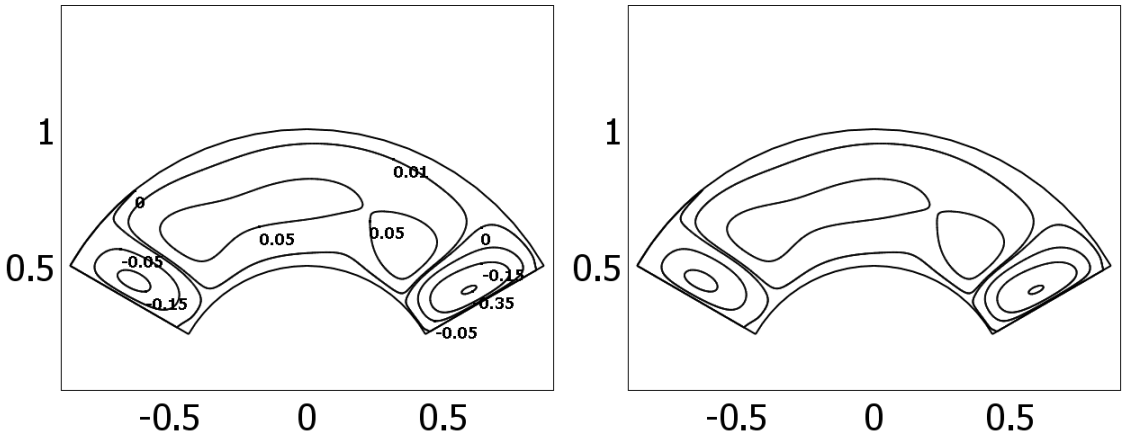


$\mathrm{Re} = 1500$

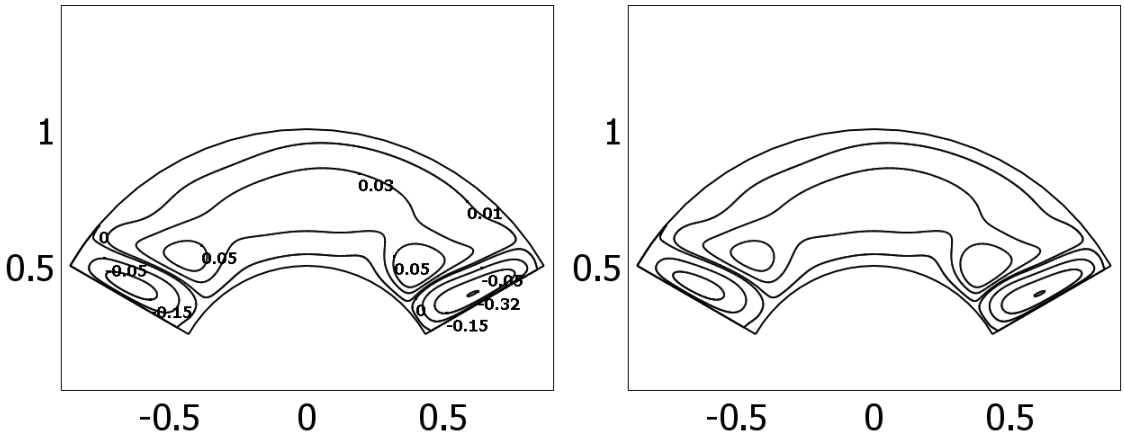
Линии уровня радиальной компонента v1=w1



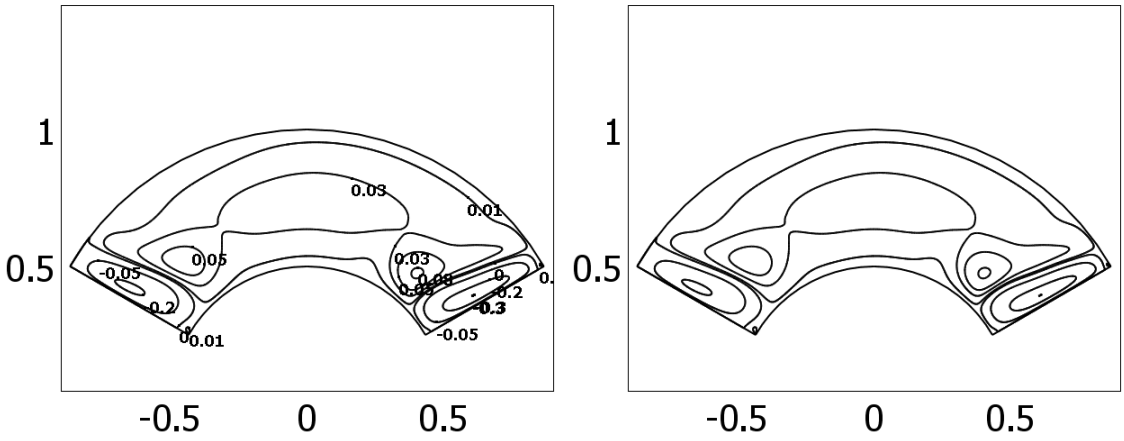
$\mathrm{Re} \to 0$



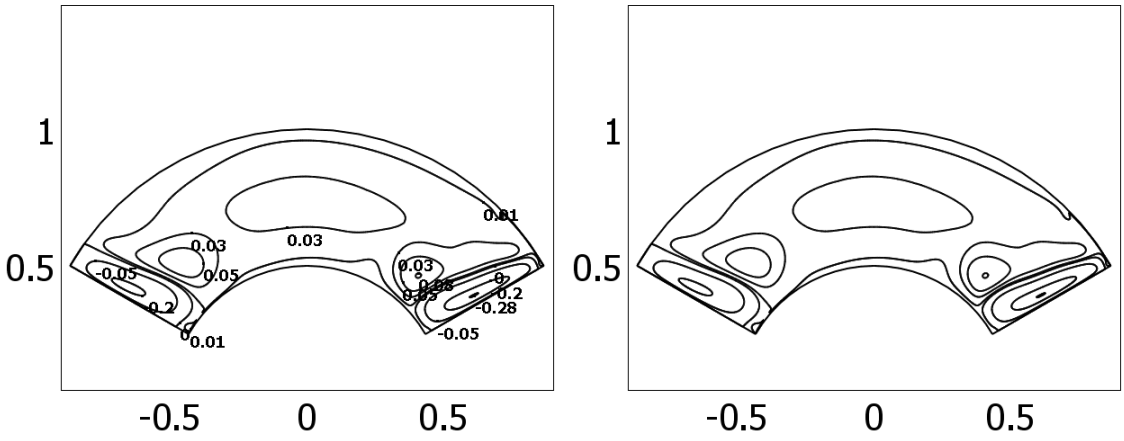
$\mathrm{Re} = 200$



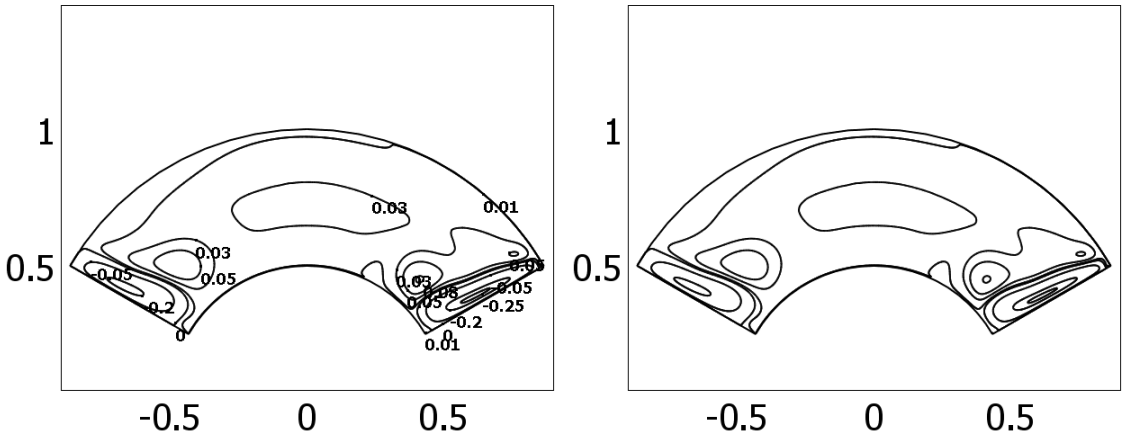
Re = 400



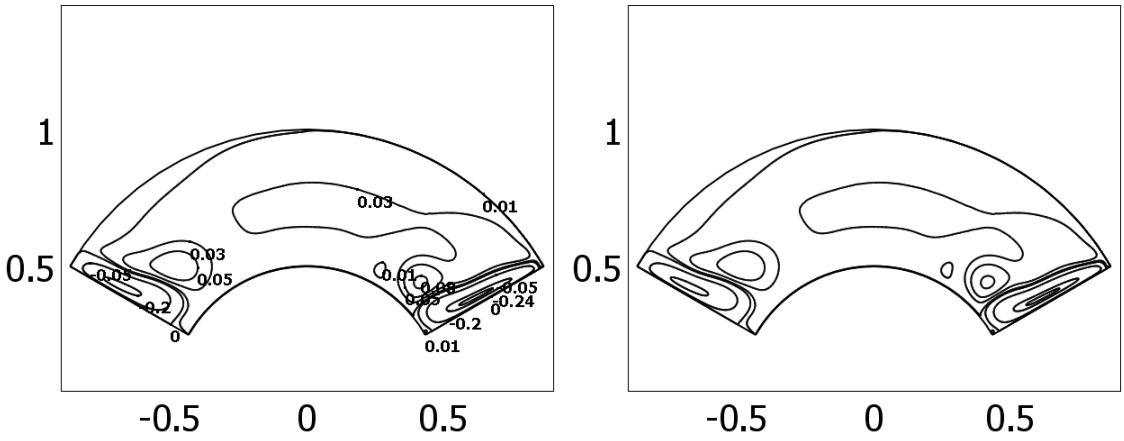
Re = 500



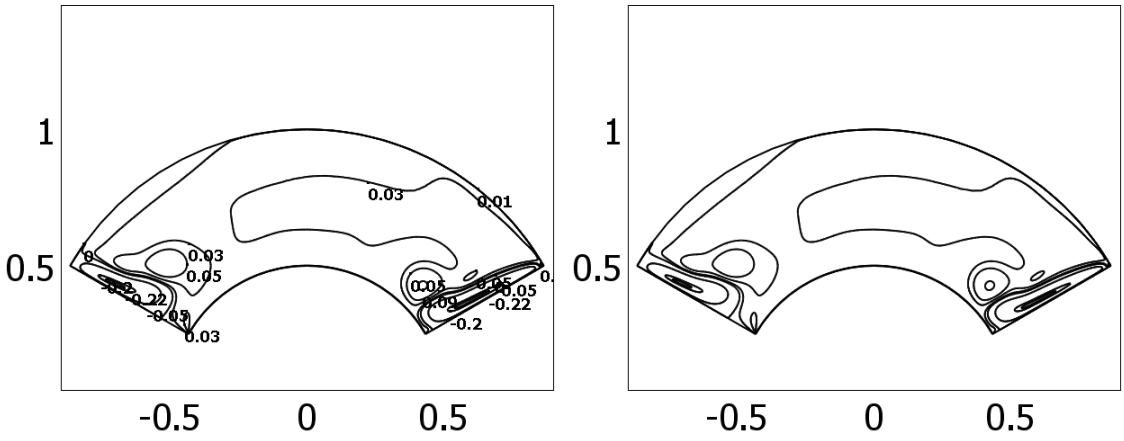
Re = 600



$\mathrm{Re} = 800$

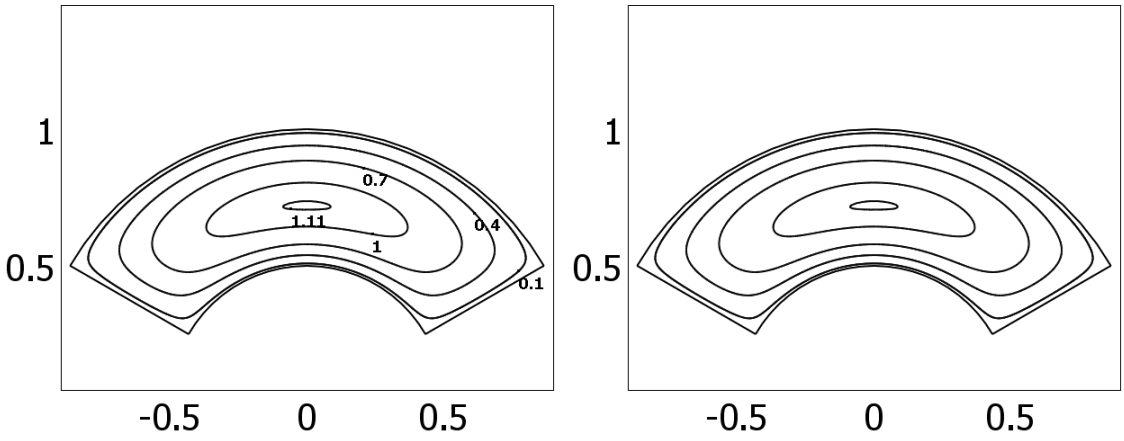


$\mathrm{Re} = 1000$

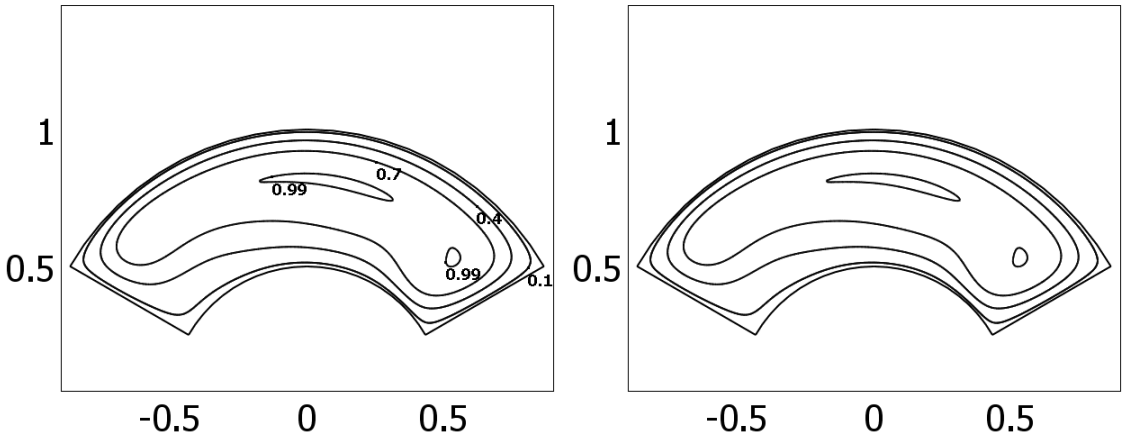


$\mathrm{Re} = 1500$

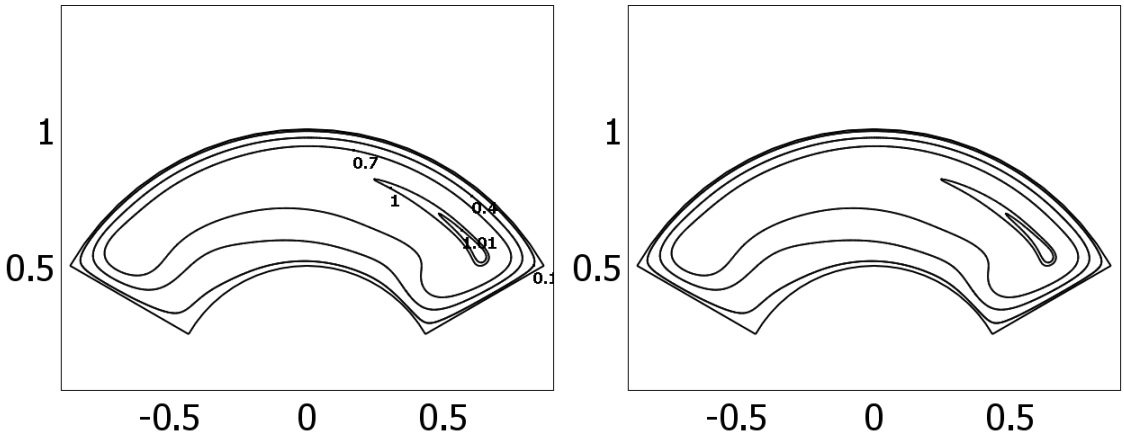
Линии уровня окружной ковариантной компоненты v2



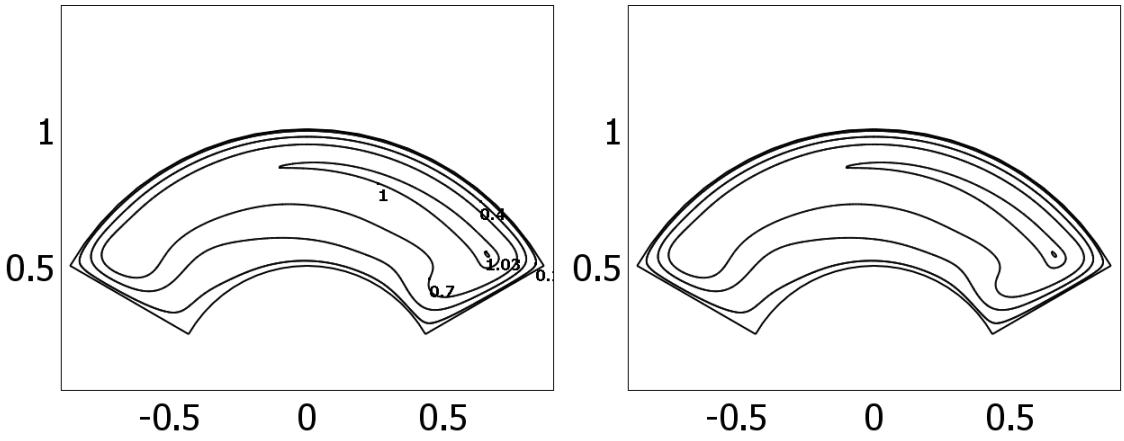
$\mathrm{Re} \to 0$



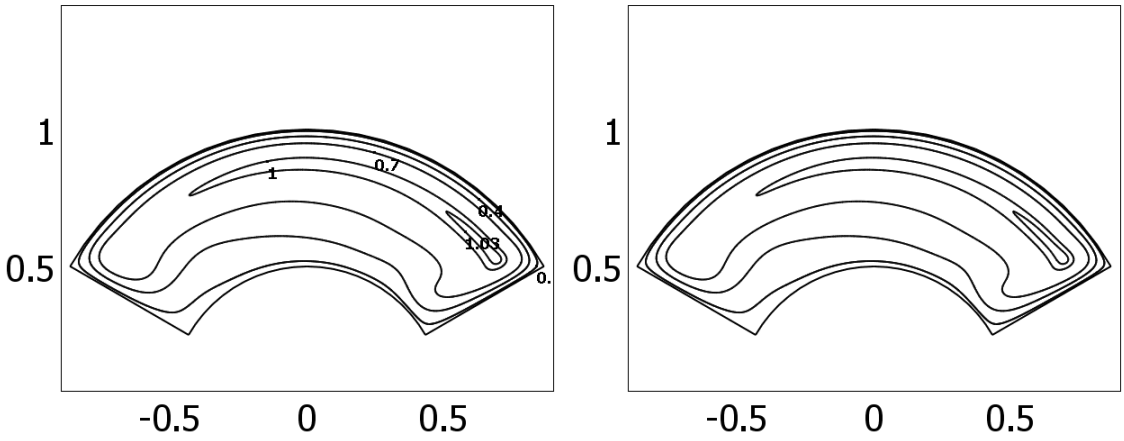
$\mathrm{Re} = 200$



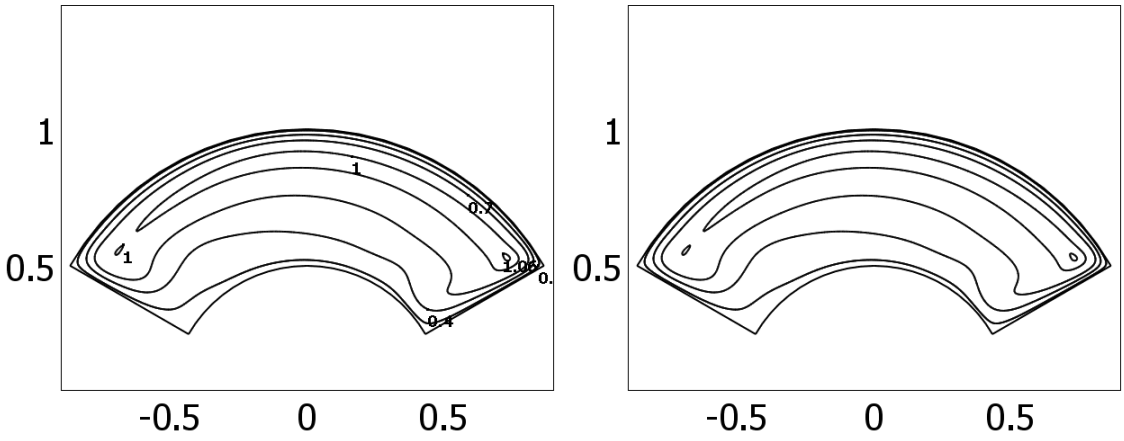
$\mathrm{Re} = 400$



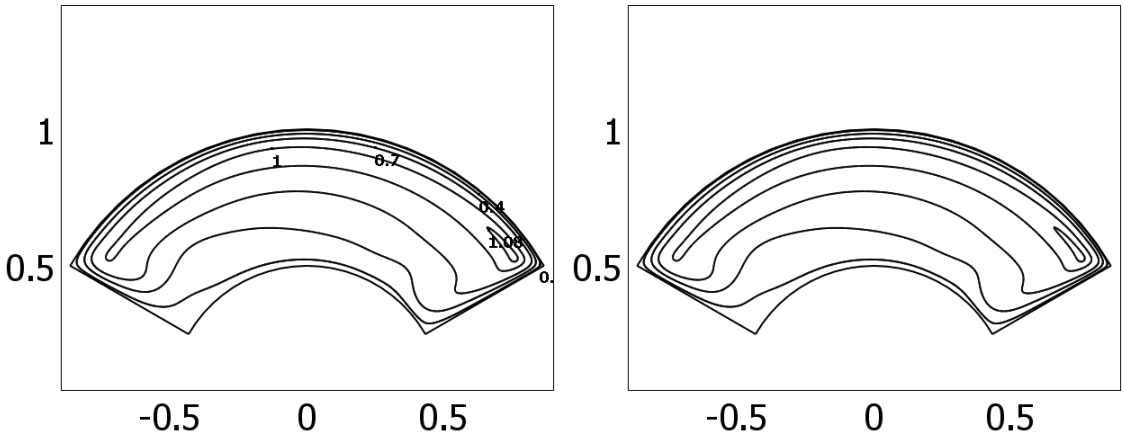
Re = 500



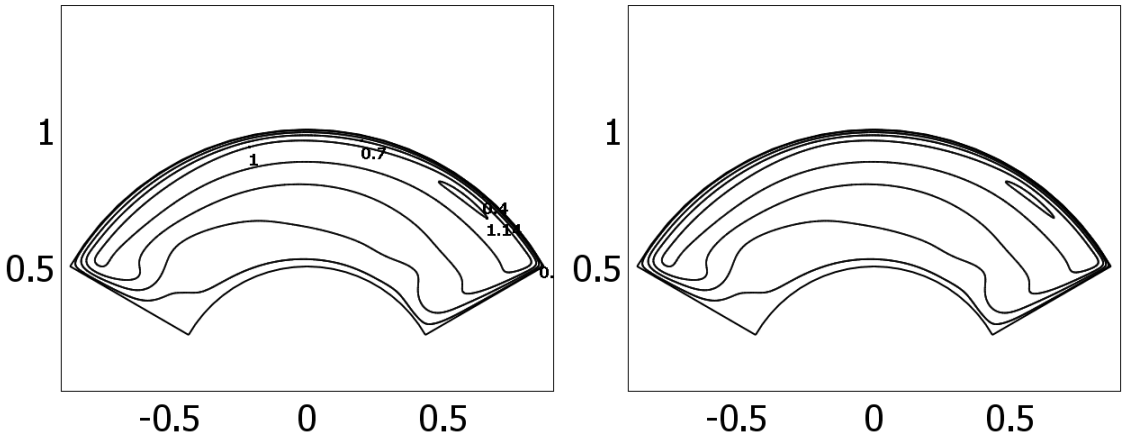
Re = 600



Re = 800



$\mathrm{Re} = 1000$



$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня окружной контравариантной компоненты w2

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

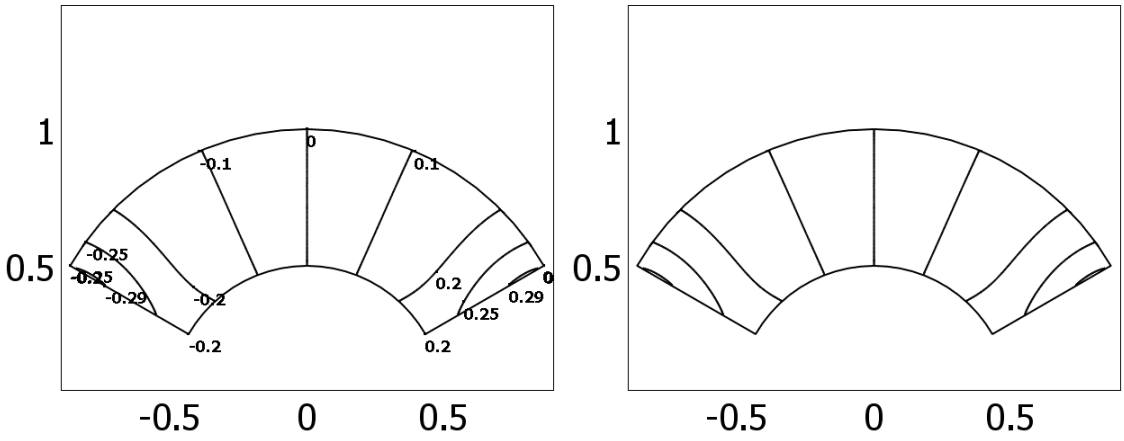
$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

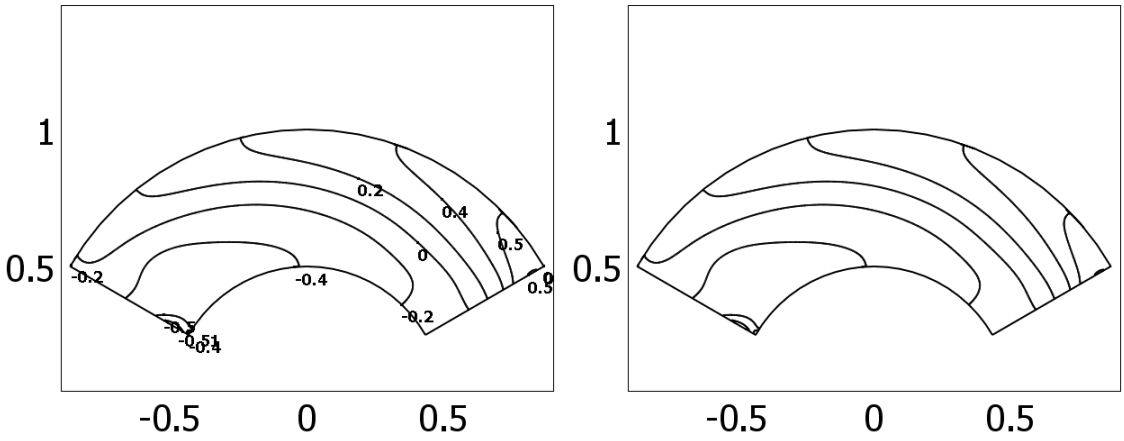
$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

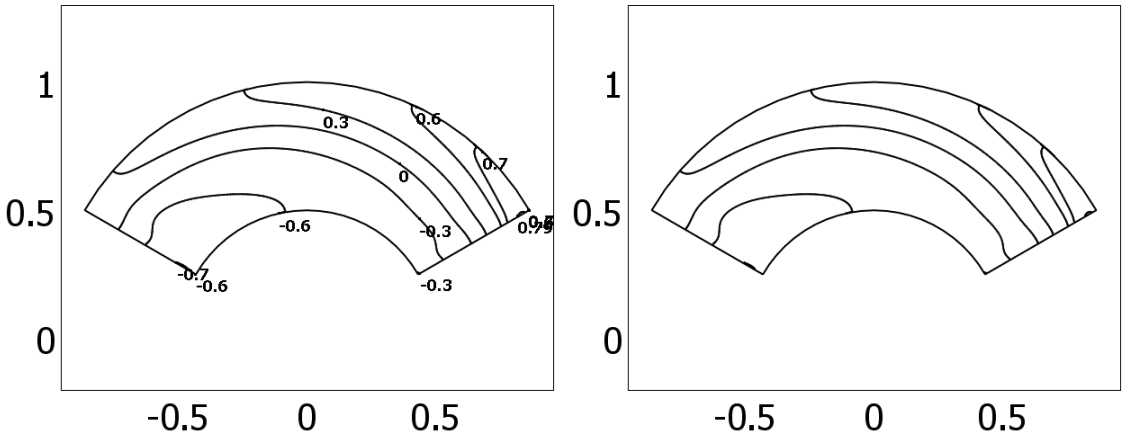
Линии уровня давления



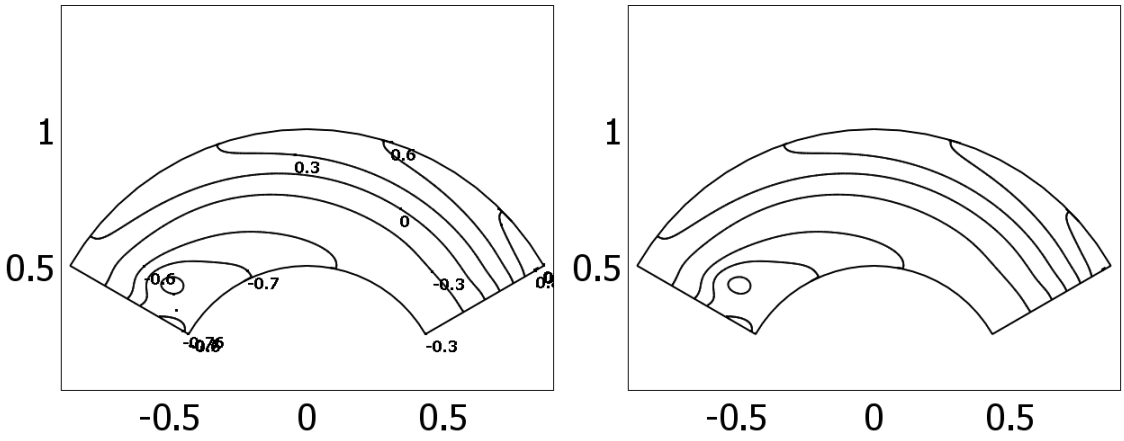
$\mathrm{Re} \to 0$



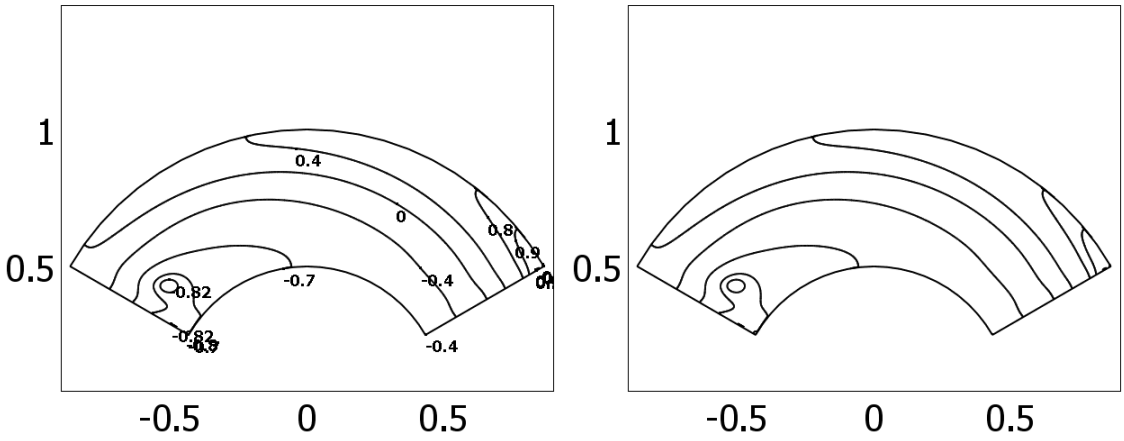
$\mathrm{Re} = 200$



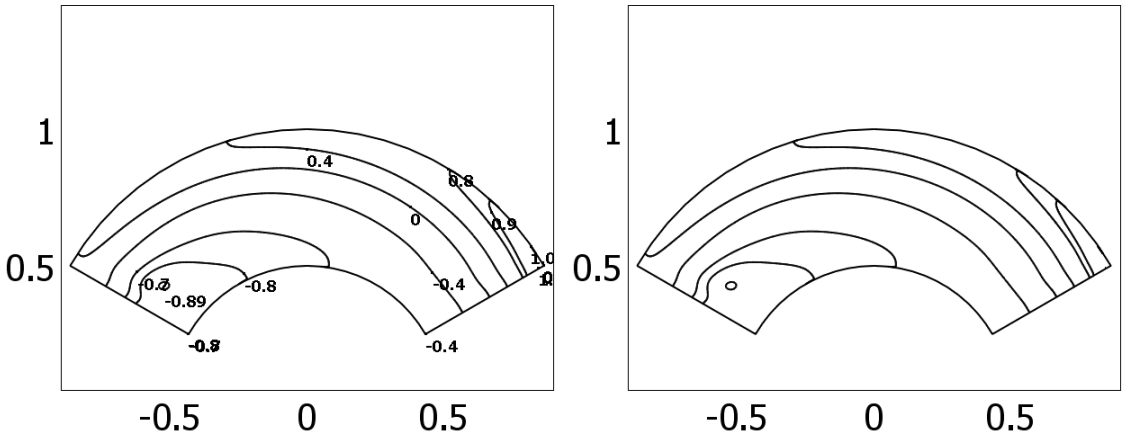
$\mathrm{Re} = 400$



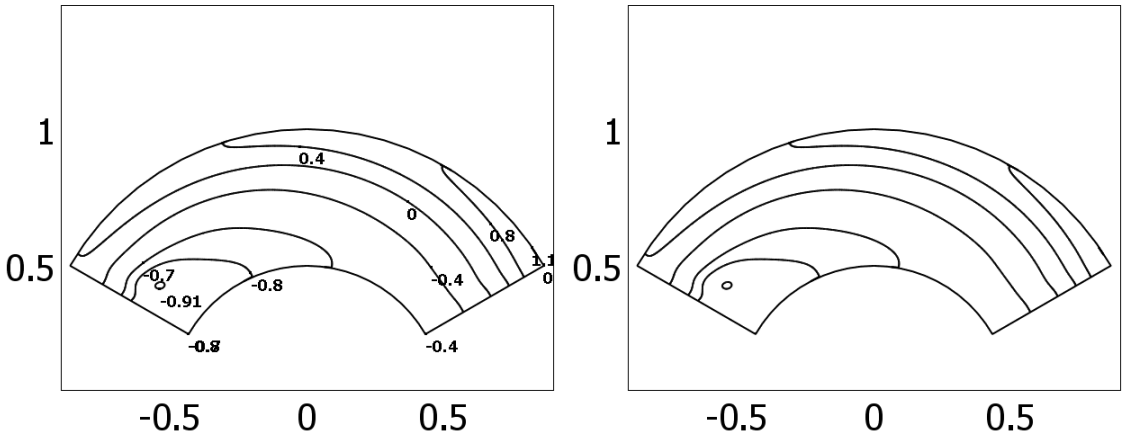
Re = 500



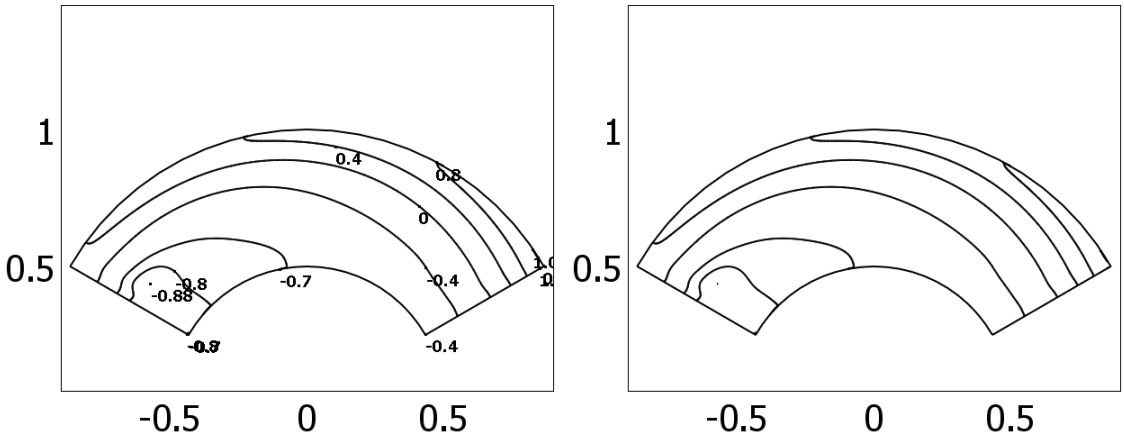
Re = 600



Re = 800

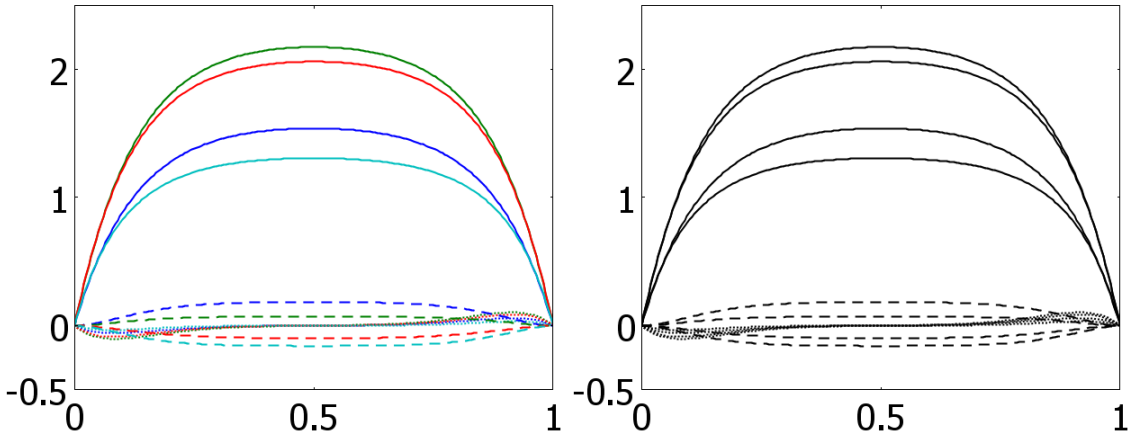


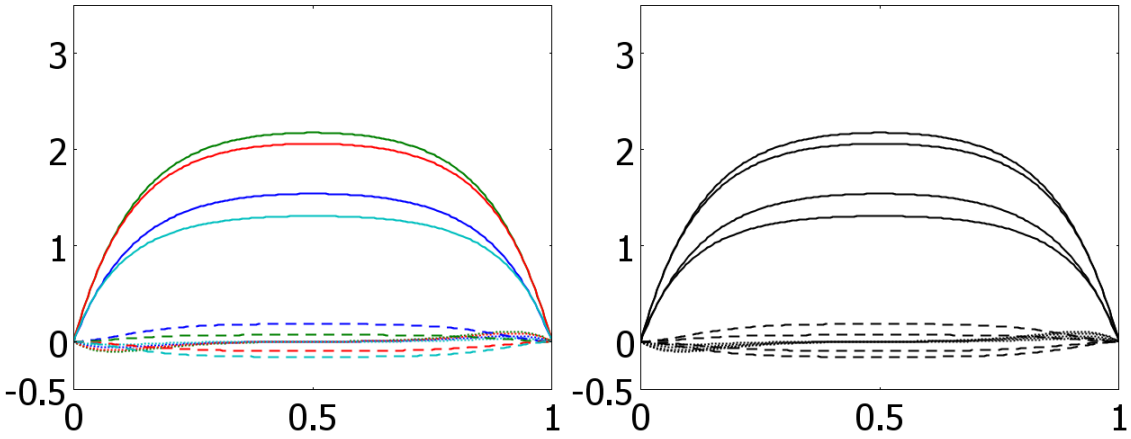
Re = 1000



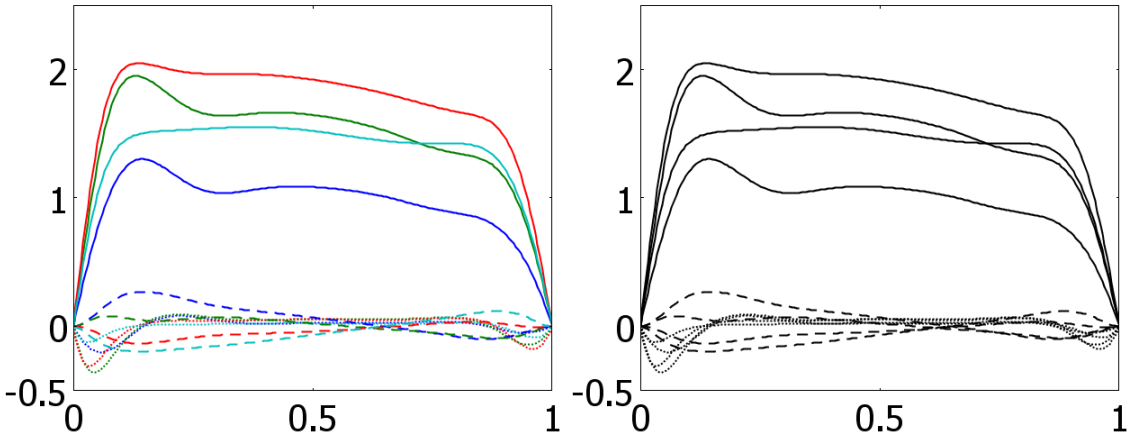
Re = 1500

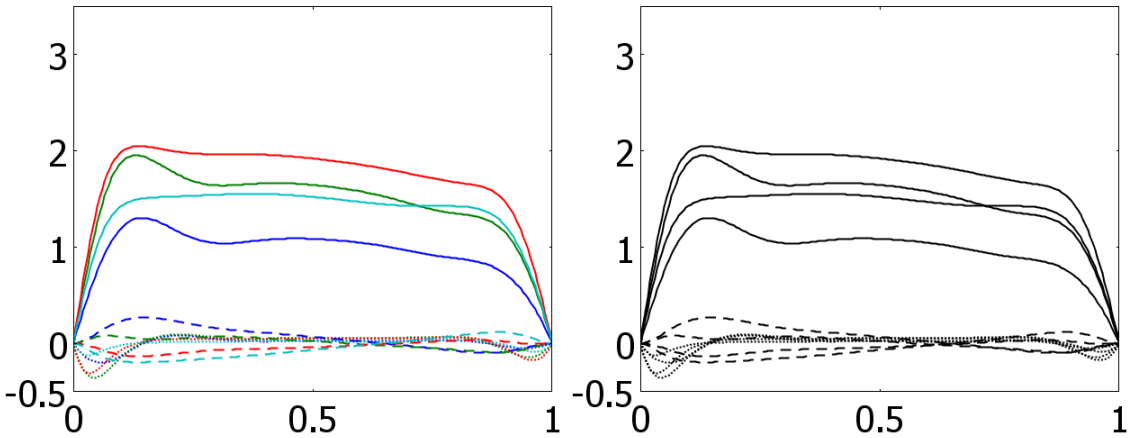
Окружные разрезы и компоненты скорости u3, w1,w2



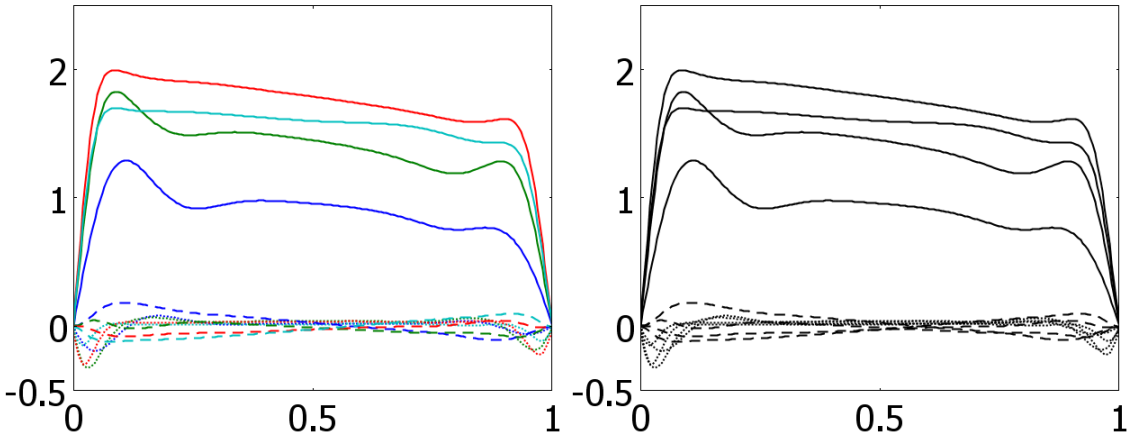


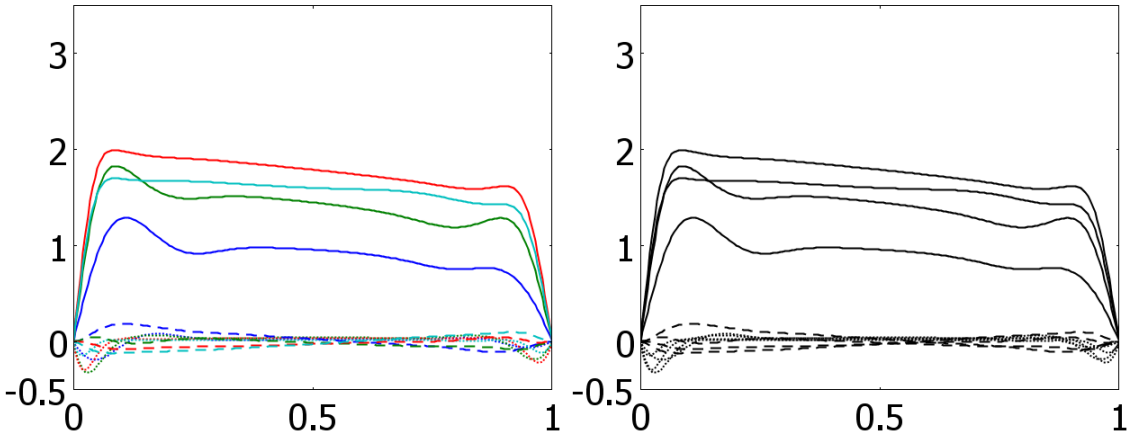
$\mathrm{Re} \to 0$



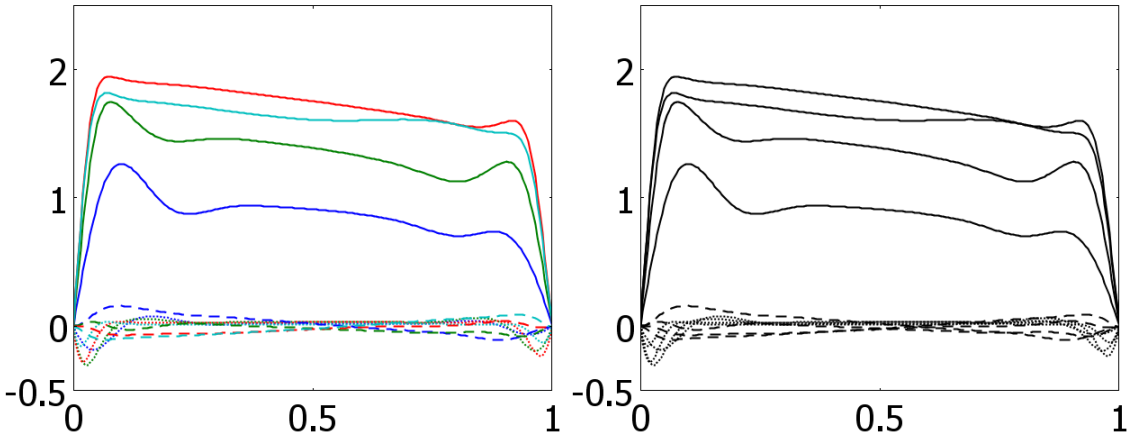


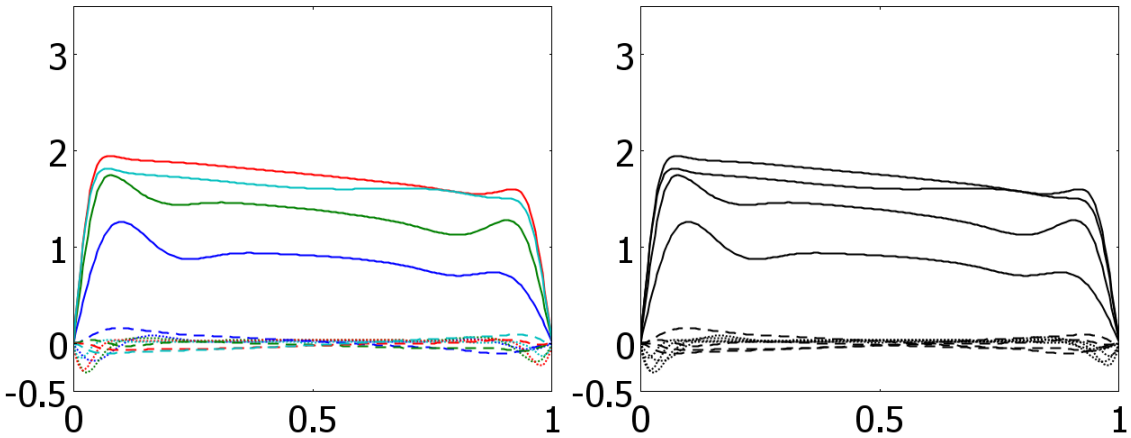
$\mathrm{Re} = 200$



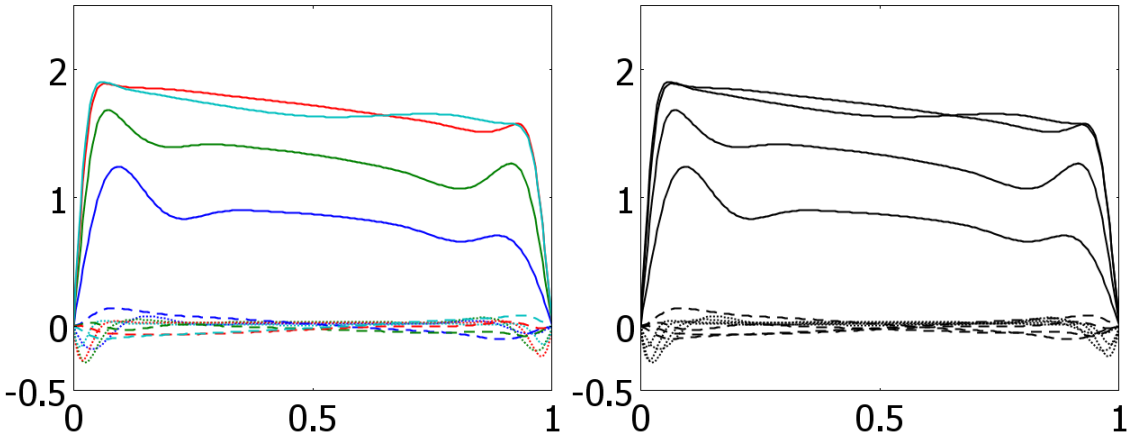


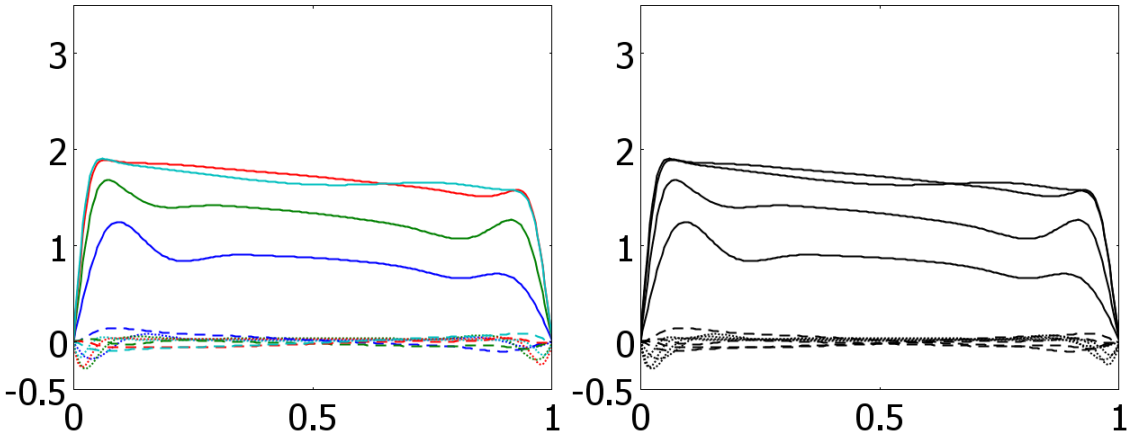
Re = 400



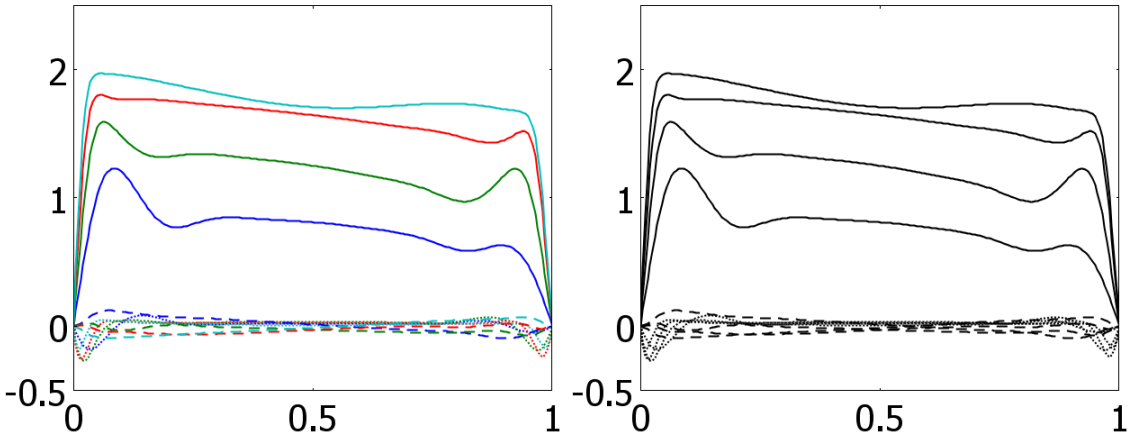


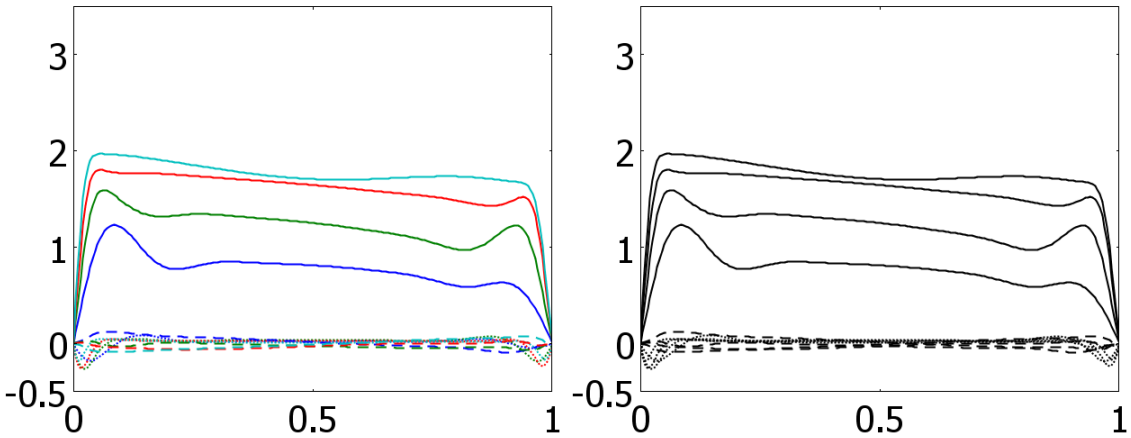
Re = 500



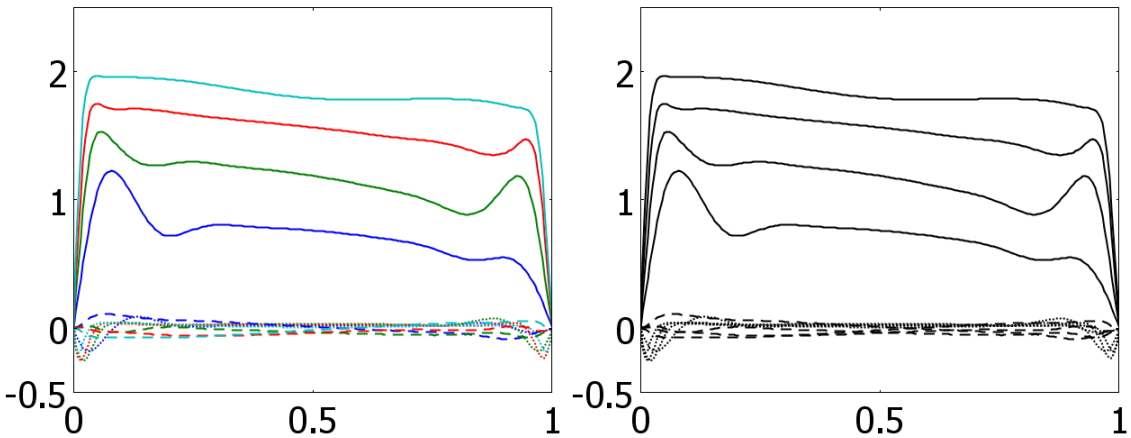


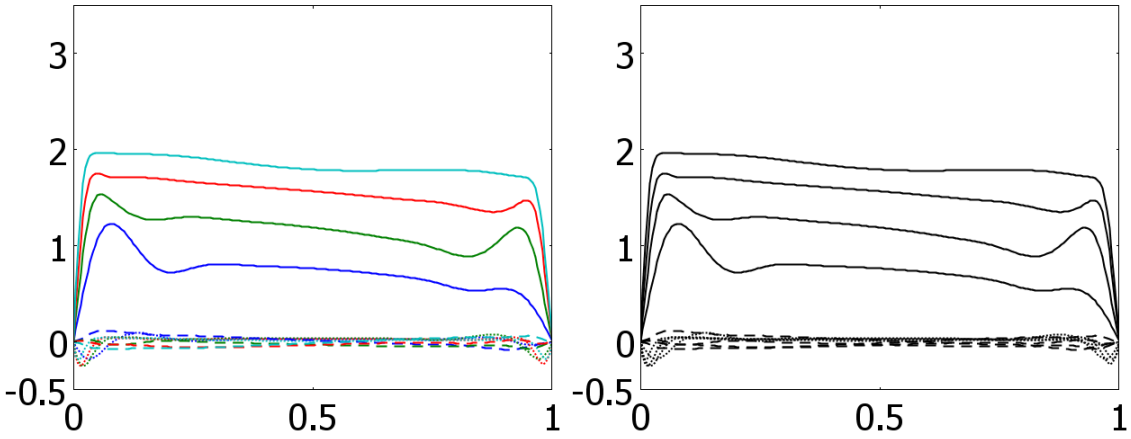
Re = 600



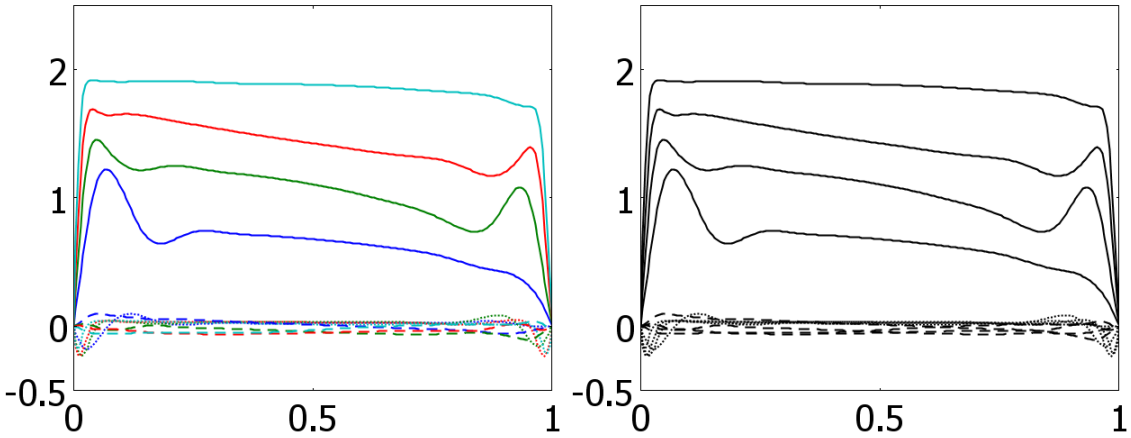


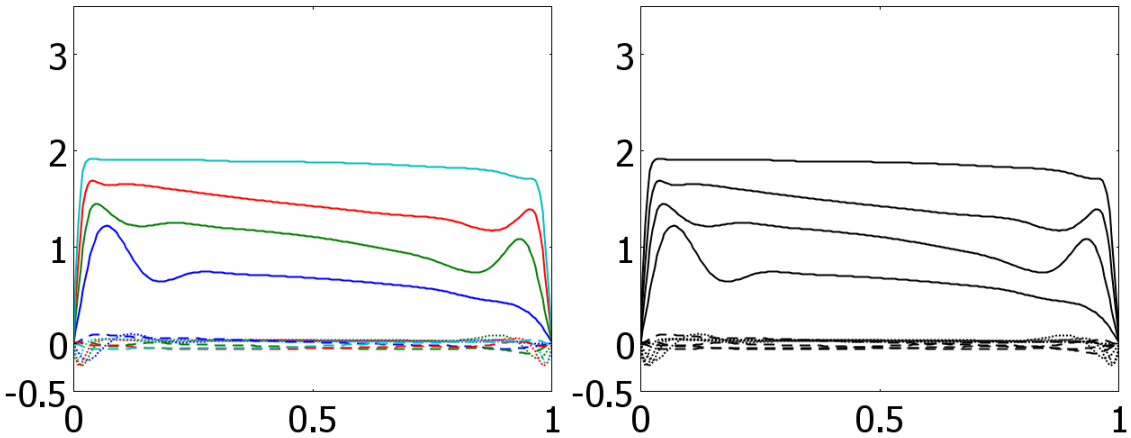
Re = 800





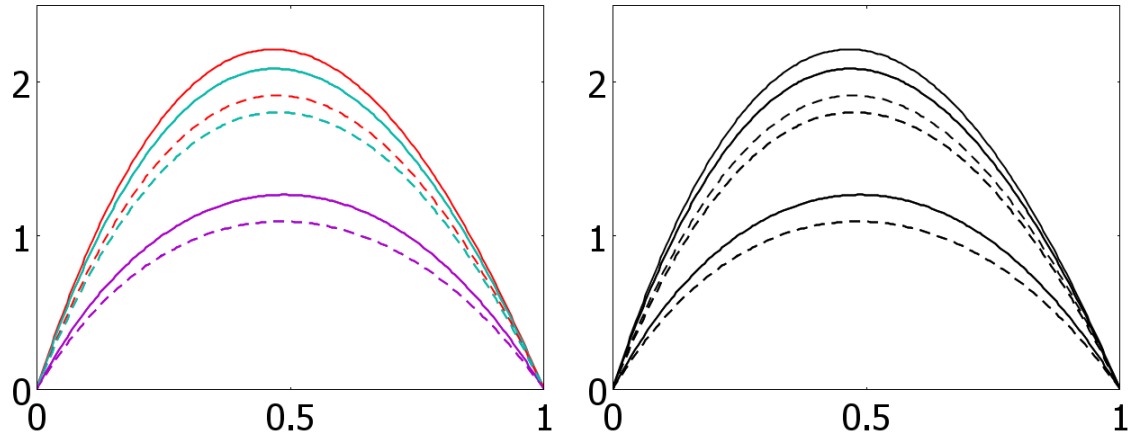
Re = 1000



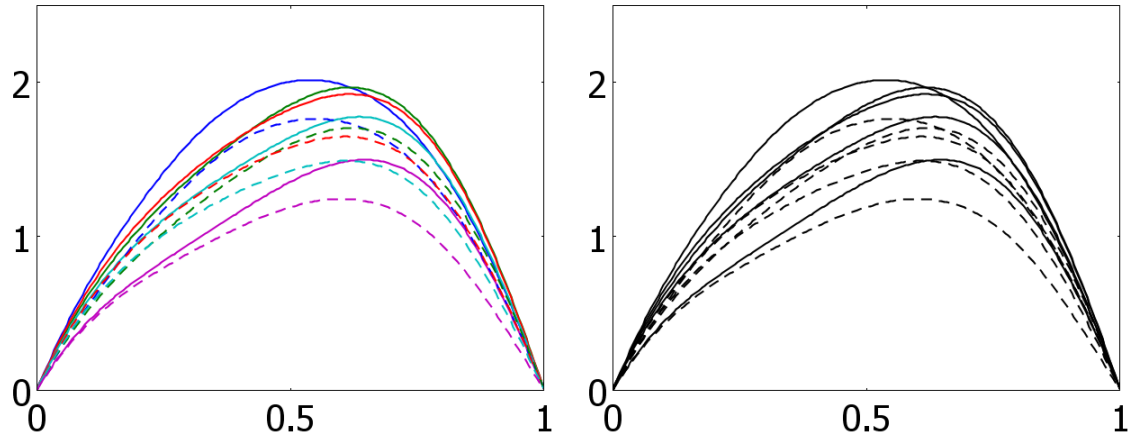


Re = 1500

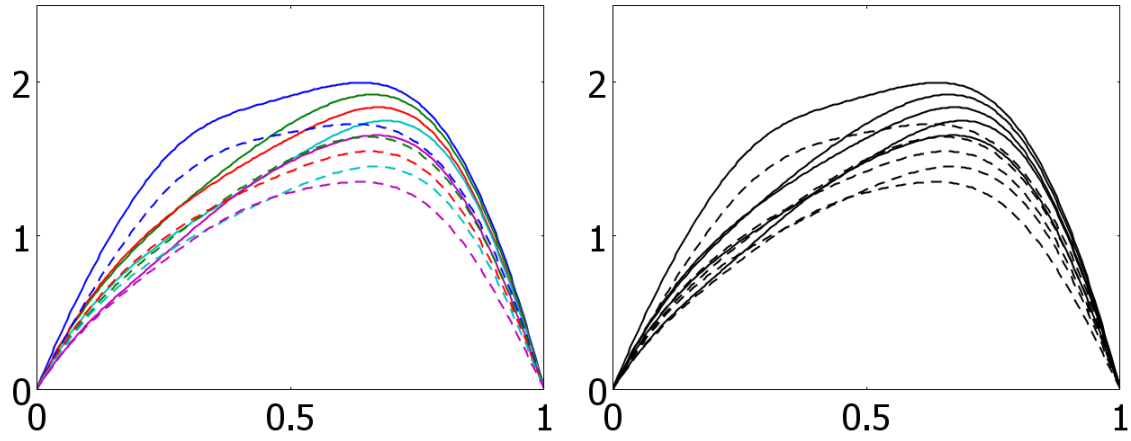
Профили радиальный разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



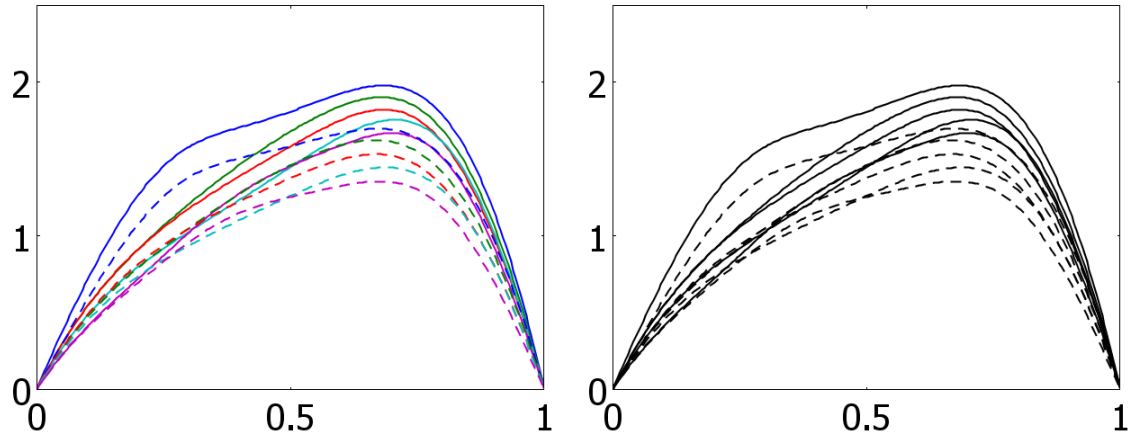
$\mathrm{Re} \to 0$



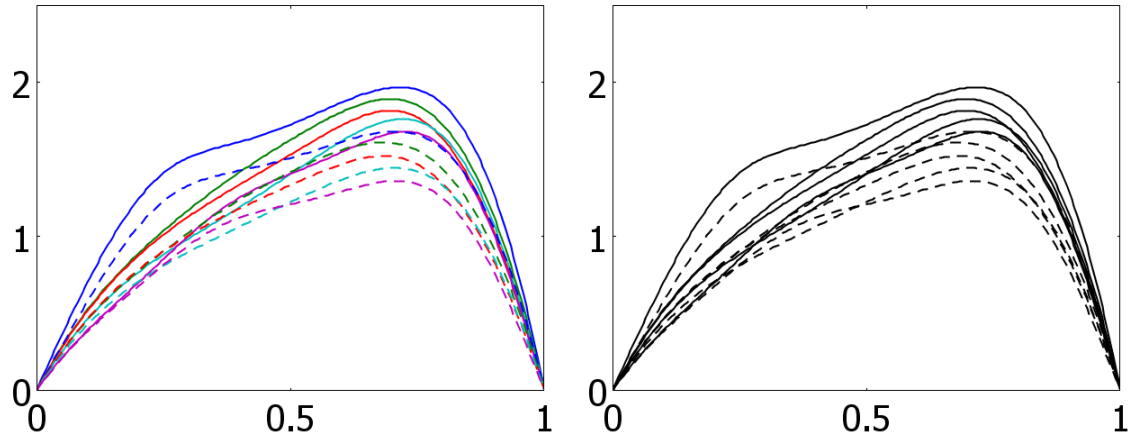
$\mathrm{Re} = 200$



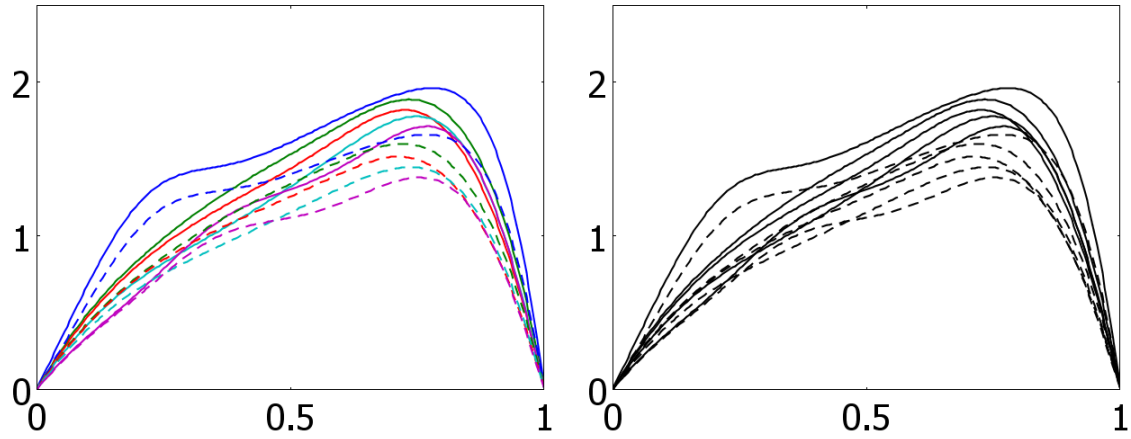
$\mathrm{Re} = 400$



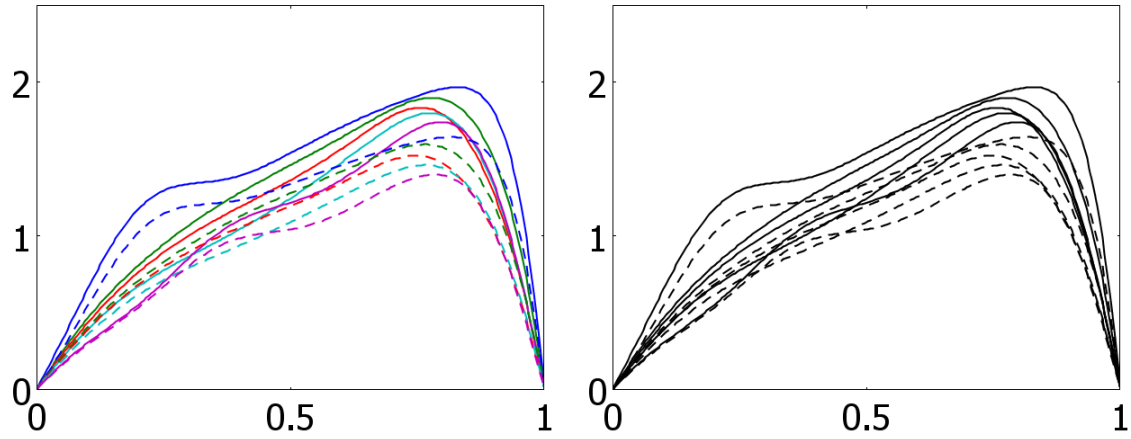
Re = 500



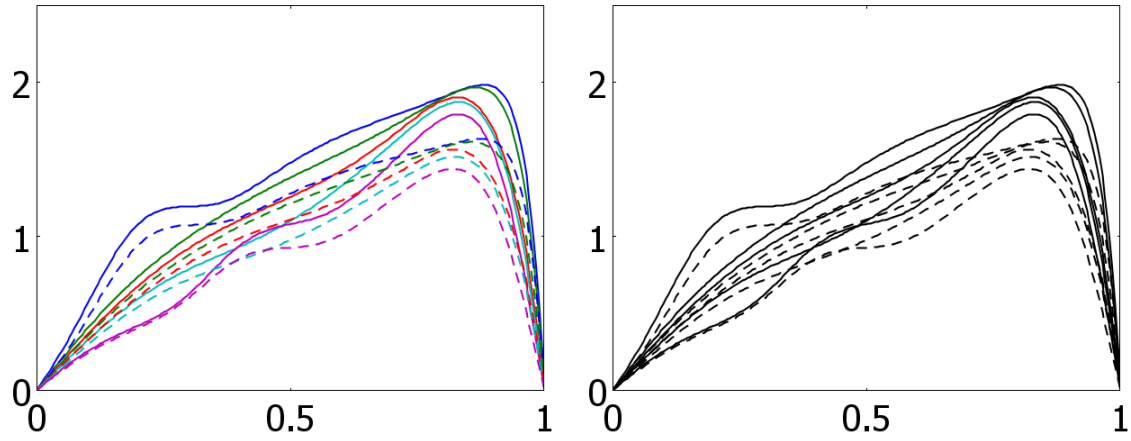
Re = 600



Re = 800

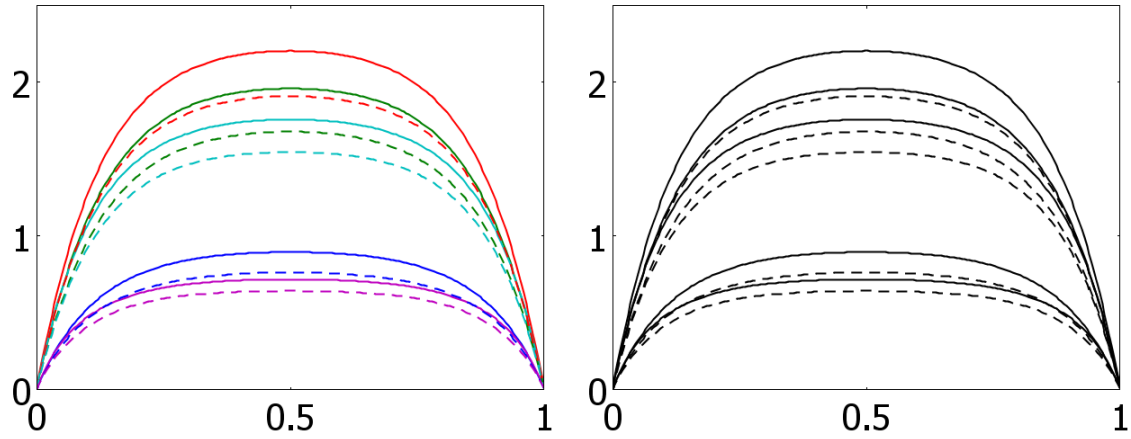


$\mathrm{Re} = 1000$

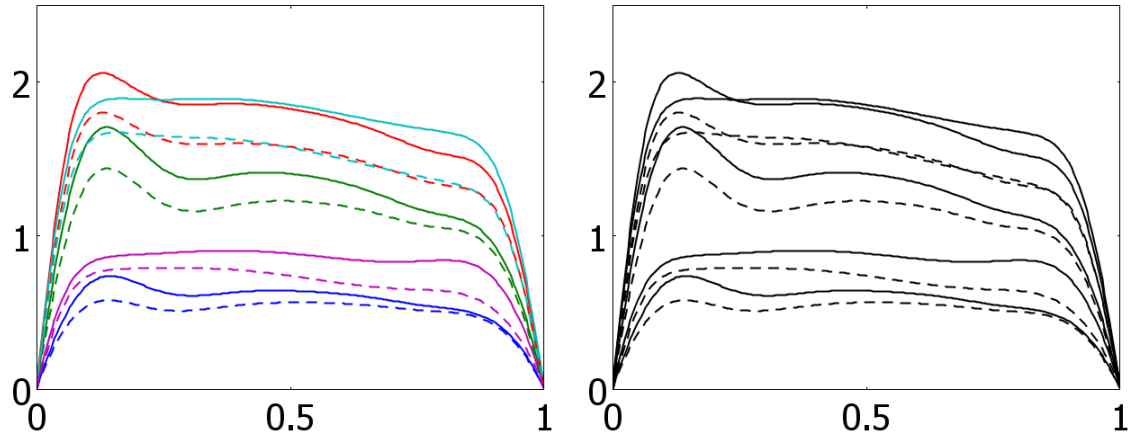


$\mathrm{Re} = 1500$

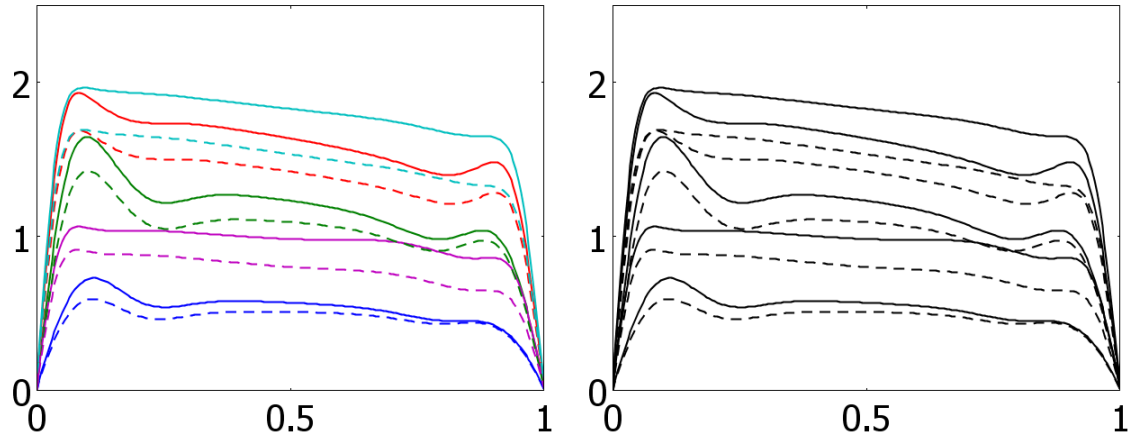
Профили окружной разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



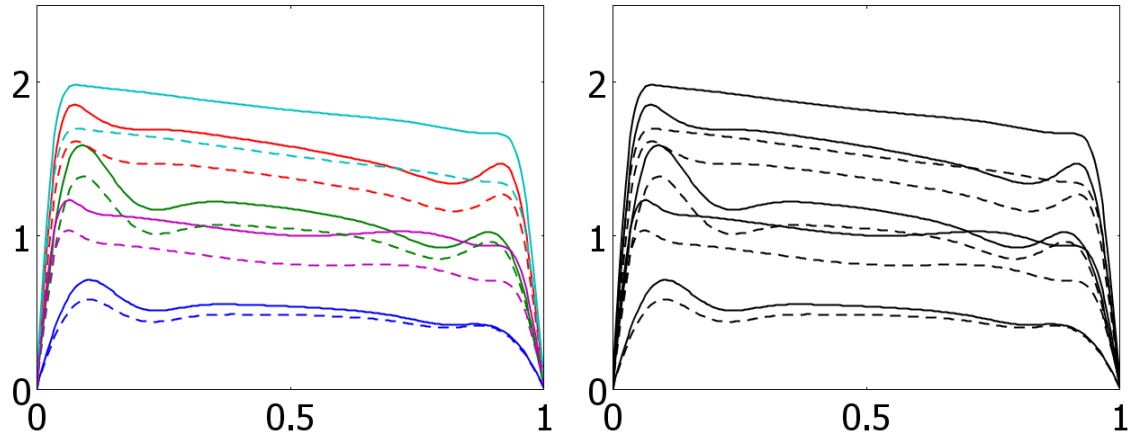
$\mathrm{Re} \to 0$



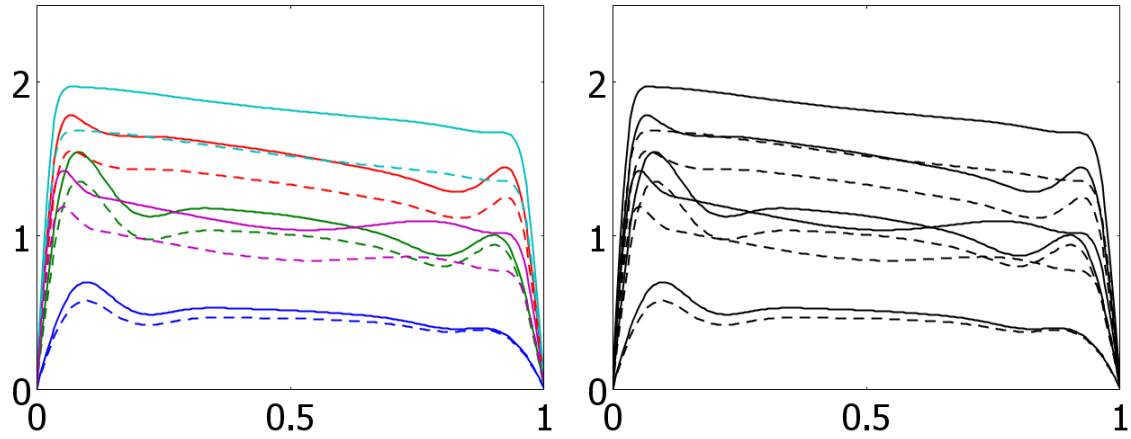
Re = 200



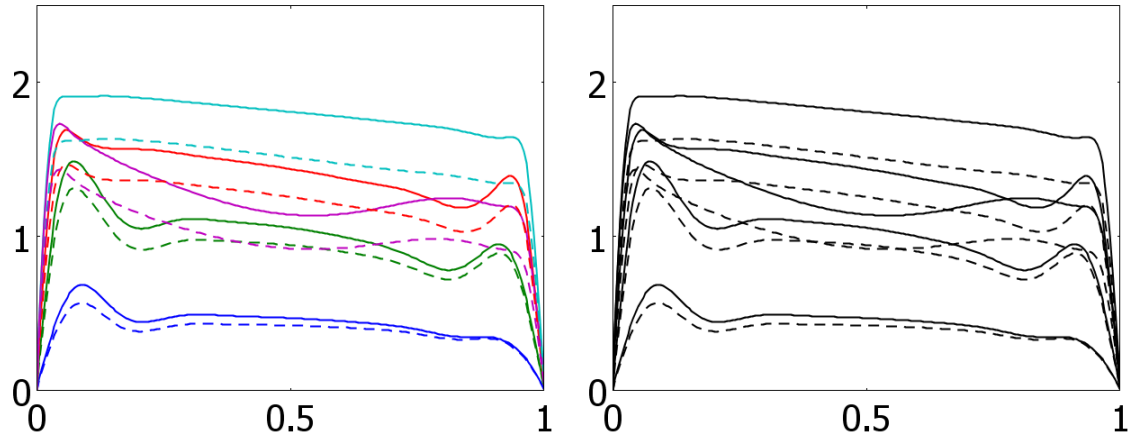
Re = 400



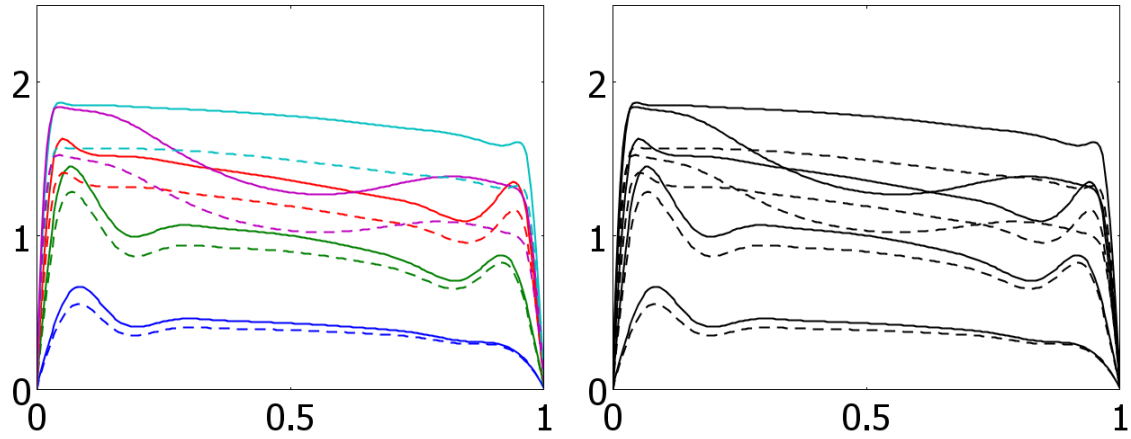
Re = 500



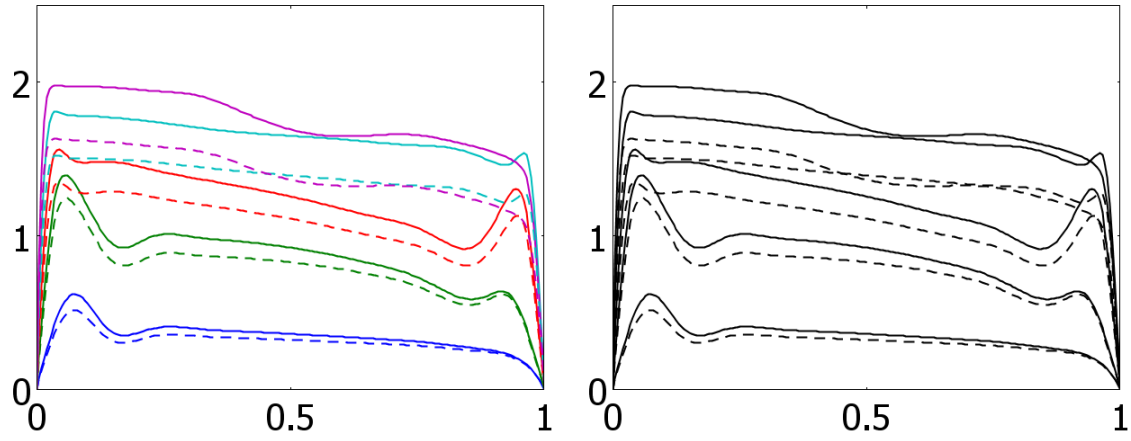
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

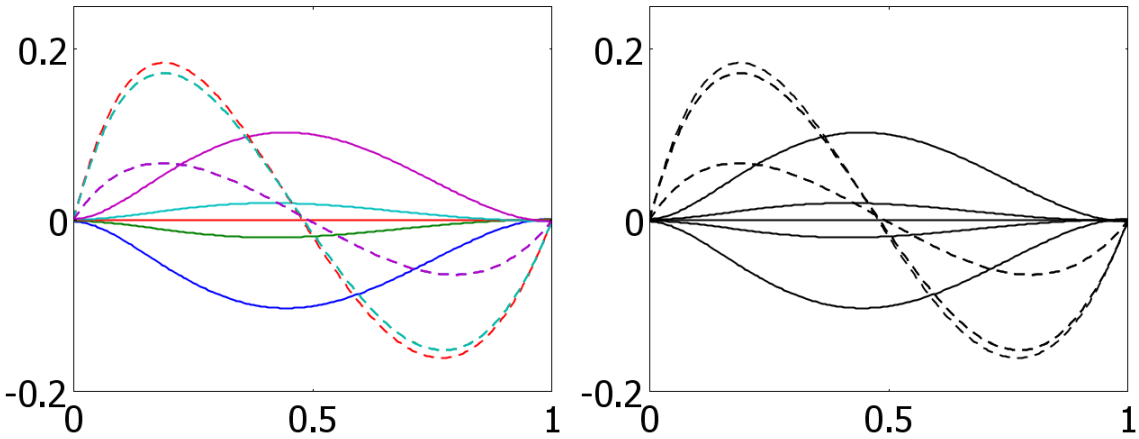


$\mathrm{Re} = 1000$

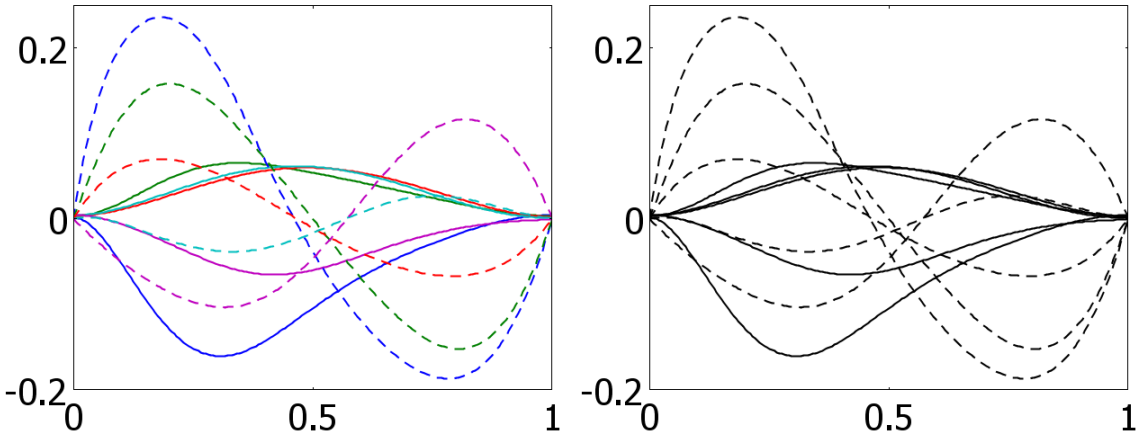


$\mathrm{Re} = 1500$

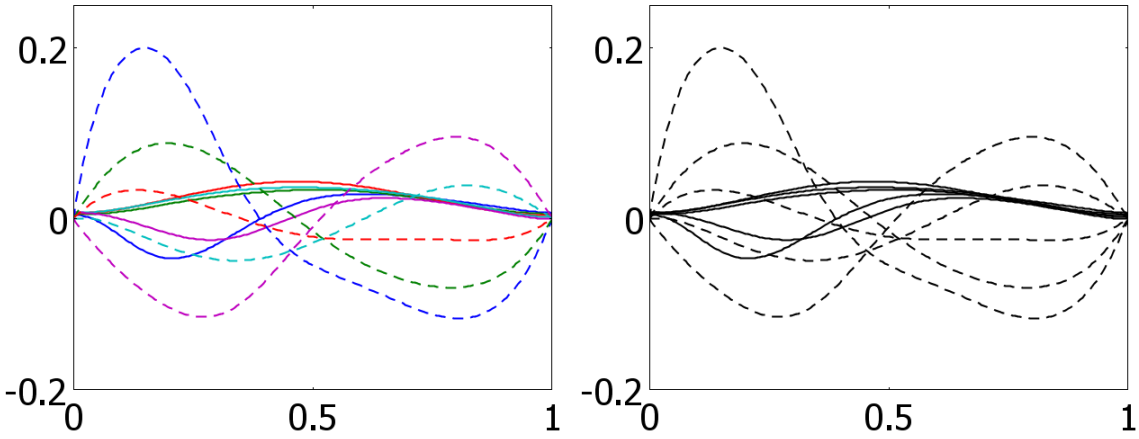
Профили радиальный разрез контравариантных компонент w1 и w2



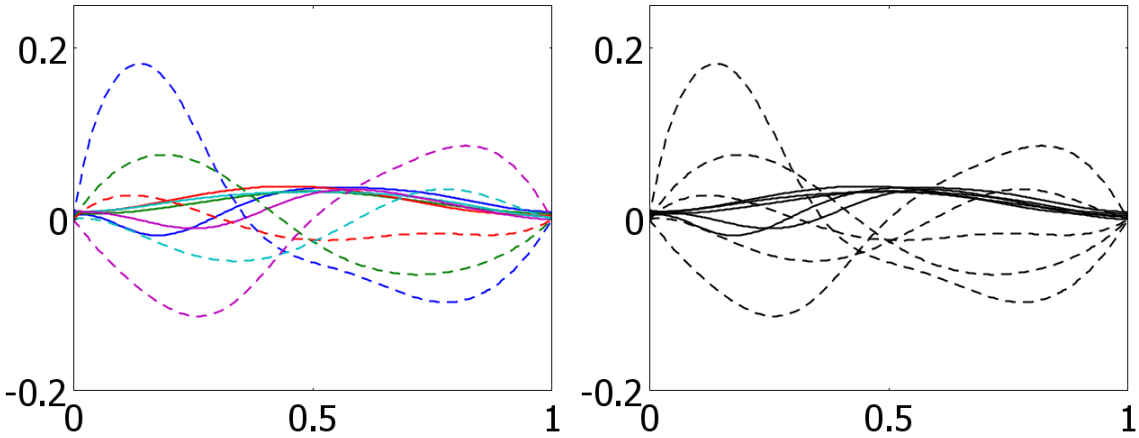
$\mathrm{Re} \to 0$



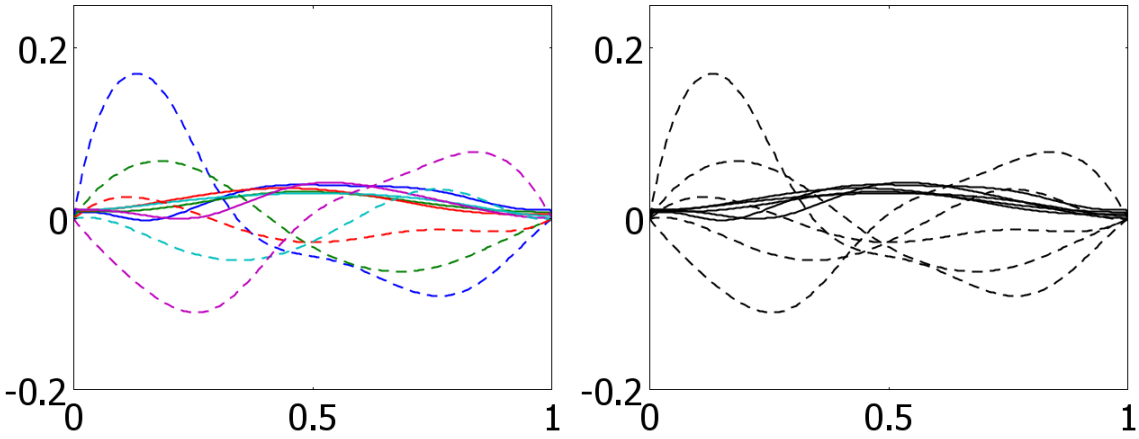
$\mathrm{Re} = 200$



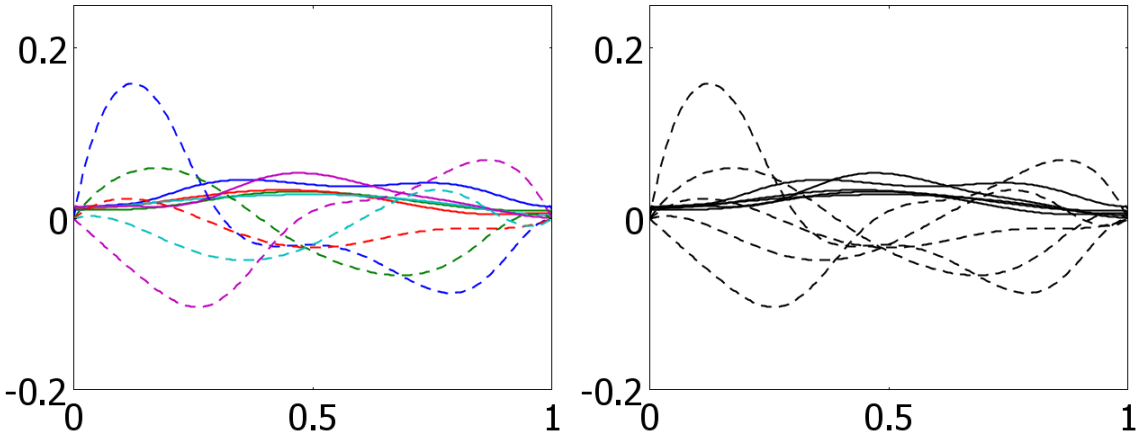
Re = 400



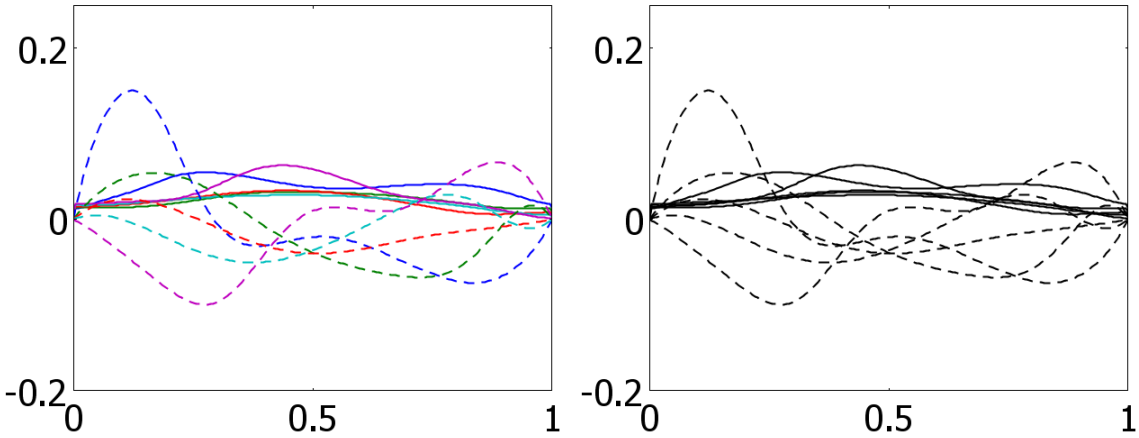
Re = 500



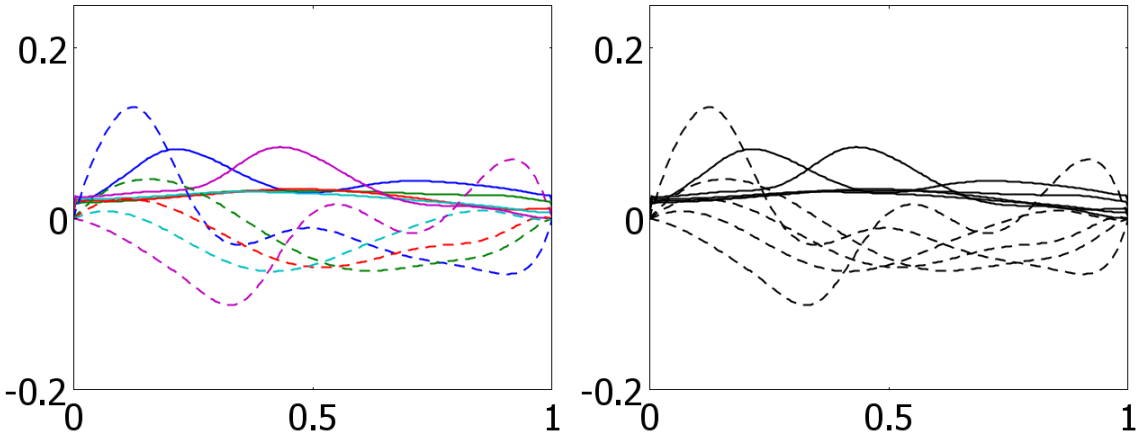
Re = 600



Re = 800

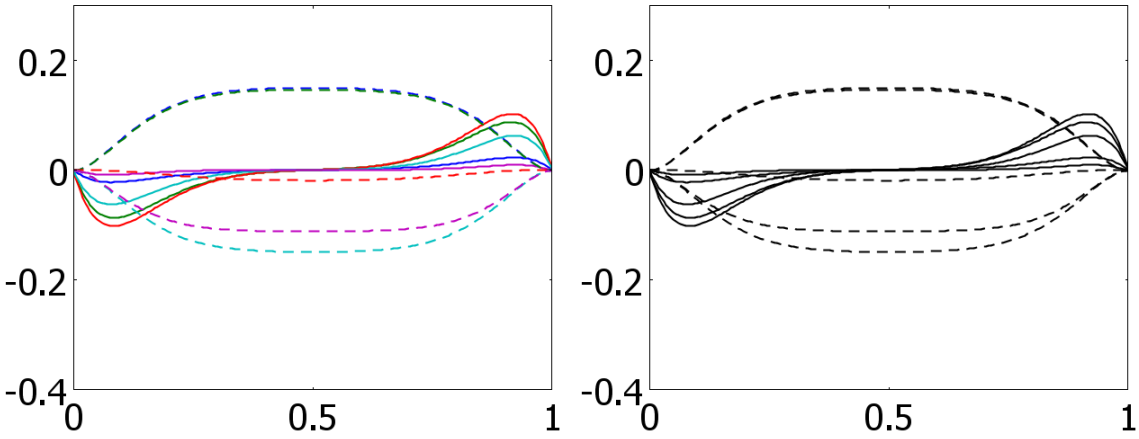


Re = 1000

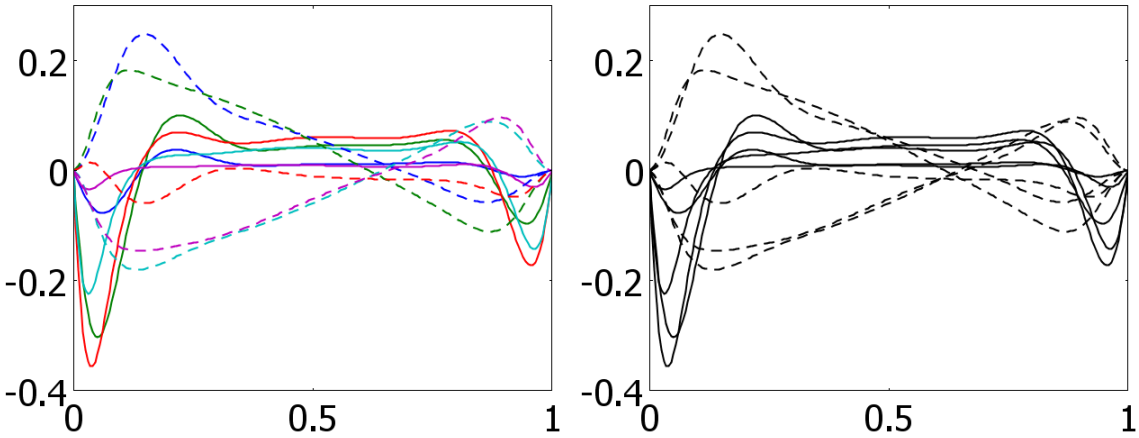


Re = 1500

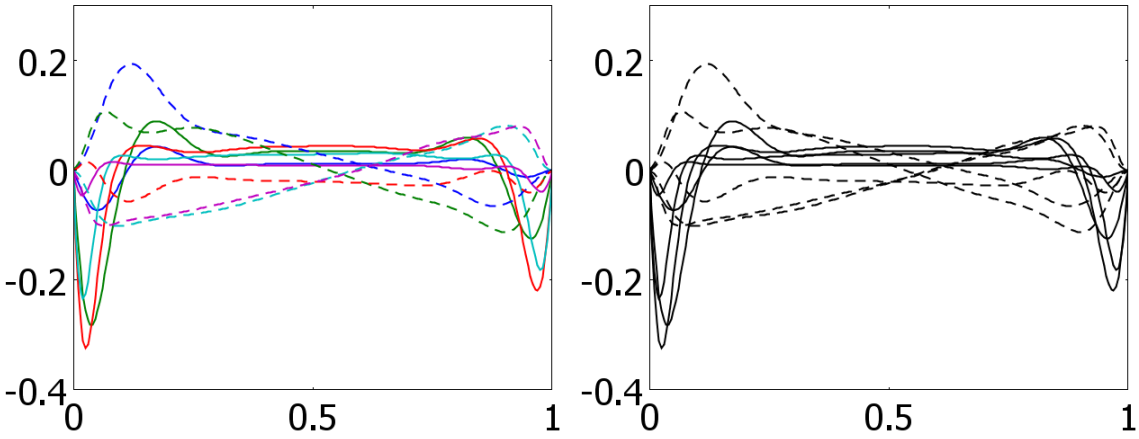
Профили окружной разрез контравариантных компонент w1 и w2



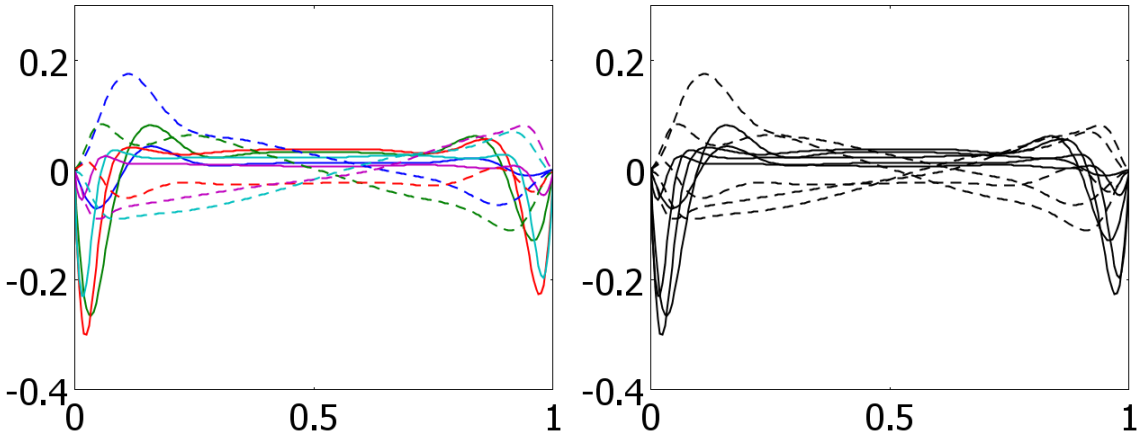
$\mathrm{Re} \to 0$



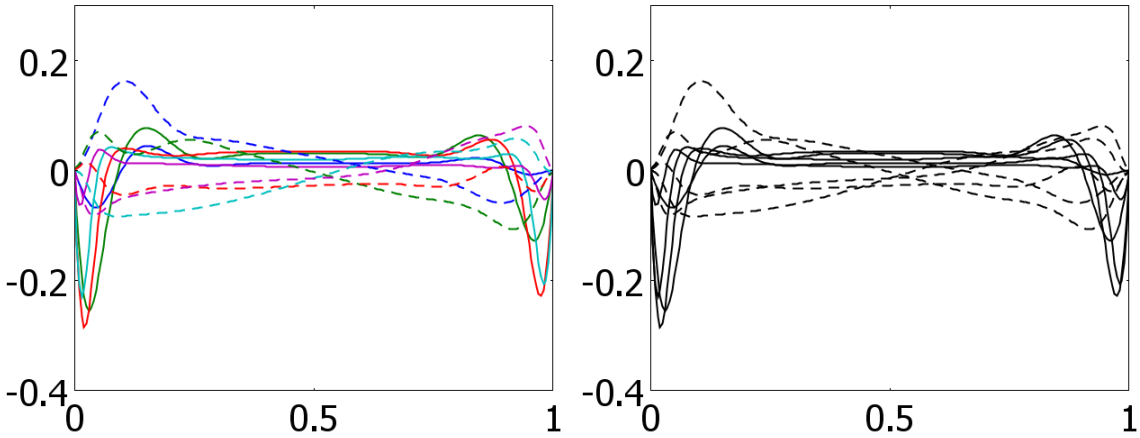
$\mathrm{Re} = 200$



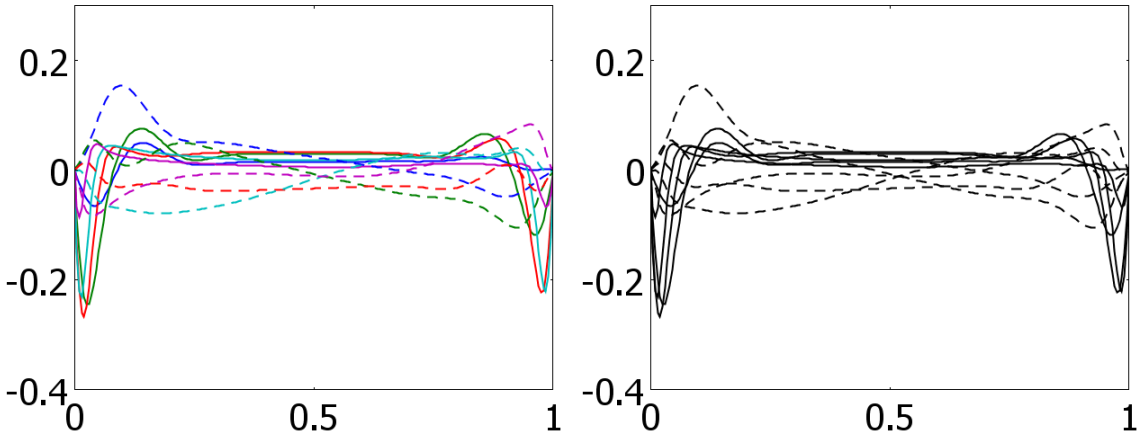
$\mathrm{Re} = 400$



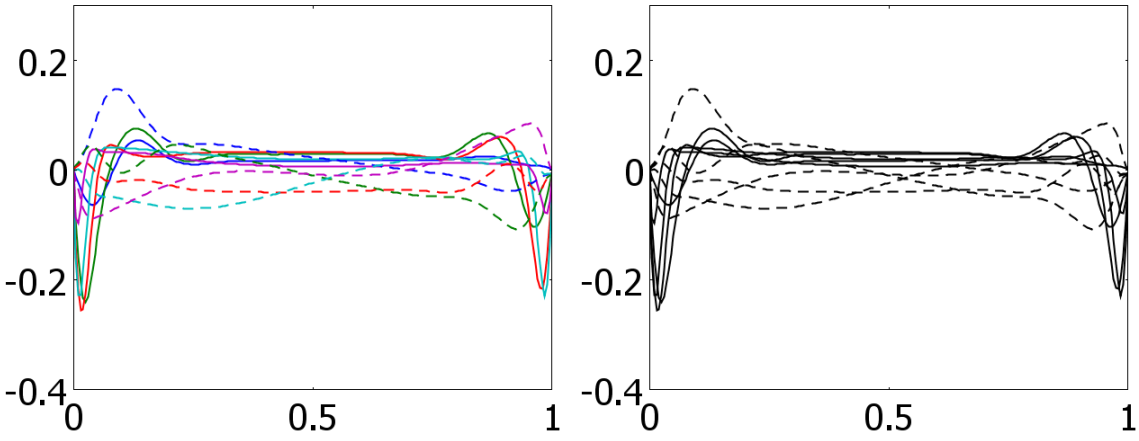
Re = 500



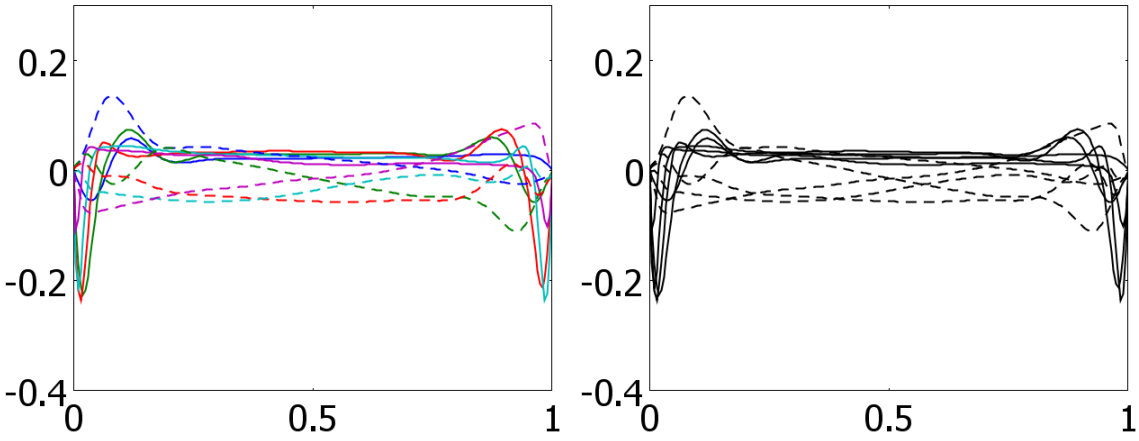
Re = 600



Re = 800



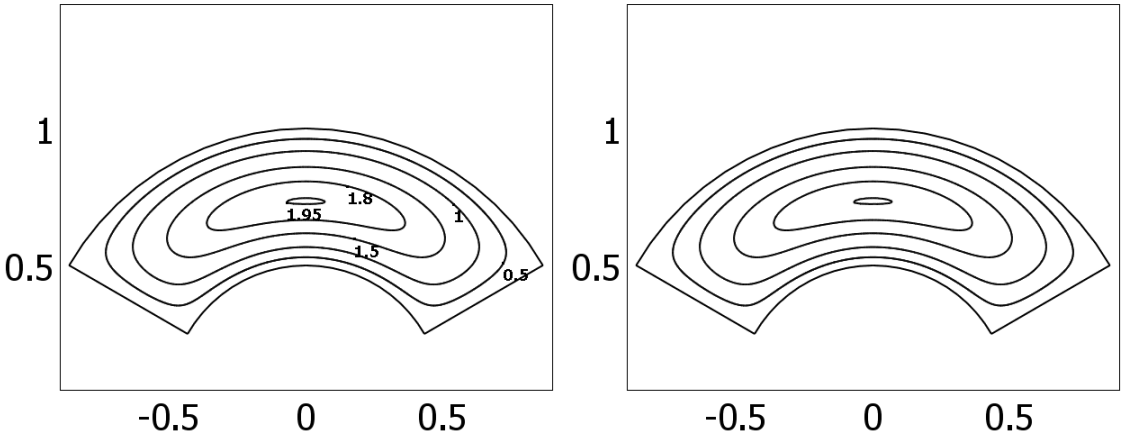
Re = 1000



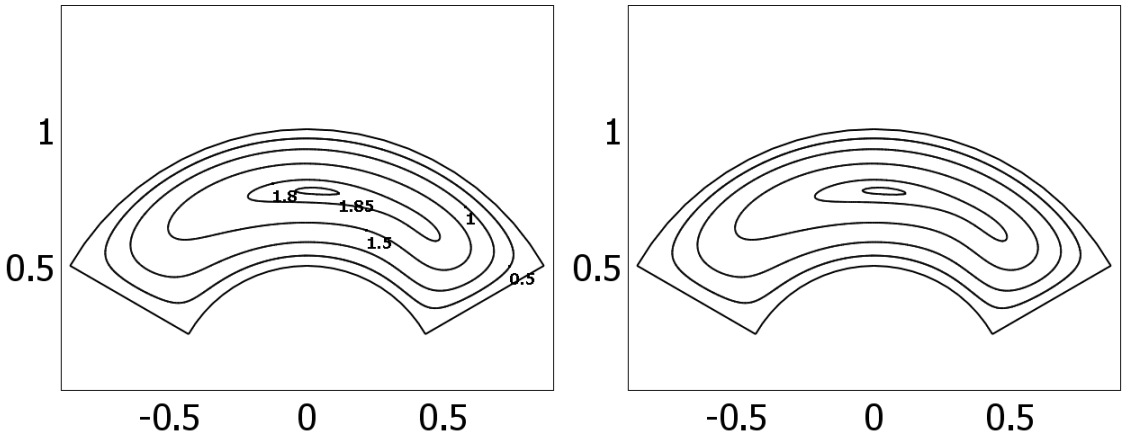
Re = 1500

S=16R=8D

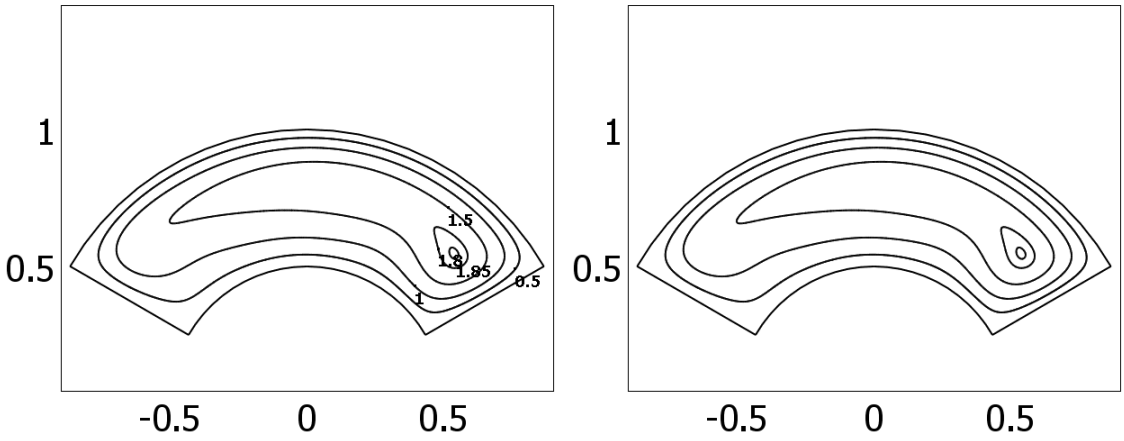
Линии уровня Ковариантная компонента u3



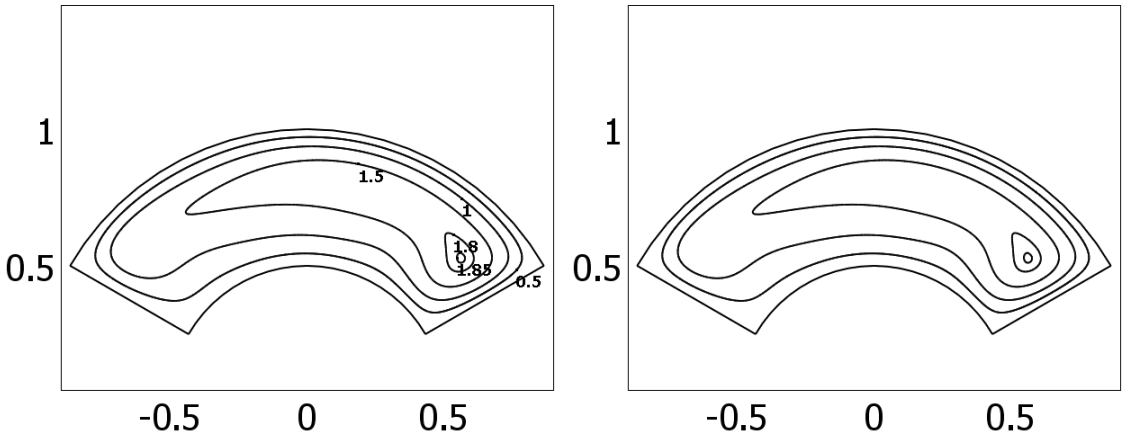
Re → 0



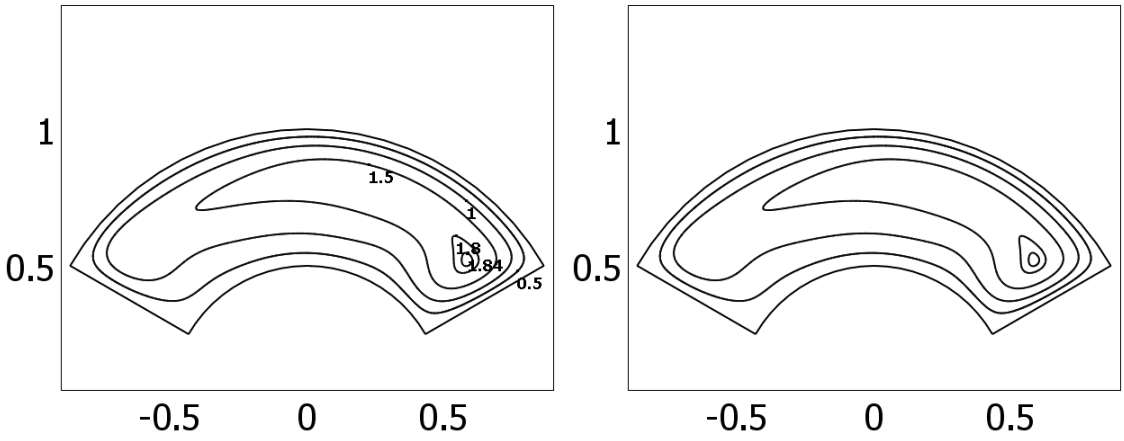
Re = 200



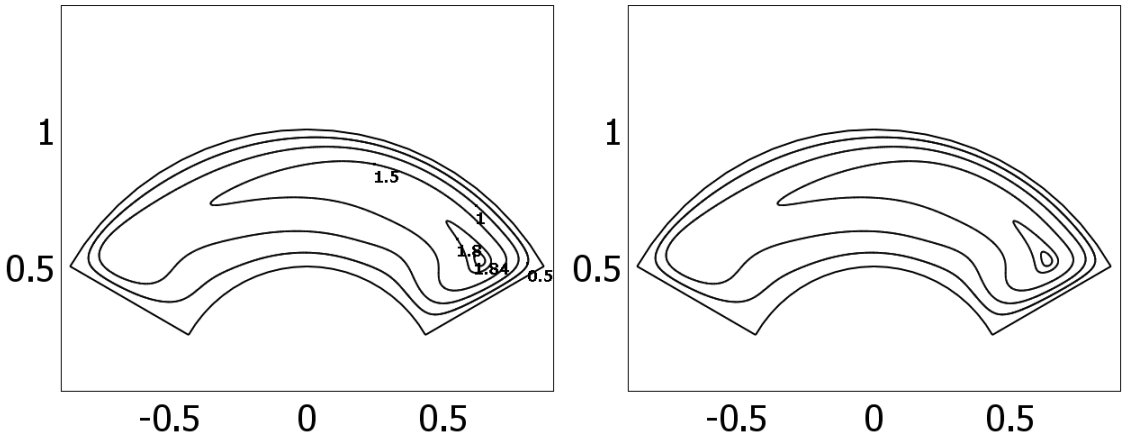
Re = 400



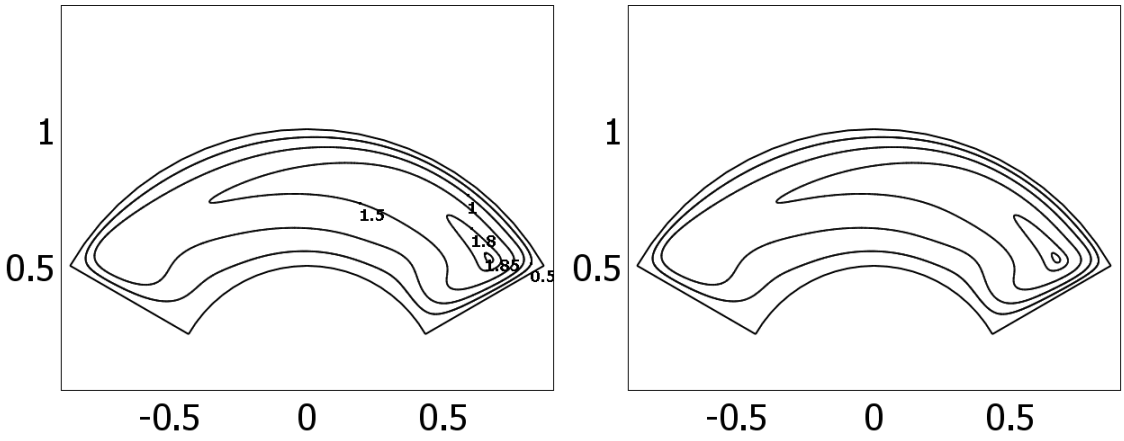
Re = 500



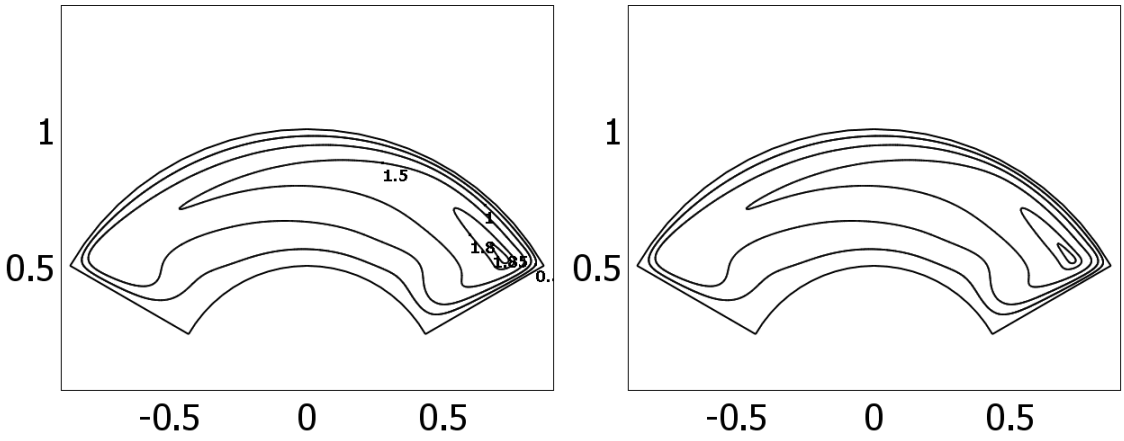
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

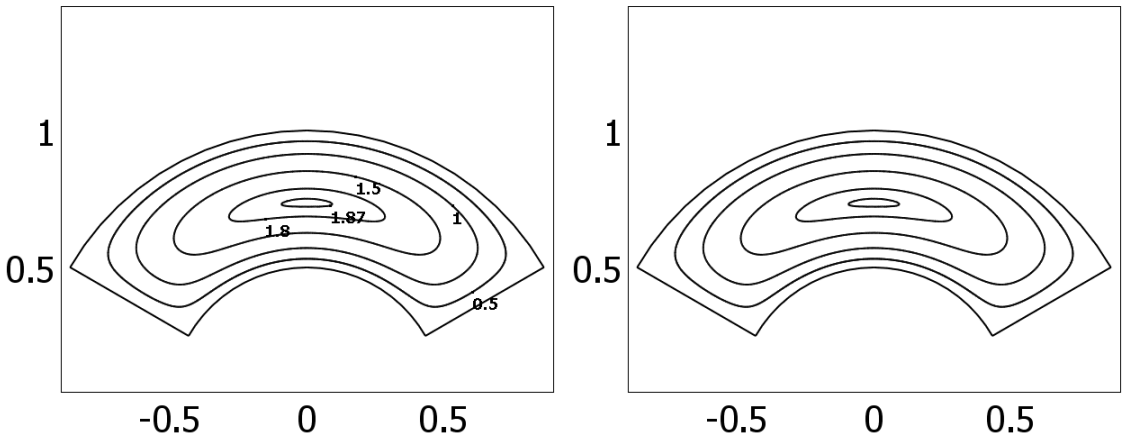


$\mathrm{Re} = 1000$

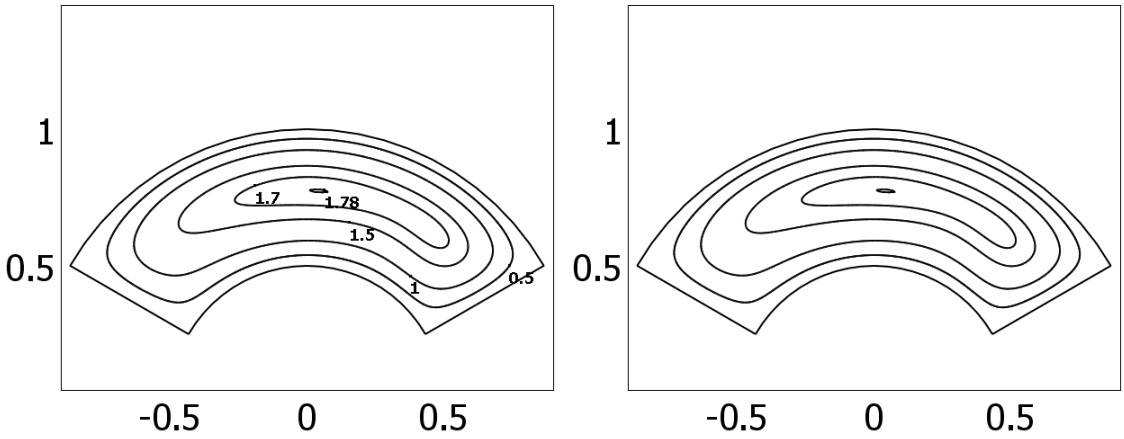


$\mathrm{Re} = 1500$

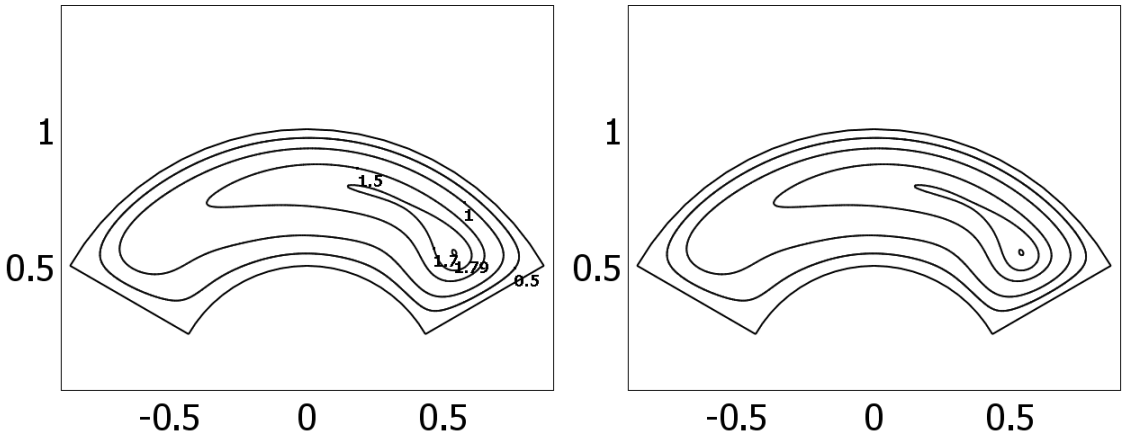
Линии уровня осевой Контравариантная компонента v3



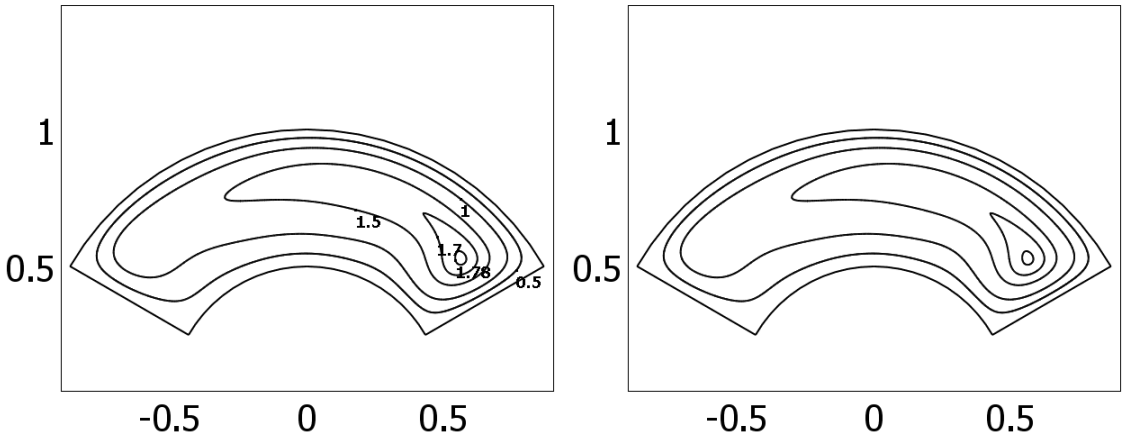
$\mathrm{Re} \to 0$



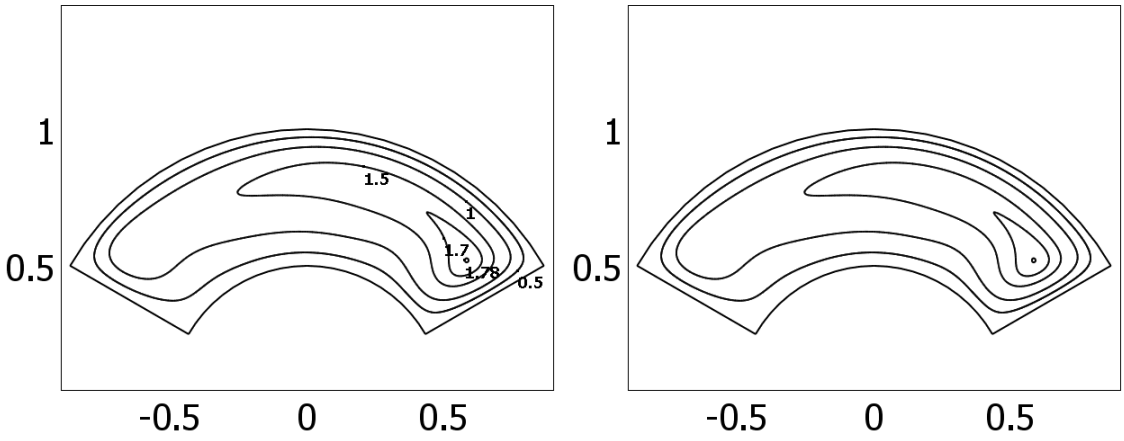
$\mathrm{Re} = 200$



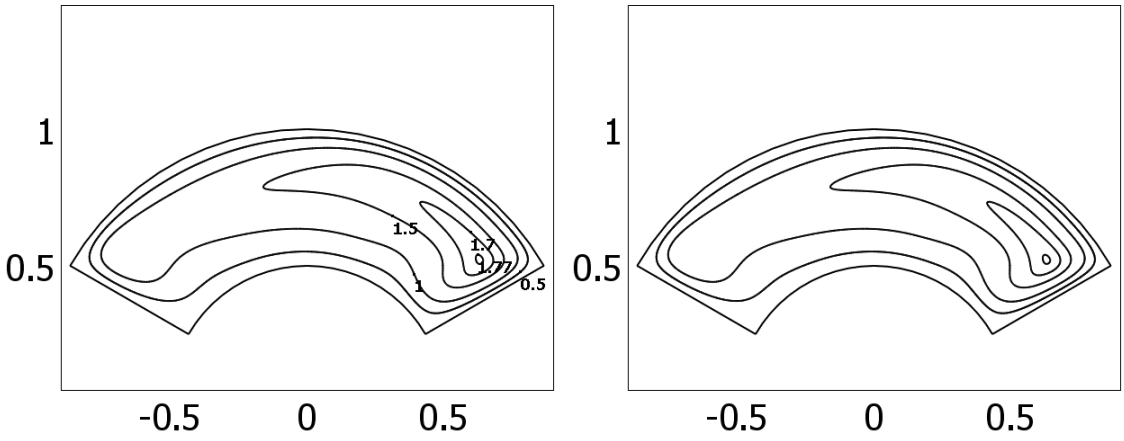
Re = 400



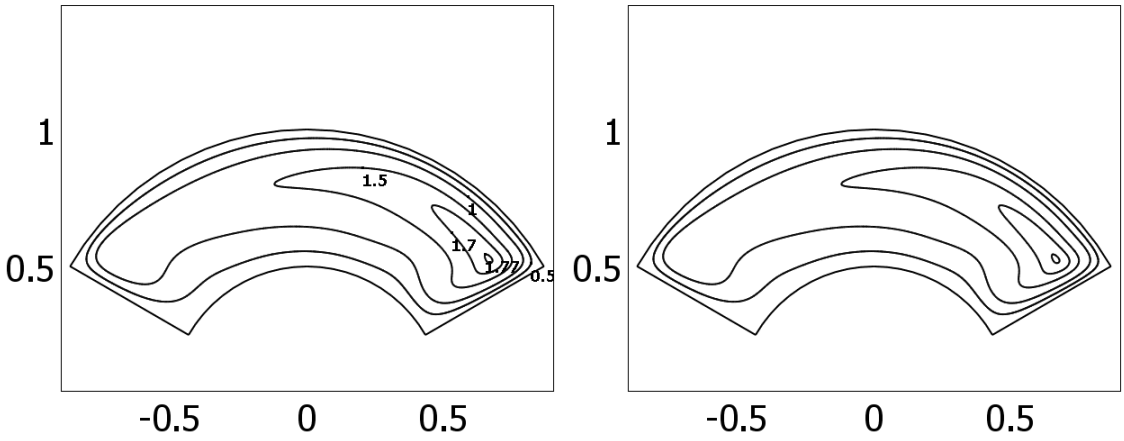
Re = 500



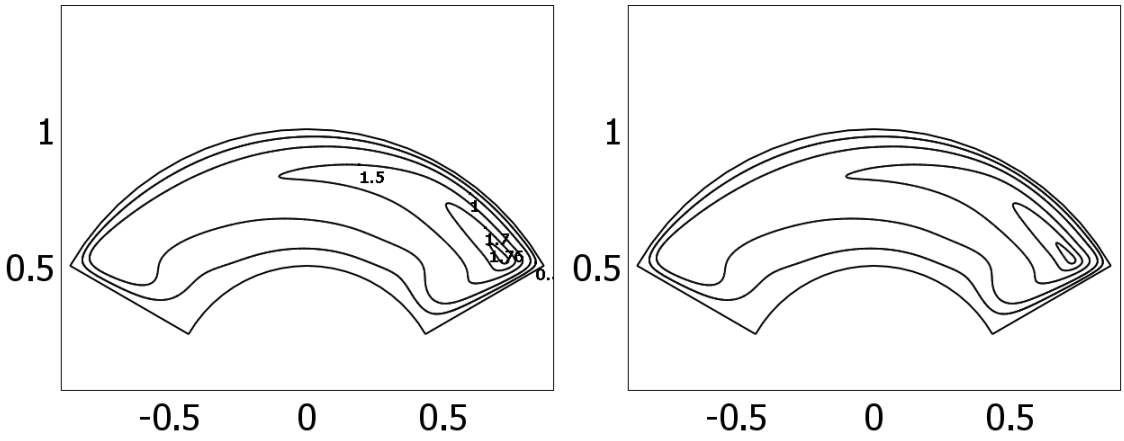
Re = 600



$\mathrm{Re} = 800$



$\mathrm{Re} = 1000$



$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня радиальной компонента v1=w1

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

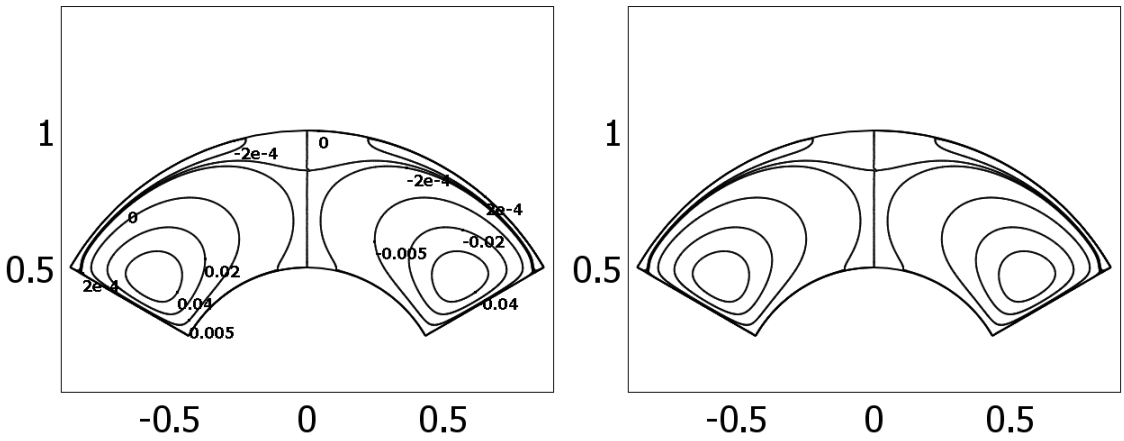
$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

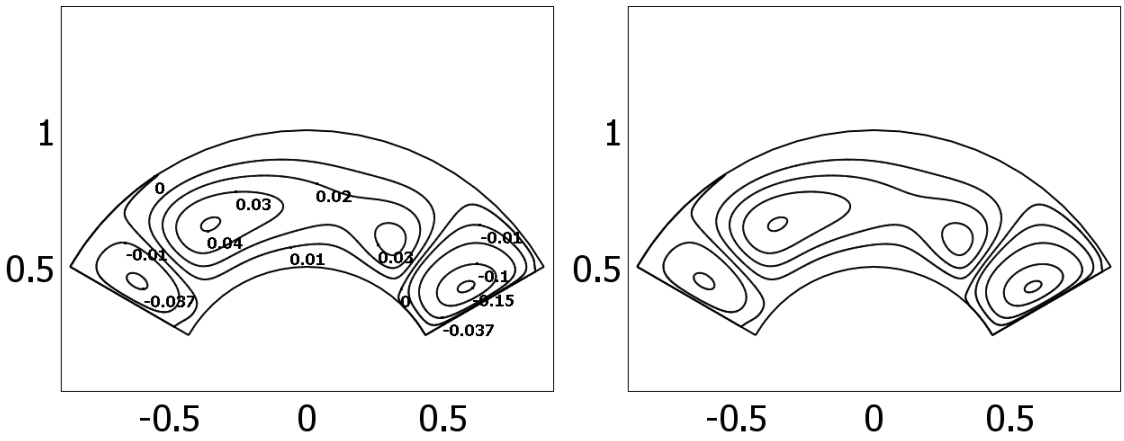
$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

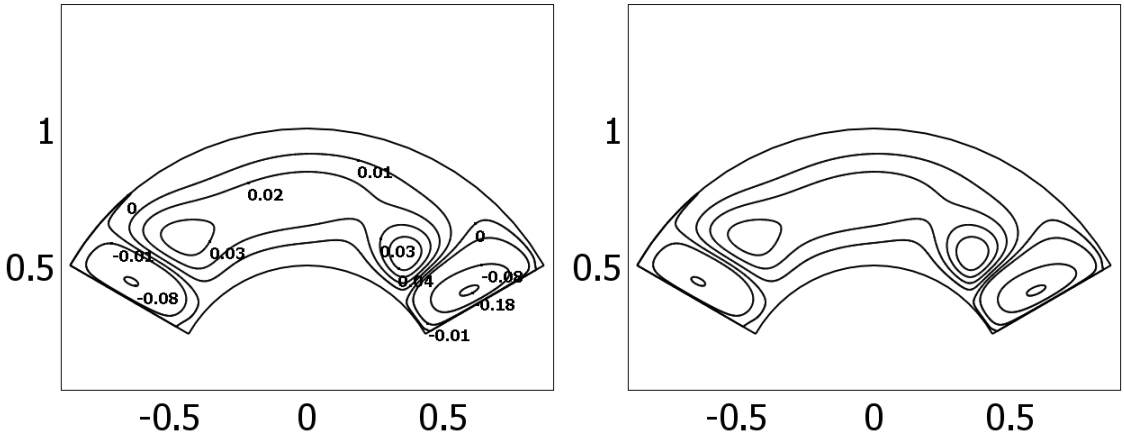
Линии уровня окружной ковариантной компоненты v2



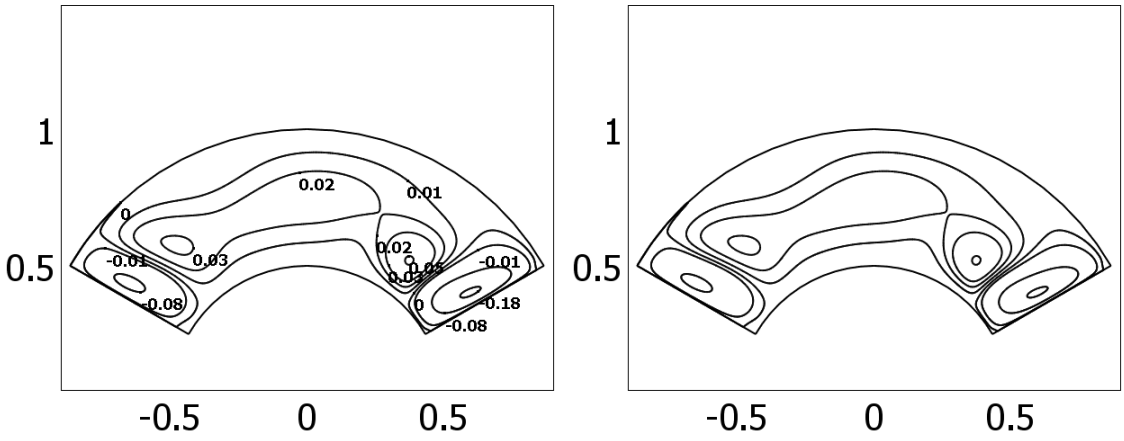
$\mathrm{Re} \to 0$



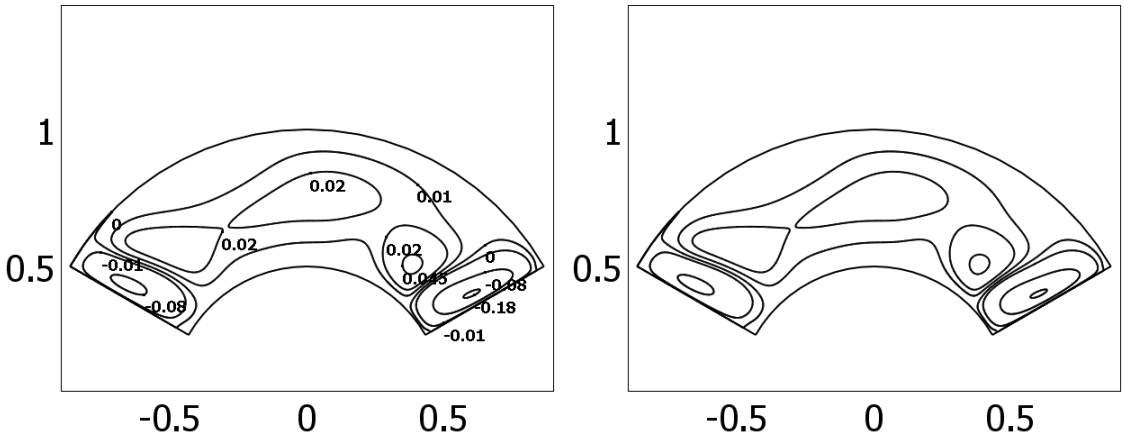
$\mathrm{Re} = 200$



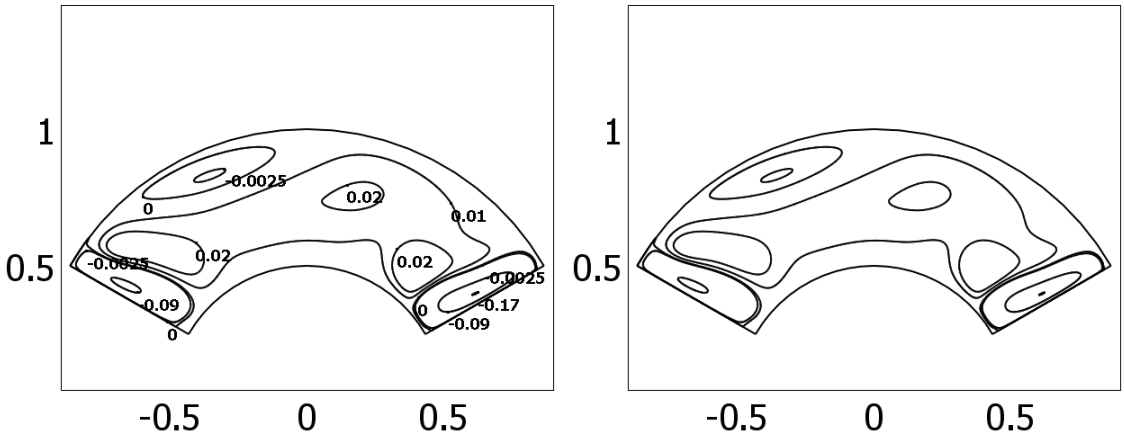
$\mathrm{Re} = 400$



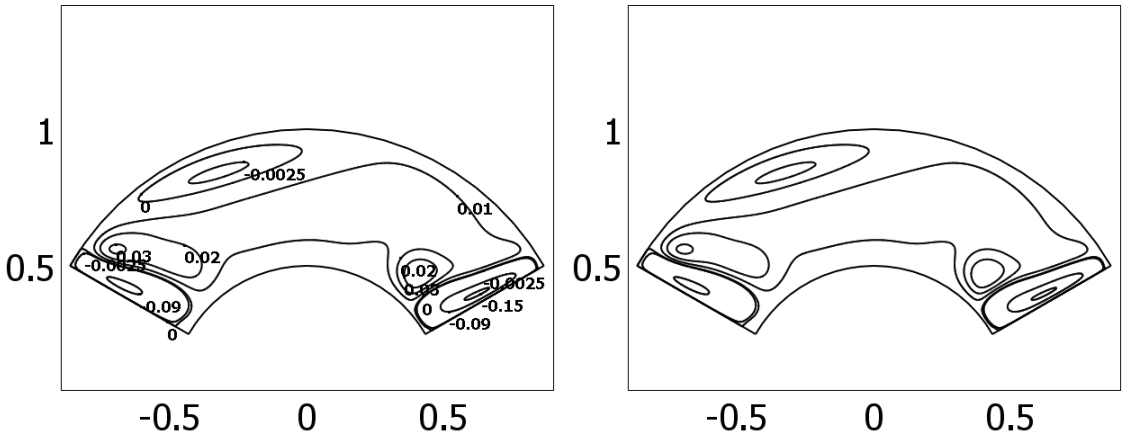
Re = 500



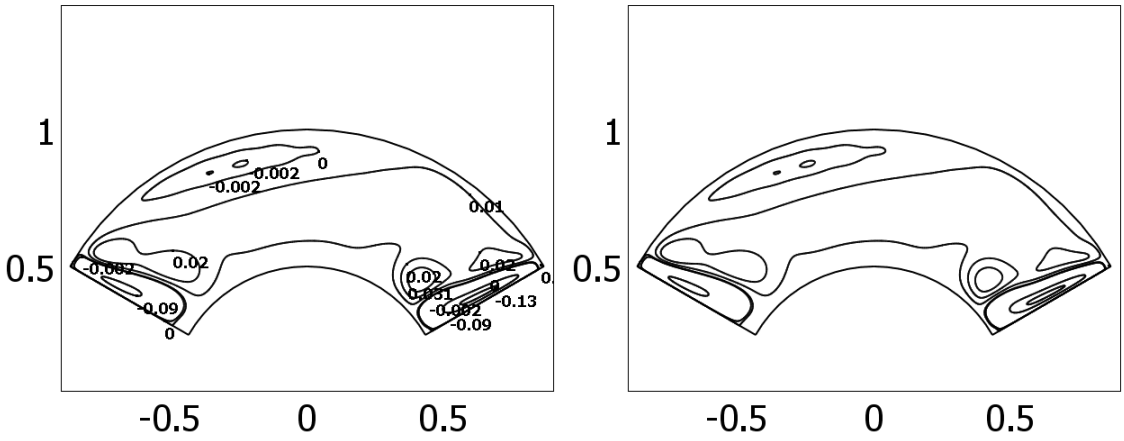
Re = 600



Re = 800



$\mathrm{Re} = 1000$



$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня окружной контравариантной компоненты w2

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

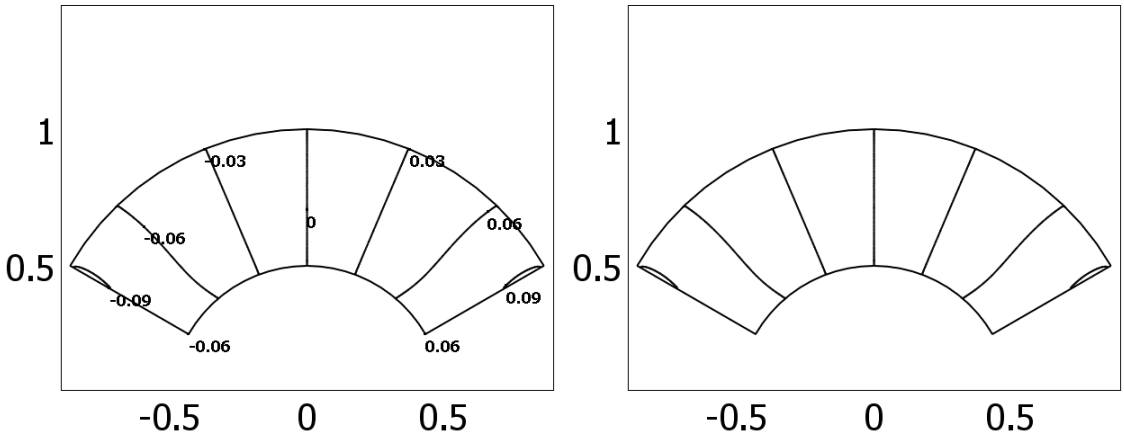
$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

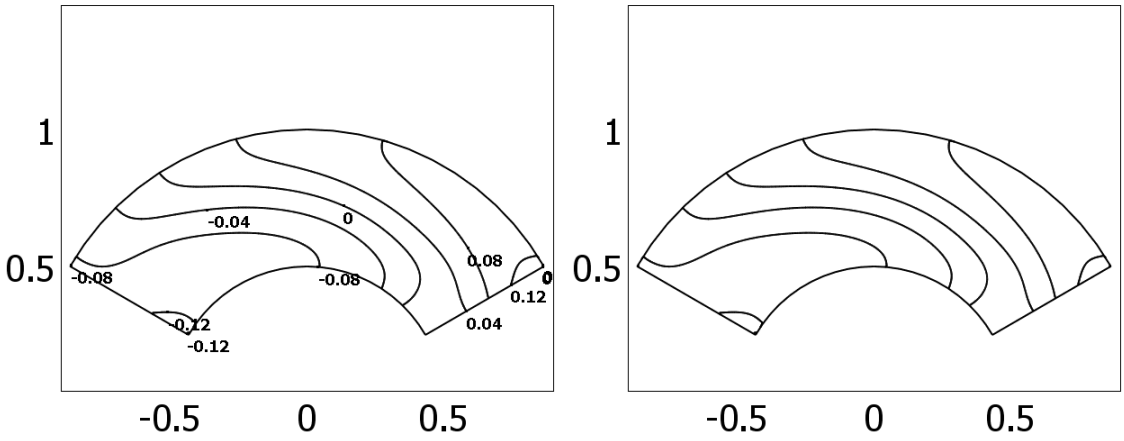
$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

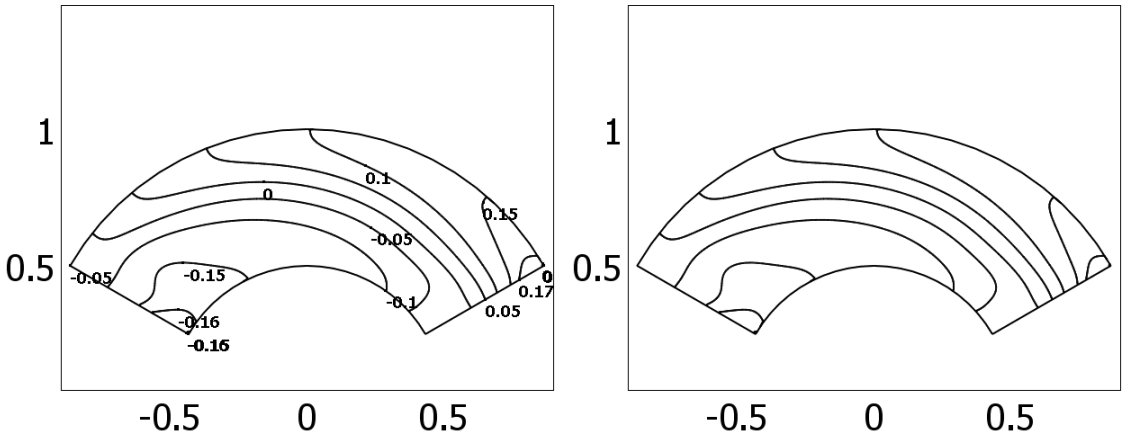
Линии уровня давления



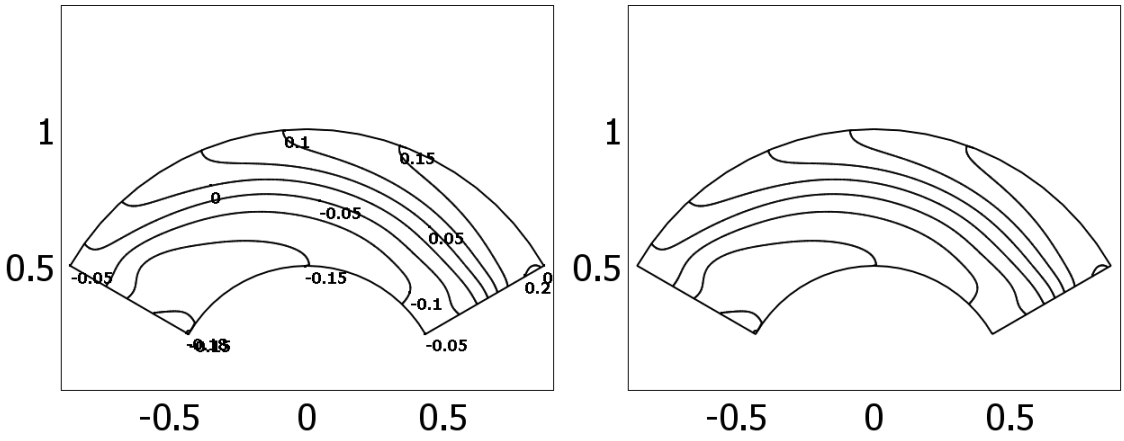
$\mathrm{Re} \to 0$



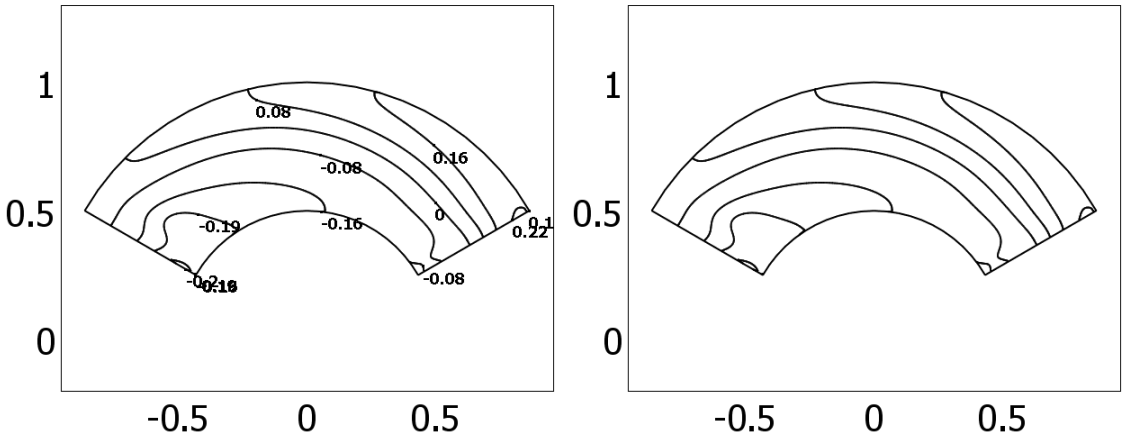
$\mathrm{Re} = 200$



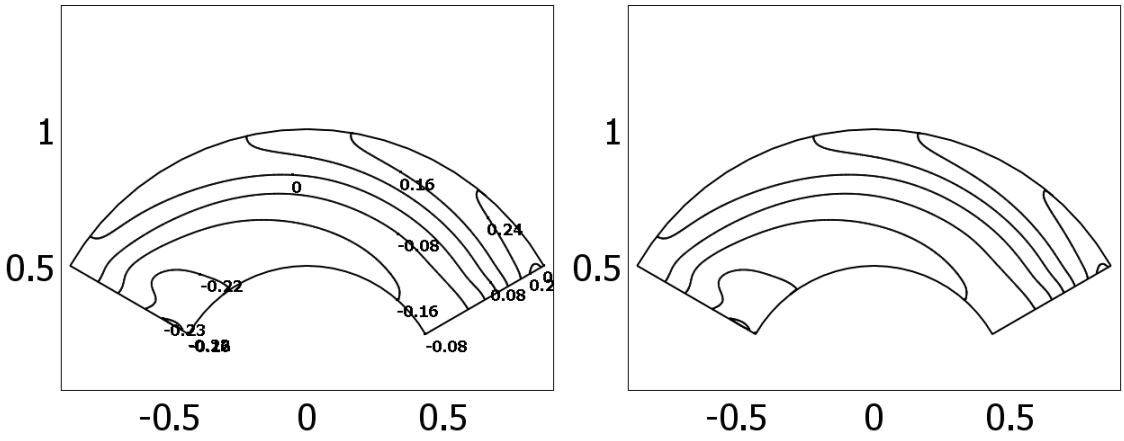
$\mathrm{Re} = 400$



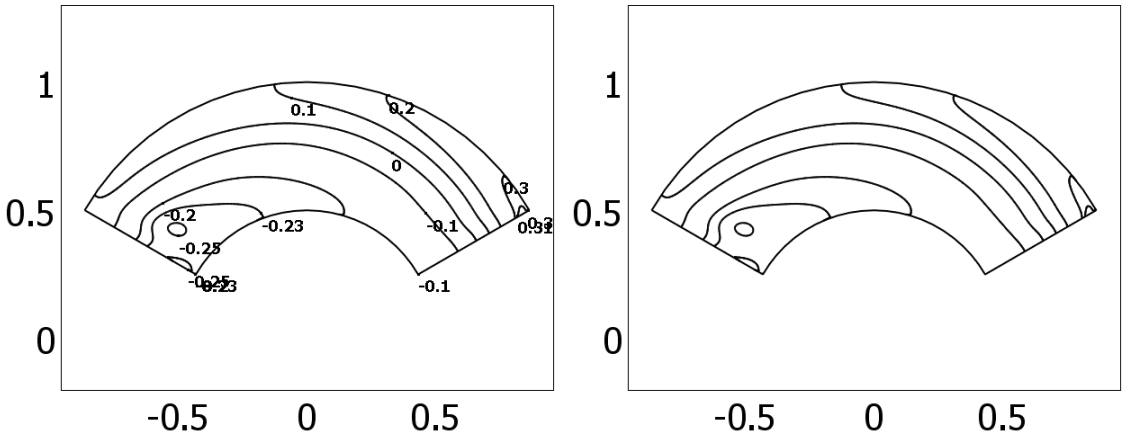
Re = 500



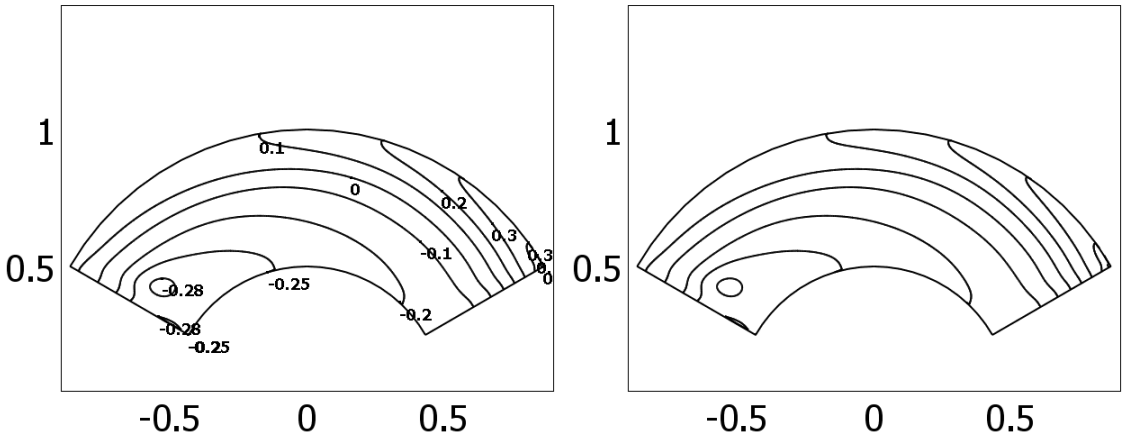
Re = 600



Re = 800

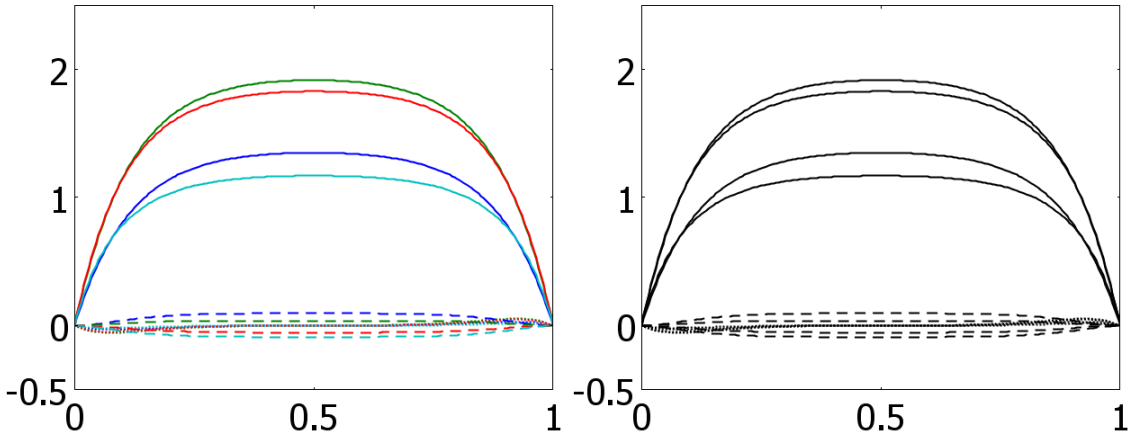


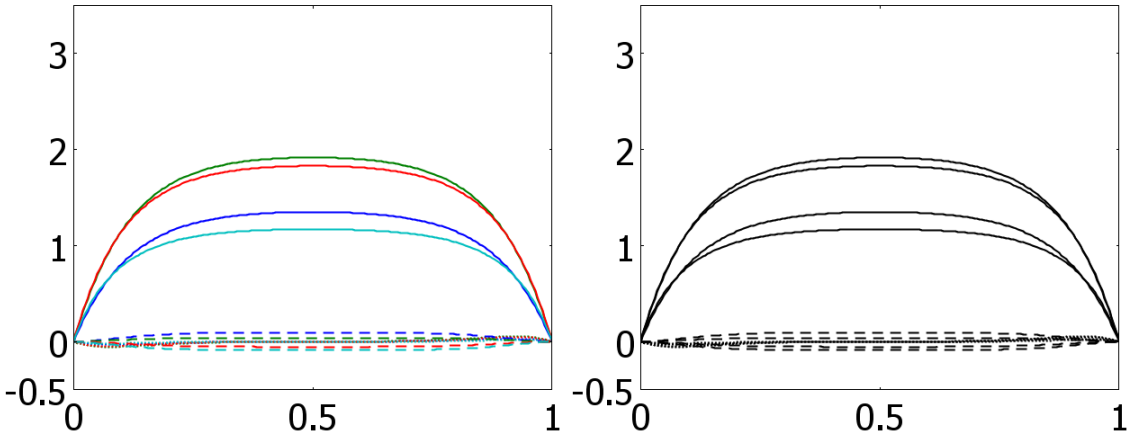
Re = 1000



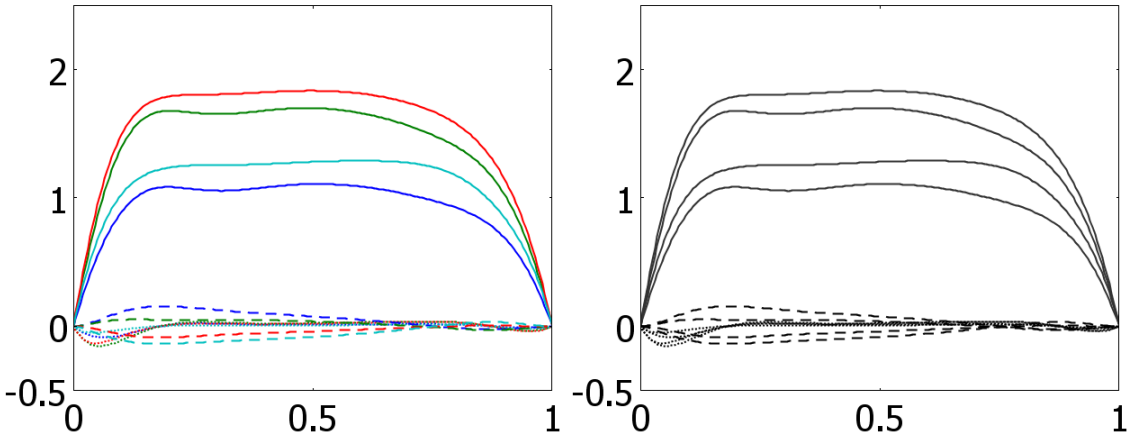
Re = 1500

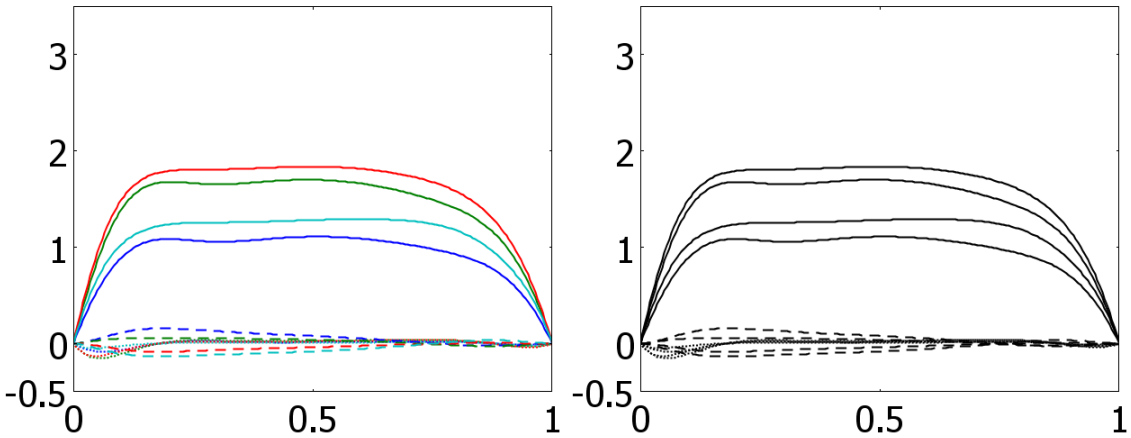
Окружные разрезы и компоненты скорости u3, w1,w2



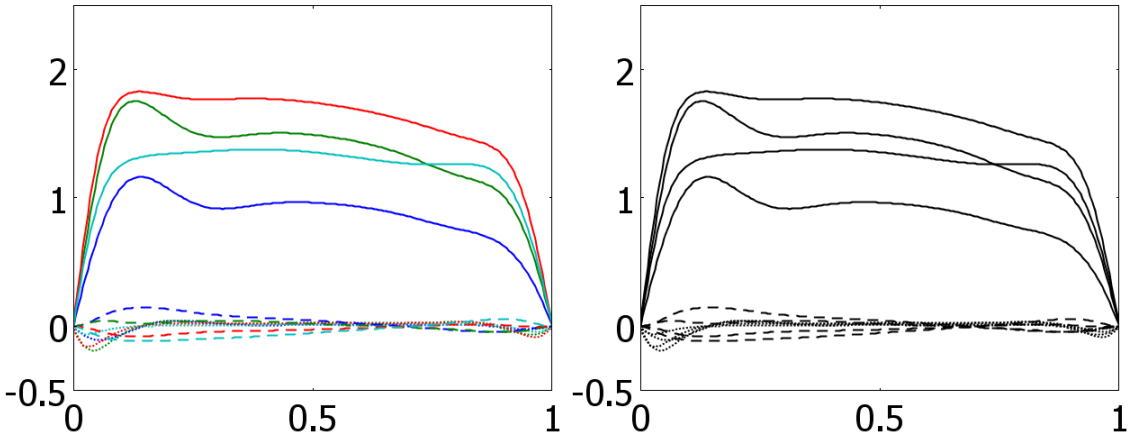


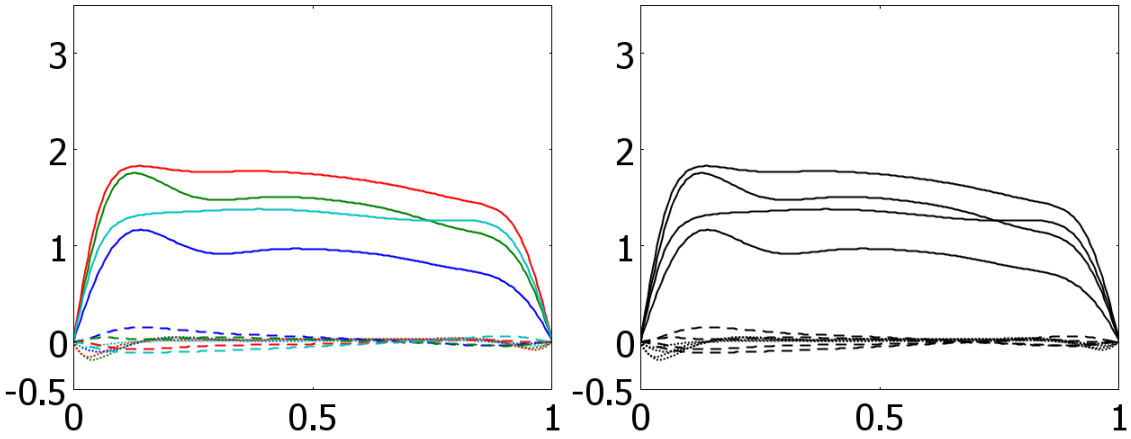
$\mathrm{Re} \to 0$



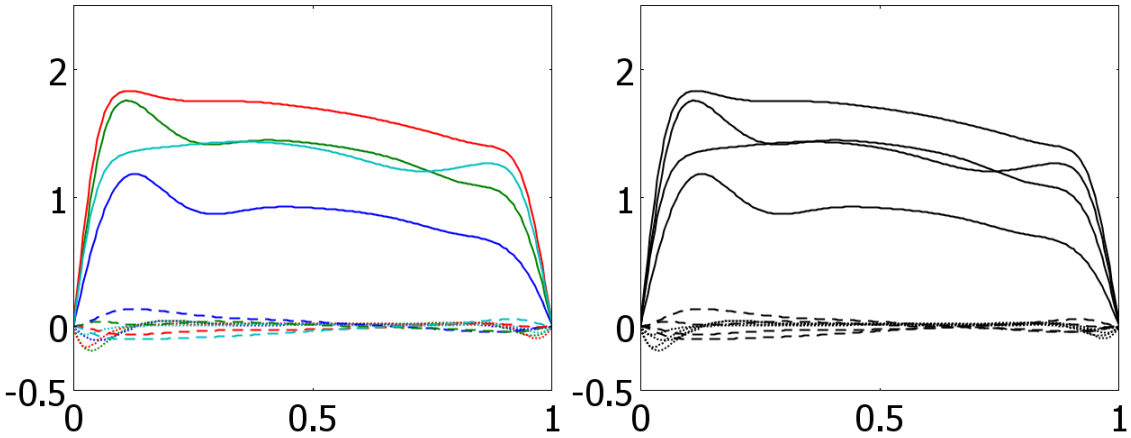


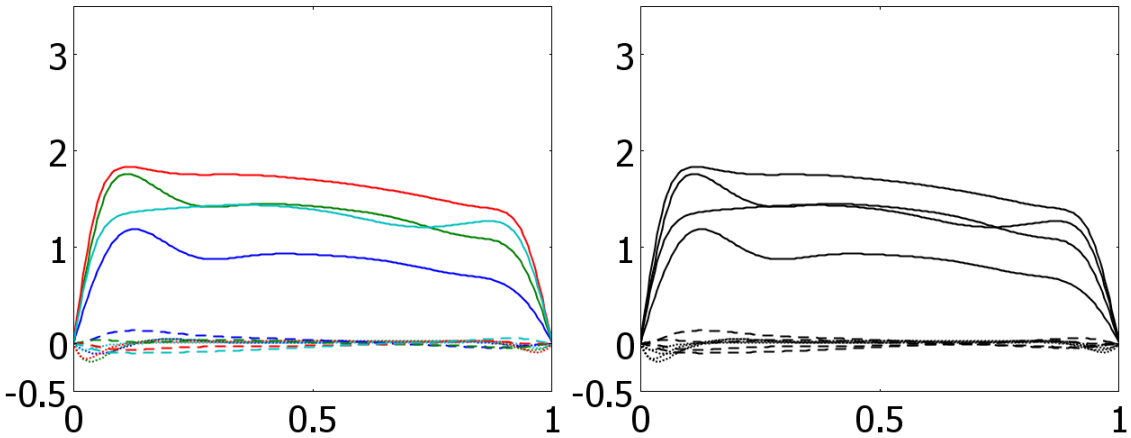
$\mathrm{Re} = 200$



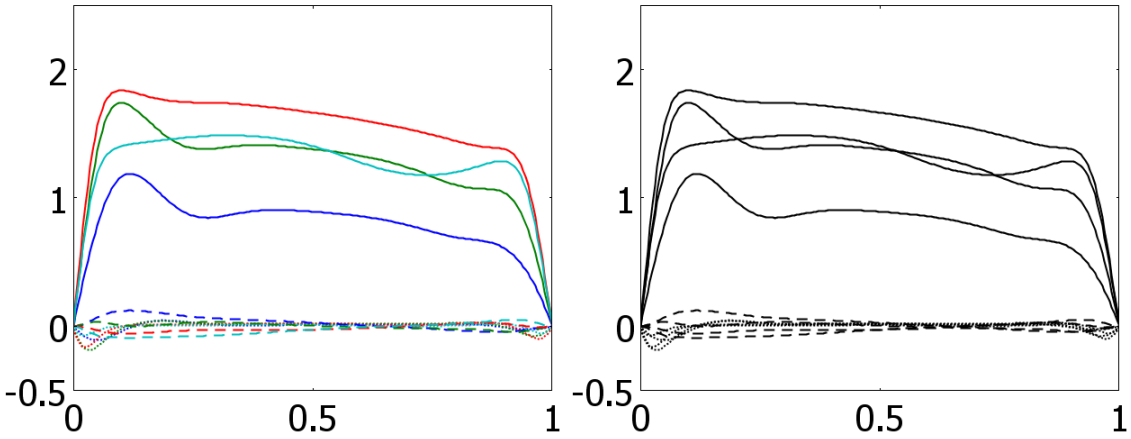


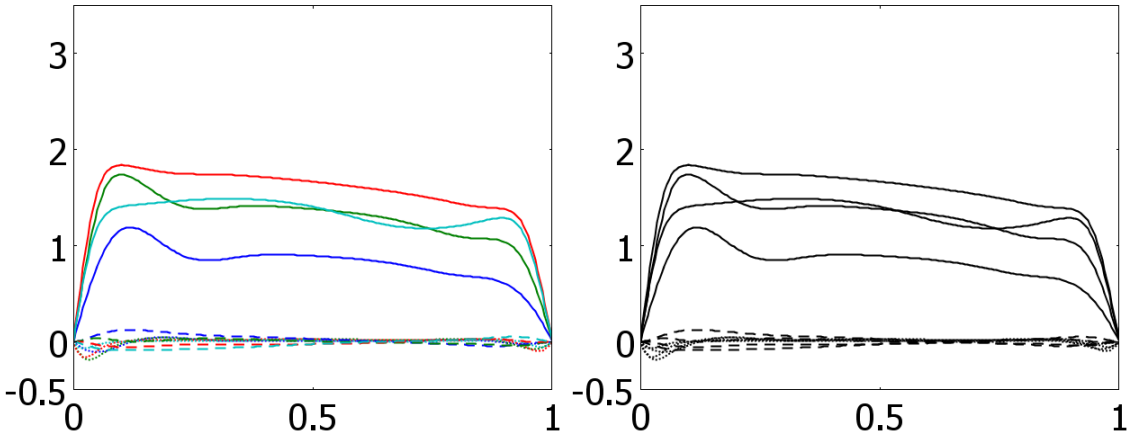
Re = 400



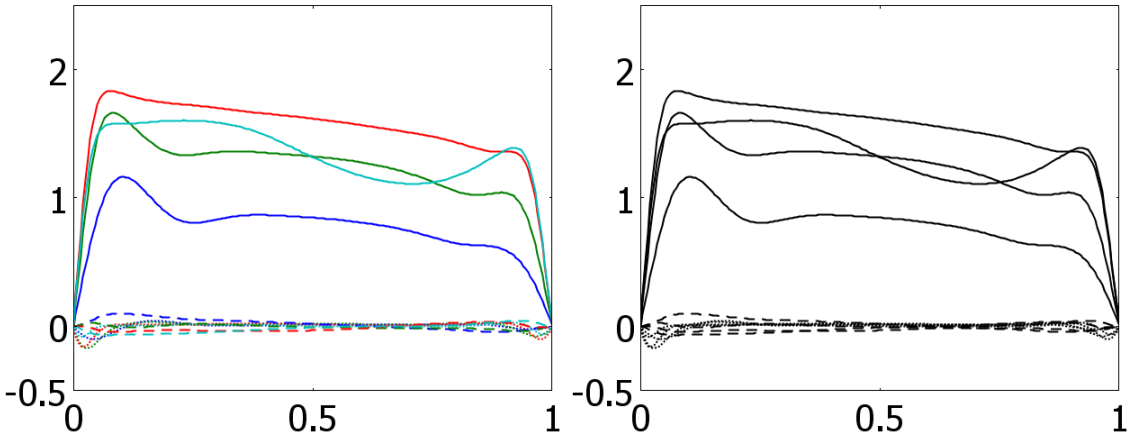


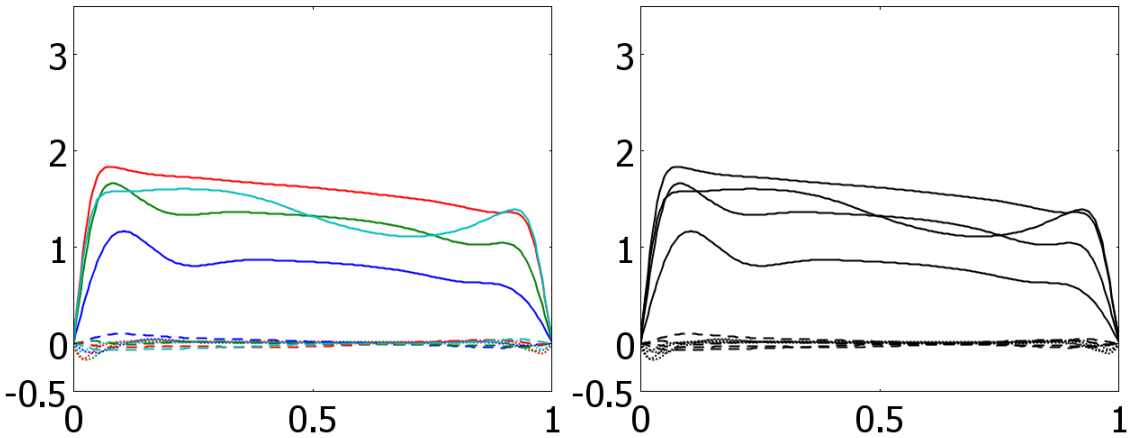
Re = 500



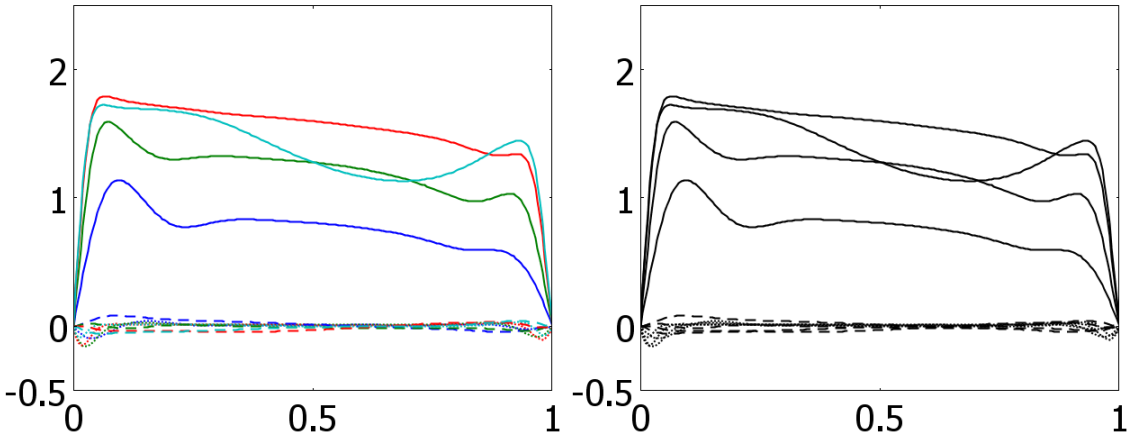


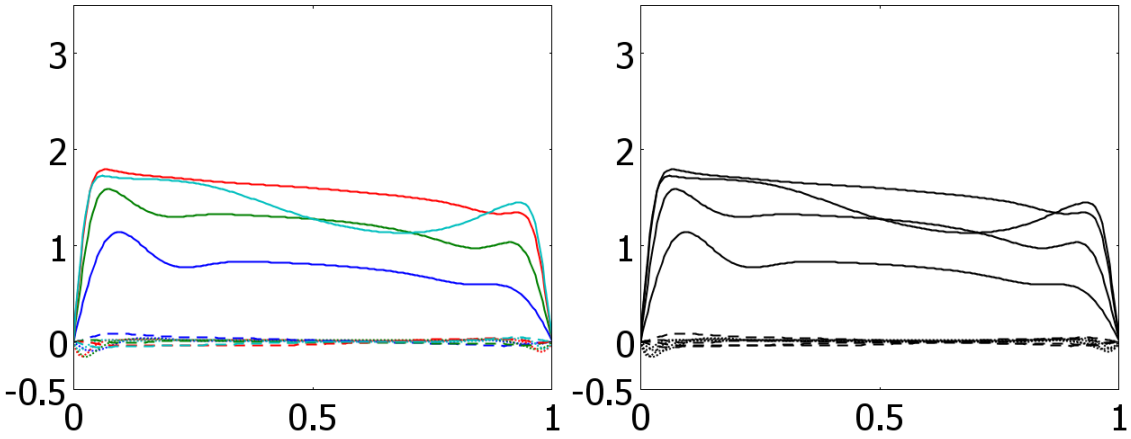
Re = 600



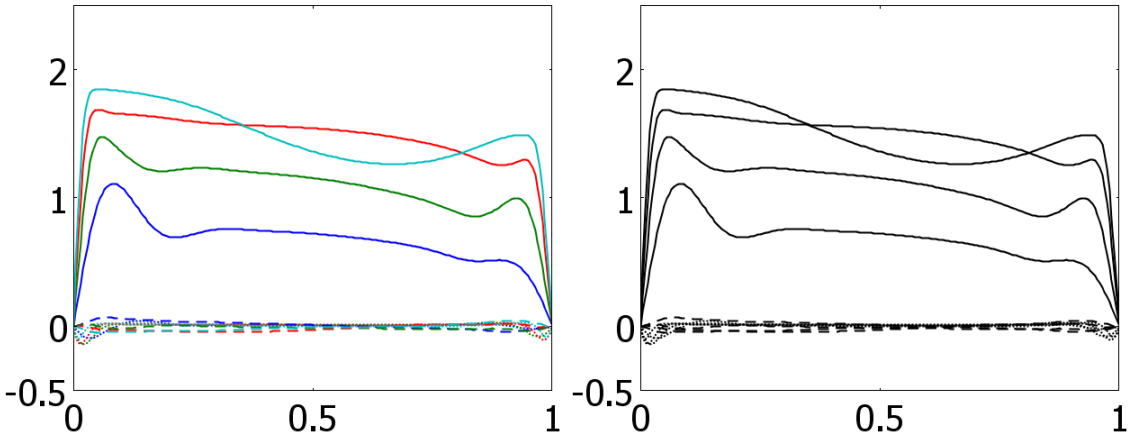


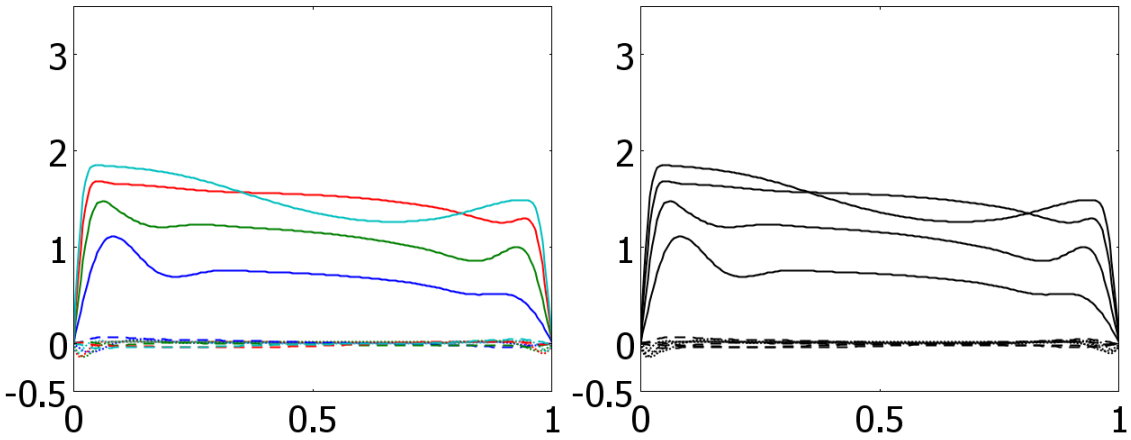
Re = 800





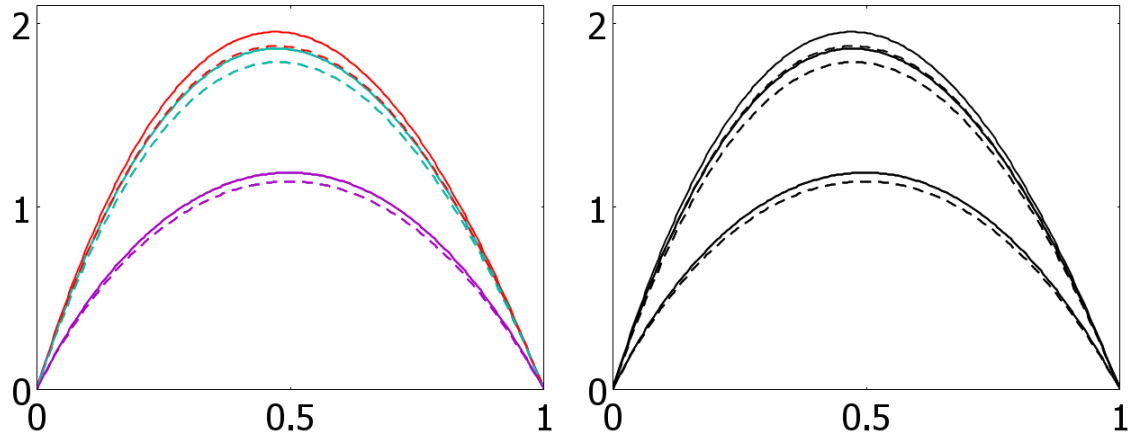
Re = 1000



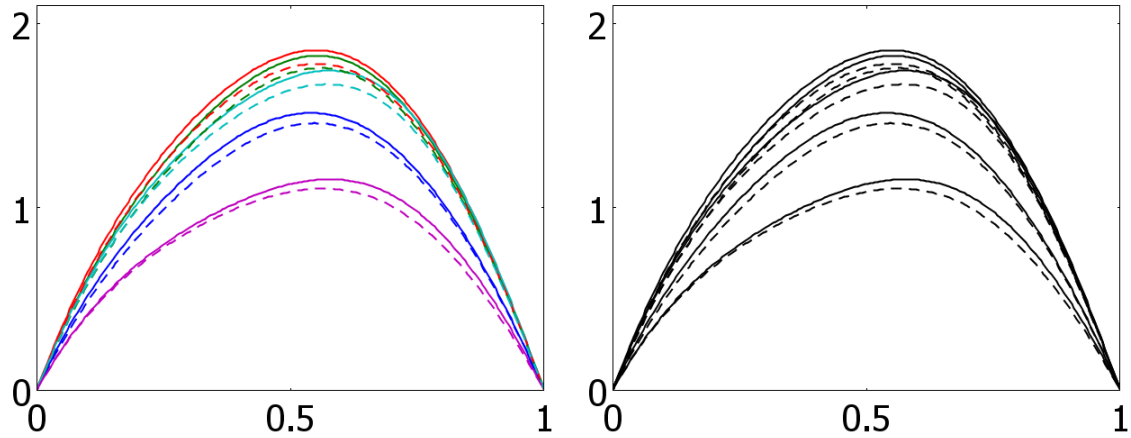


Re = 1500

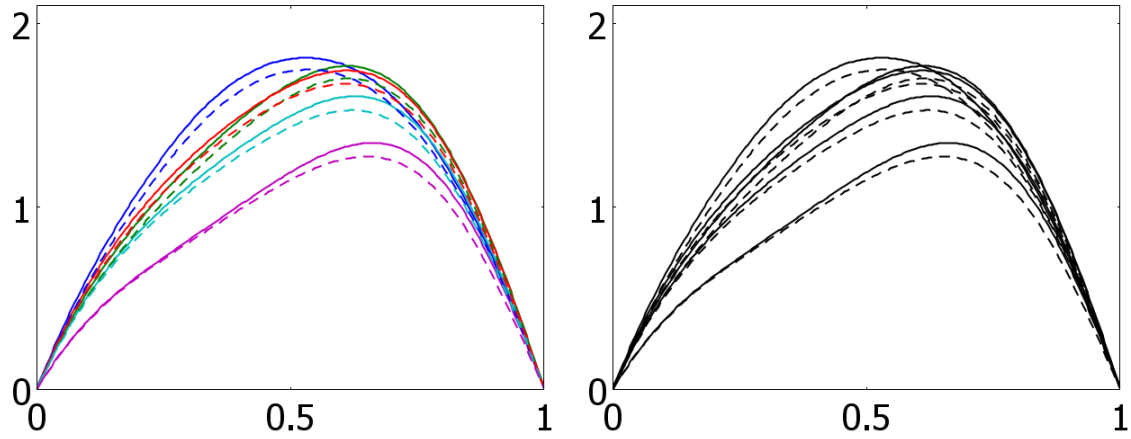
Профили радиальный разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



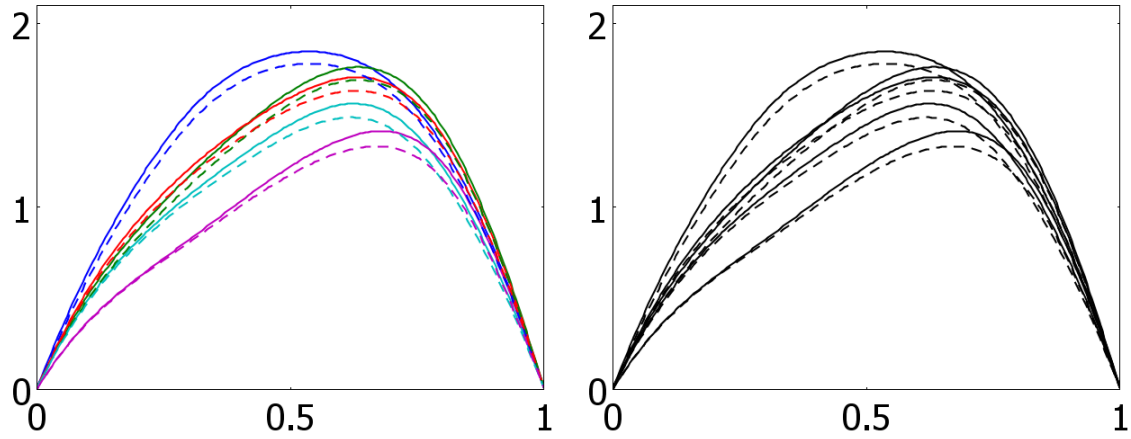
$\mathrm{Re} \to 0$



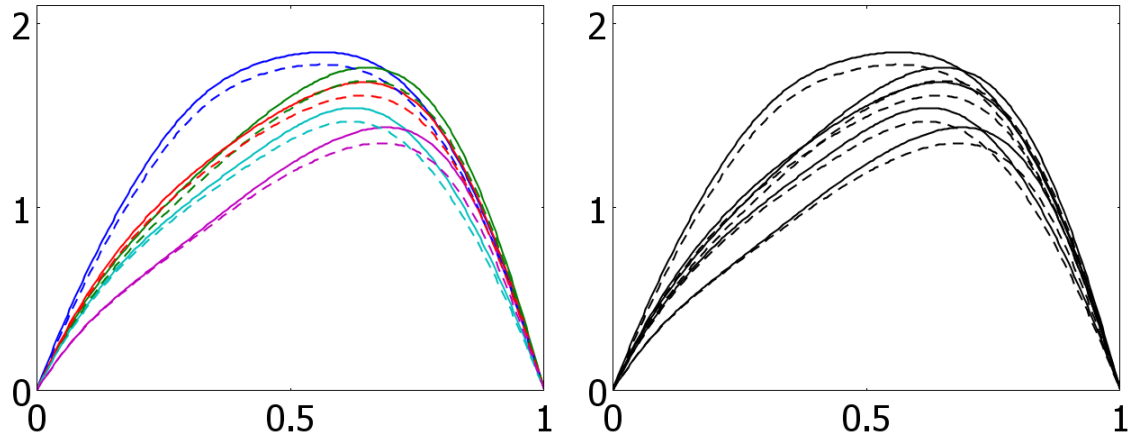
$\mathrm{Re} = 200$



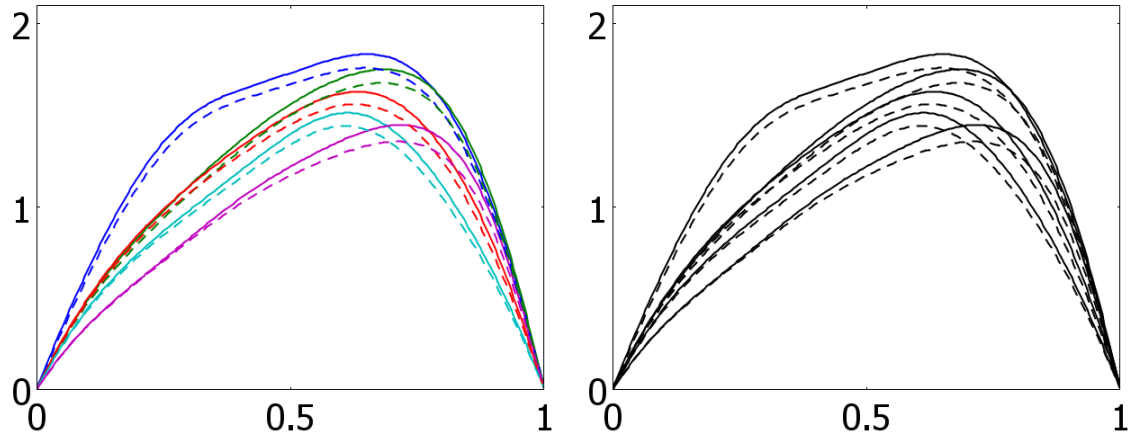
$\mathrm{Re} = 400$



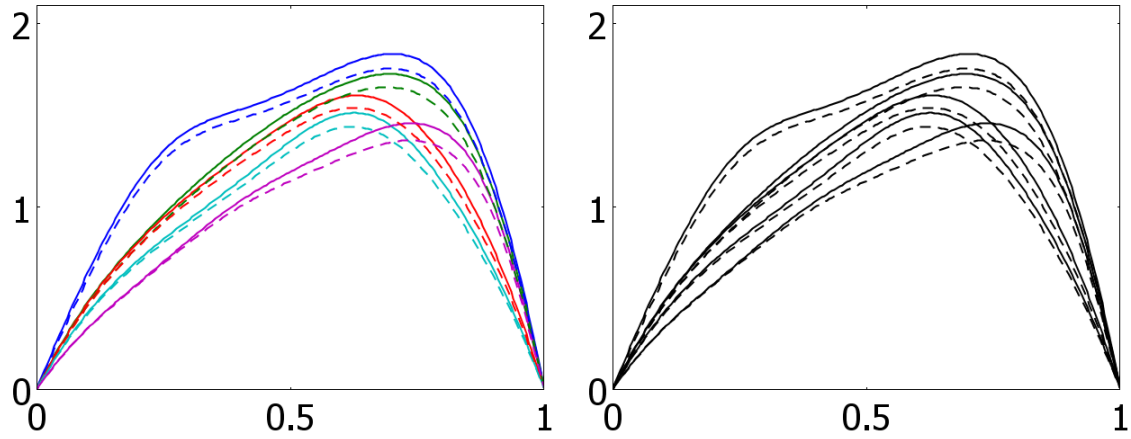
Re = 500



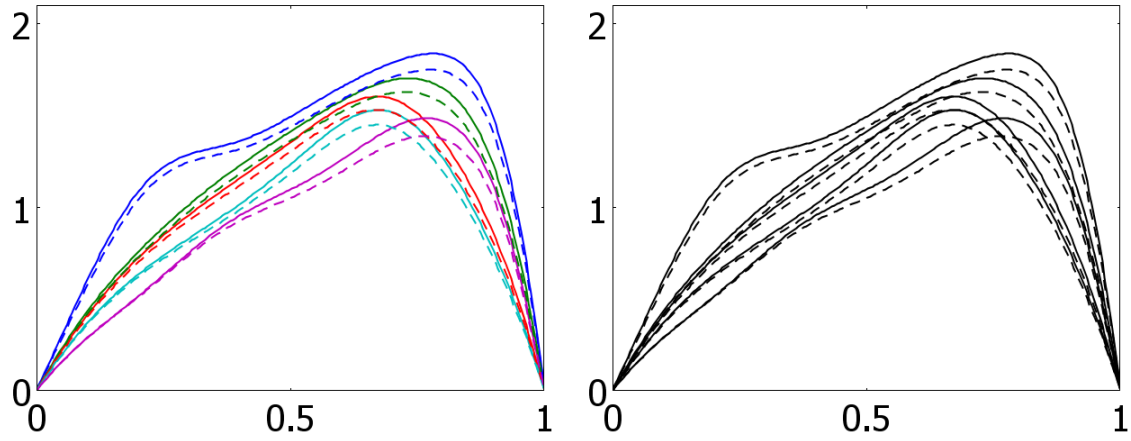
Re = 600



Re = 800

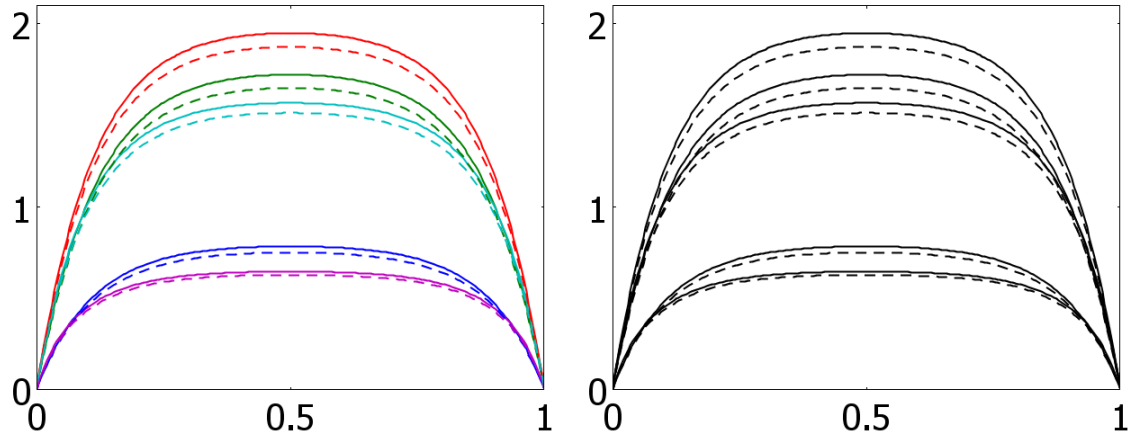


$\mathrm{Re} = 1000$

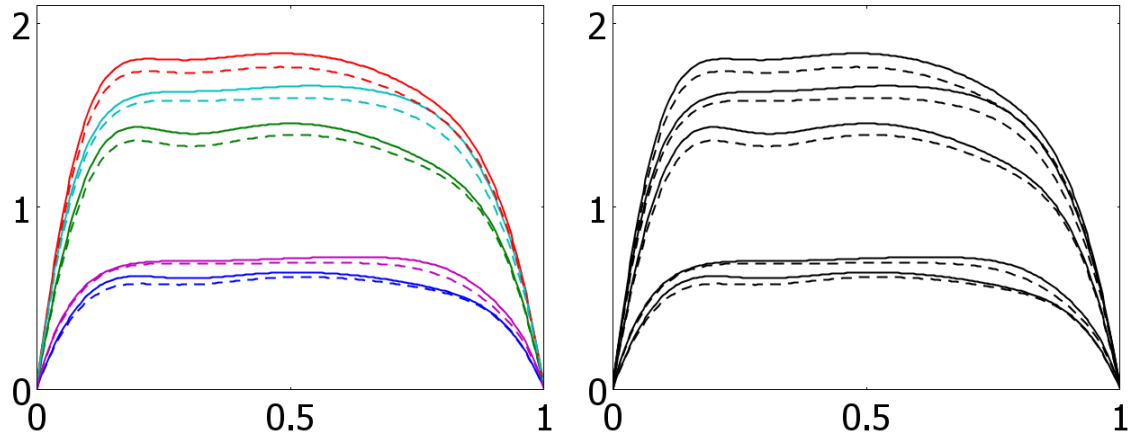


$\mathrm{Re} = 1500$

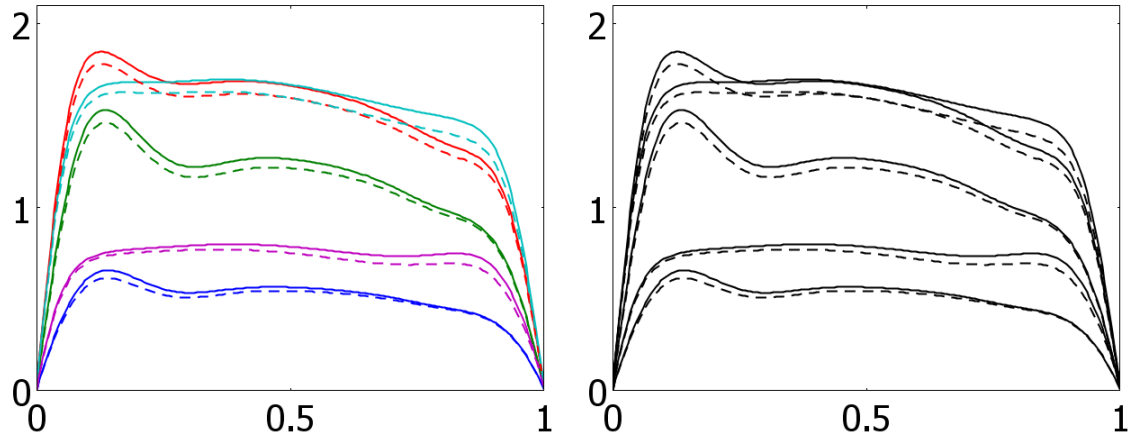
Профили окружной разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



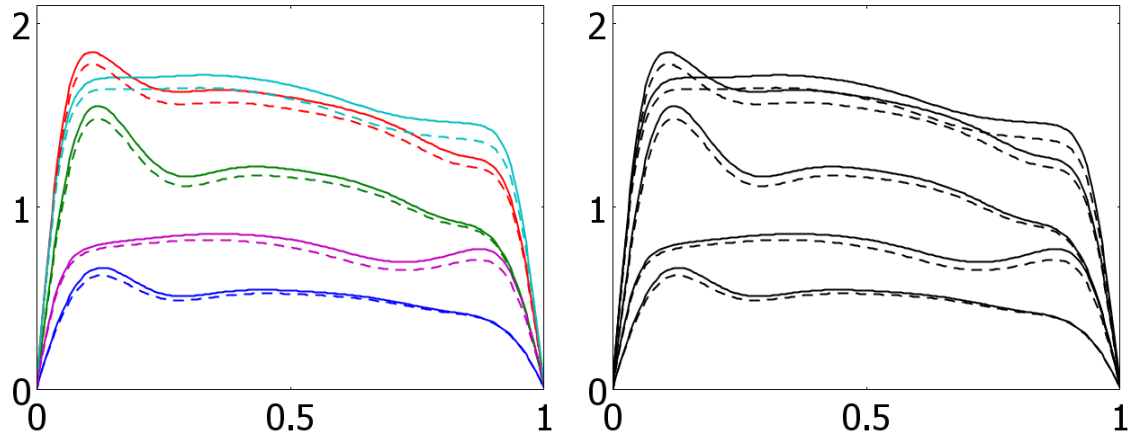
$\mathrm{Re} \to 0$



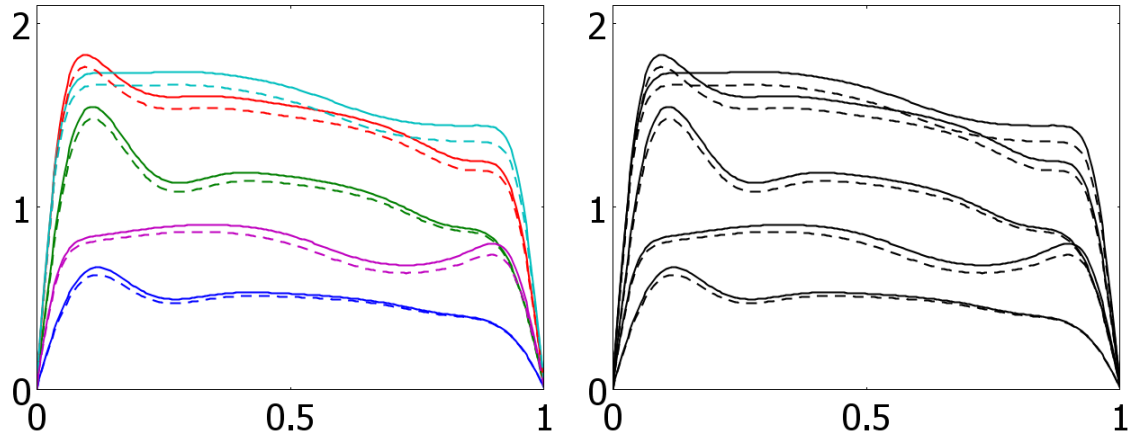
Re = 200



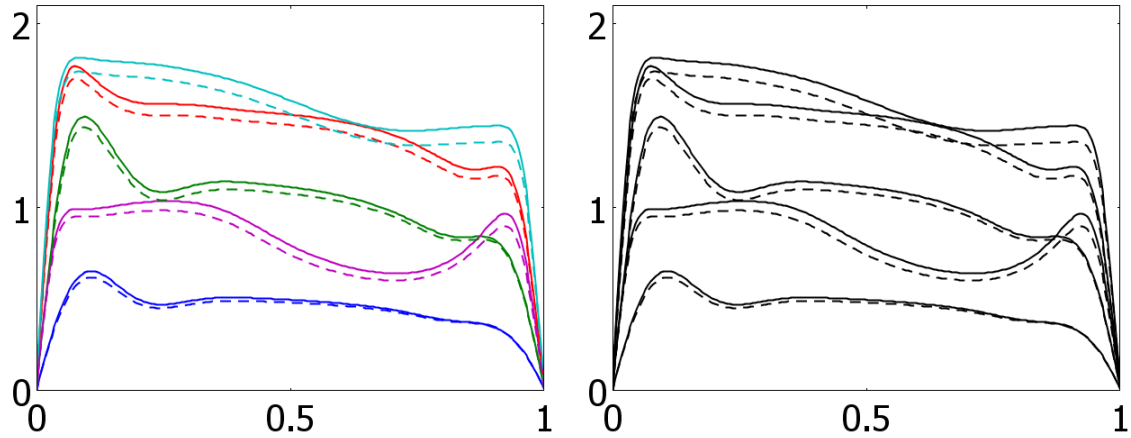
Re = 400



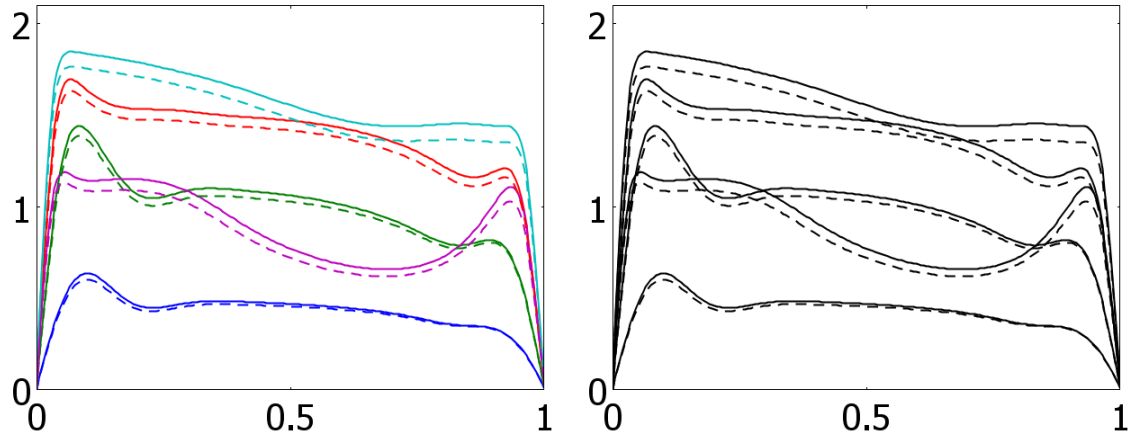
Re = 500



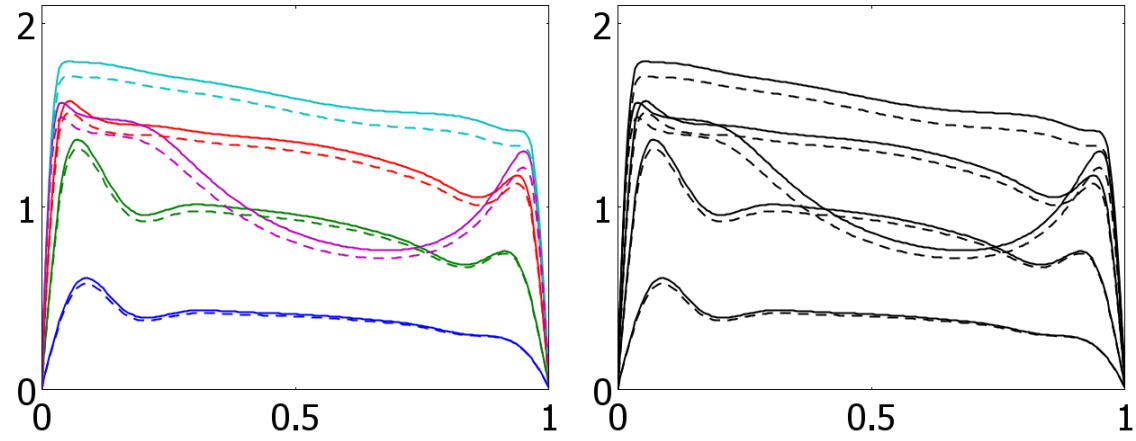
Re = 600



Re = 800

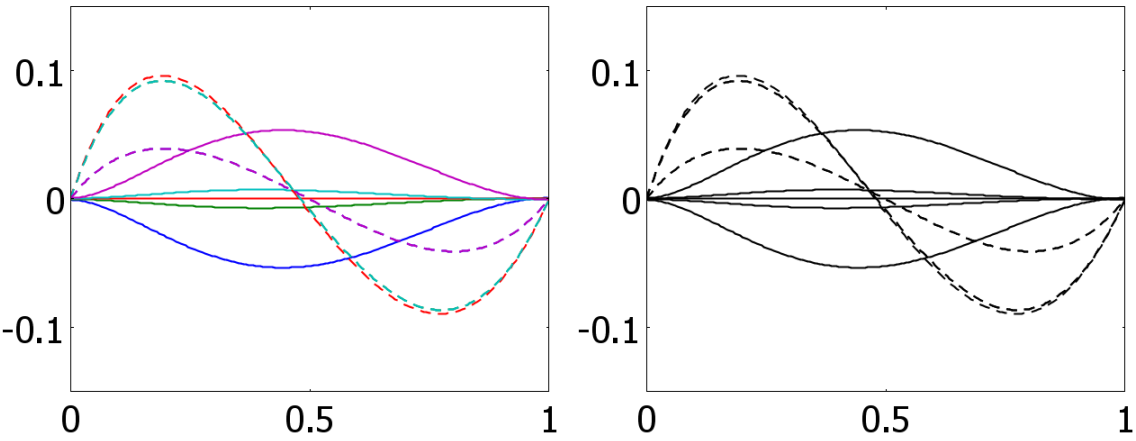


Re = 1000

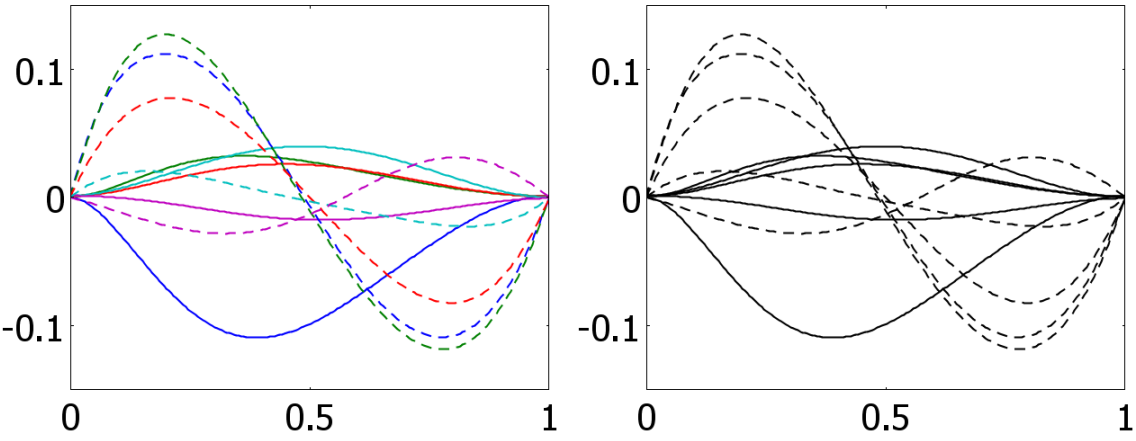


$\mathrm{Re} = 1500$

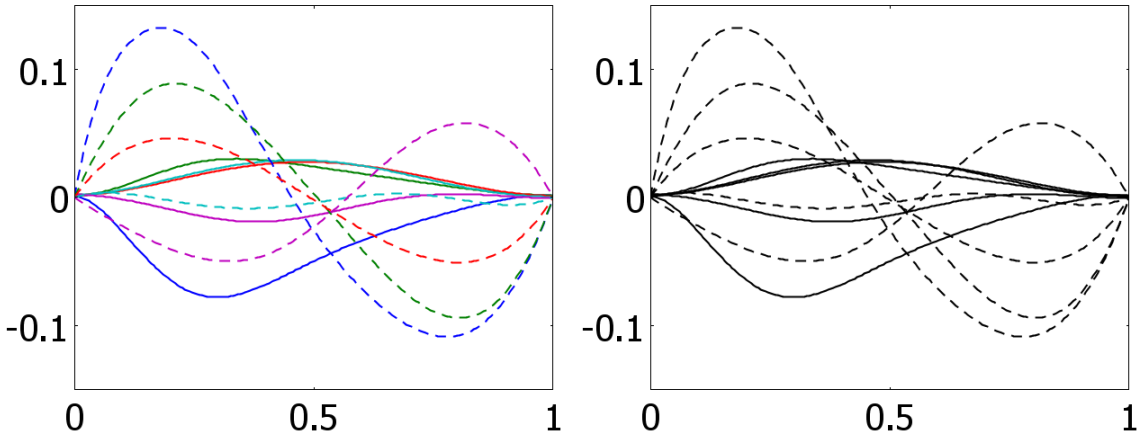
Профили радиальный разрез контравариантных компонент w1 и w2



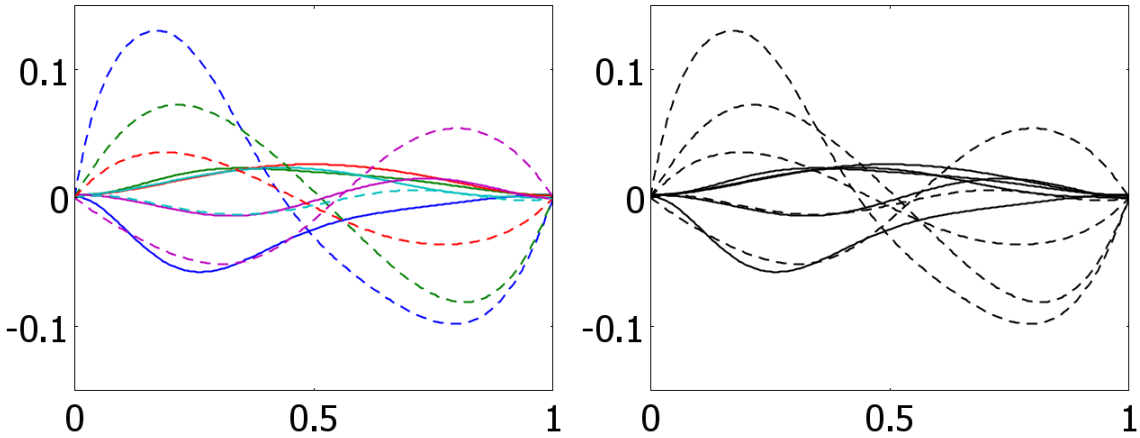
$\mathrm{Re} \to 0$



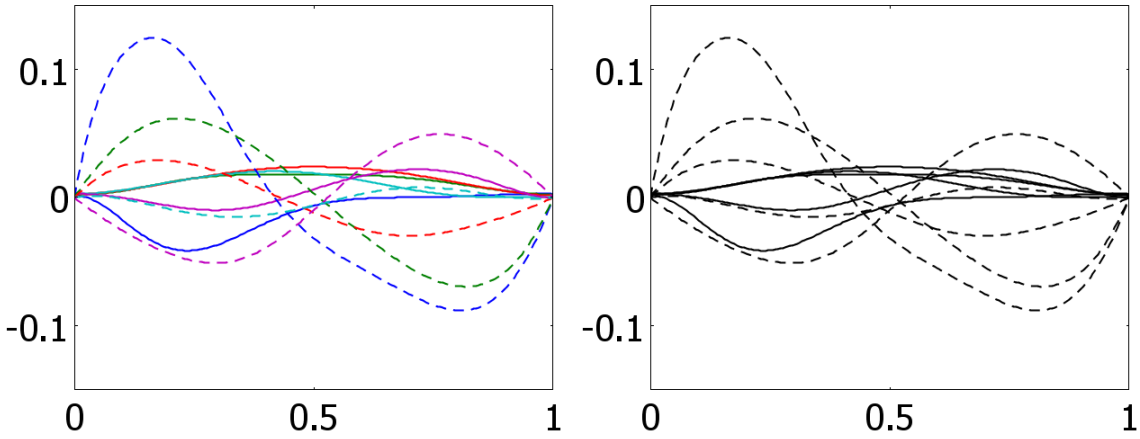
$\mathrm{Re} = 200$



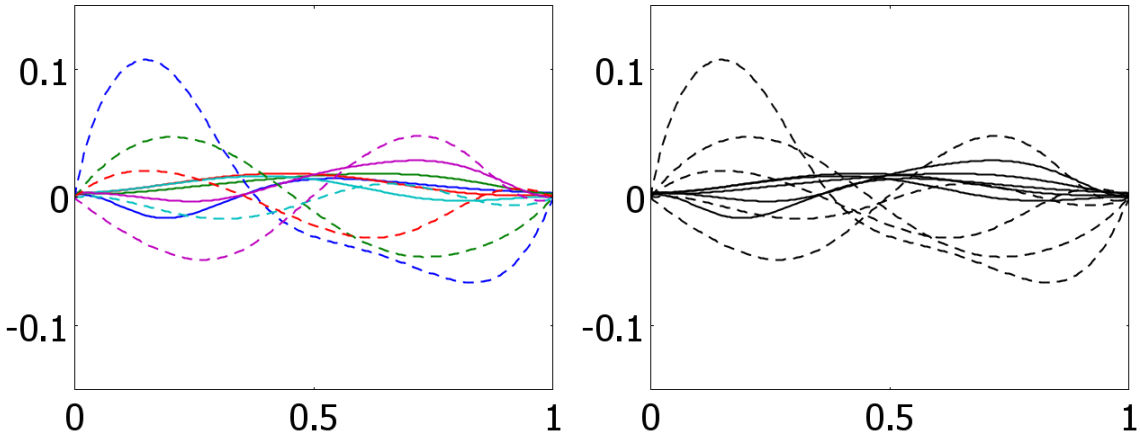
Re = 400



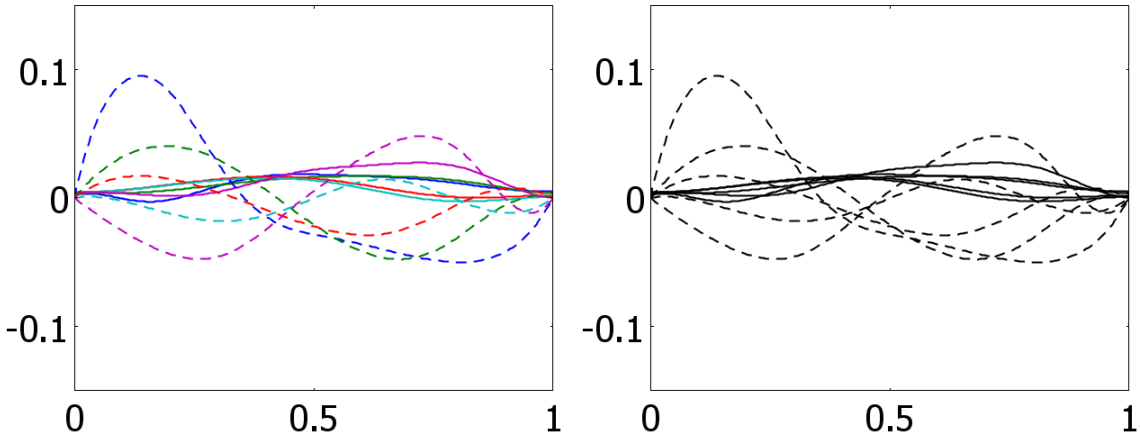
Re = 500



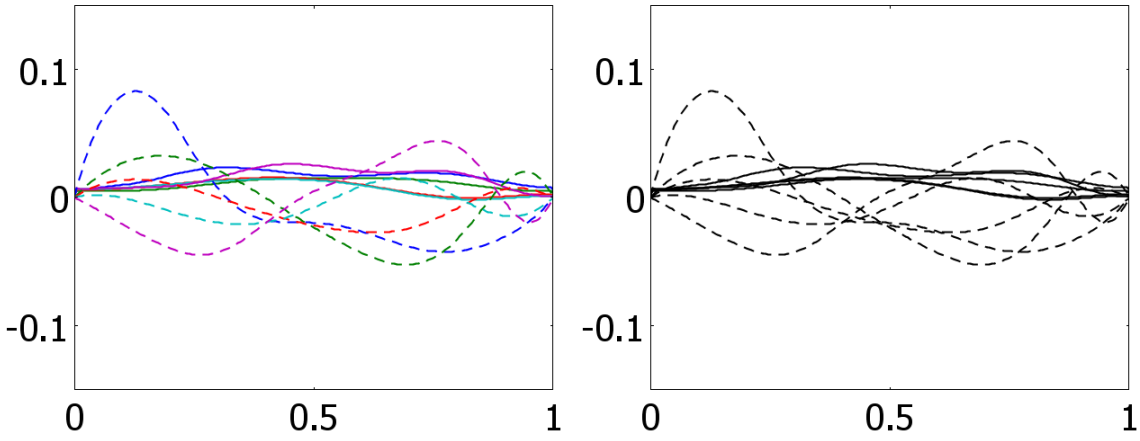
Re = 600



Re = 800

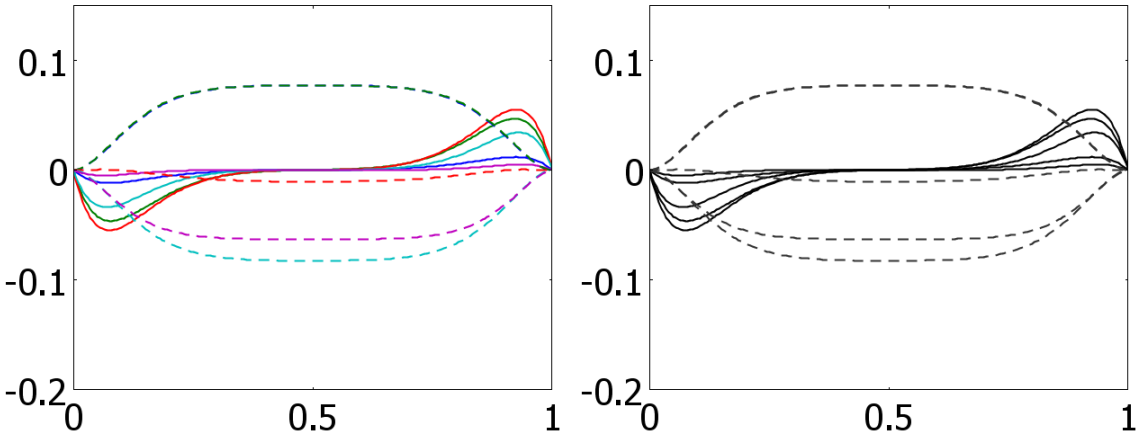


Re = 1000

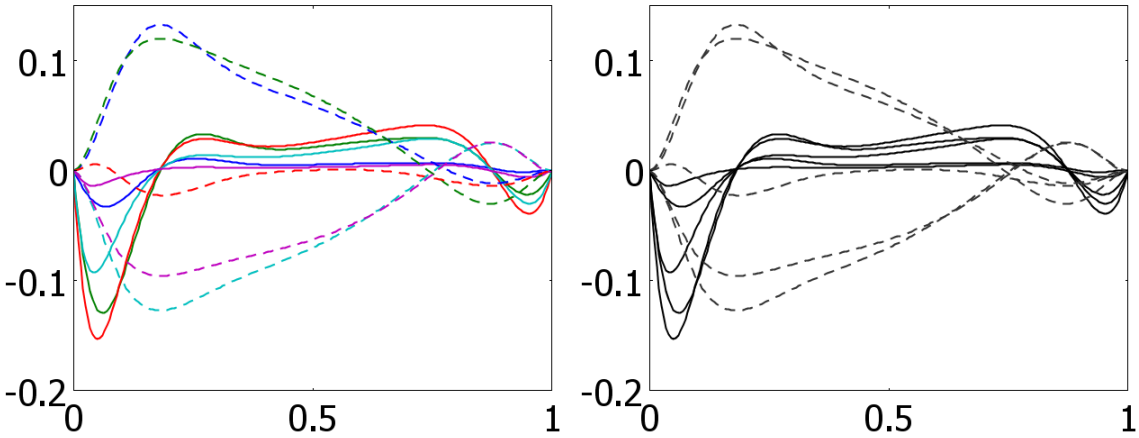


Re = 1500

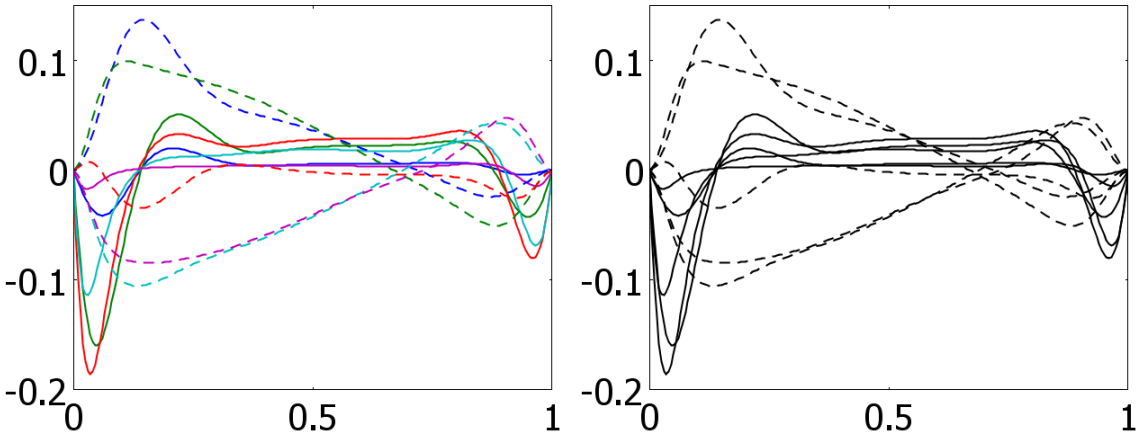
Профили окружной разрез контравариантных компонент w1 и w2



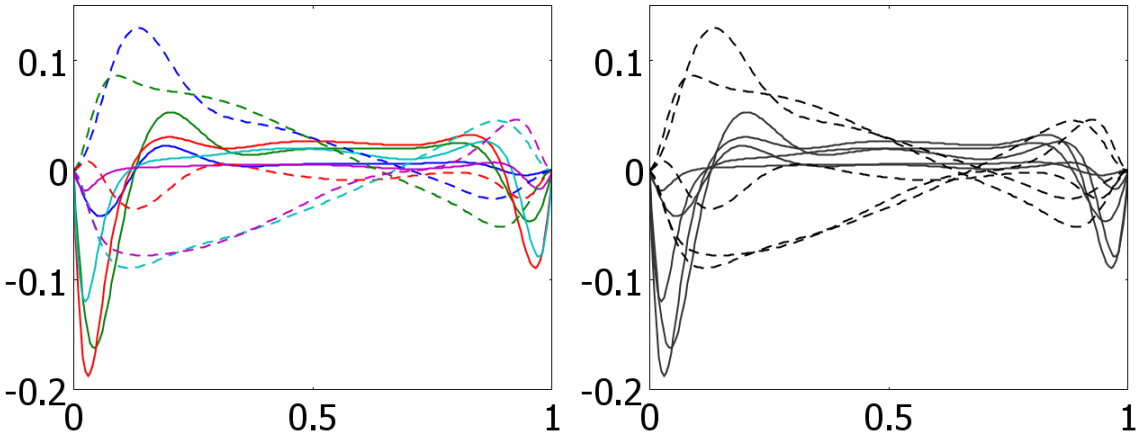
$\mathrm{Re} \to 0$



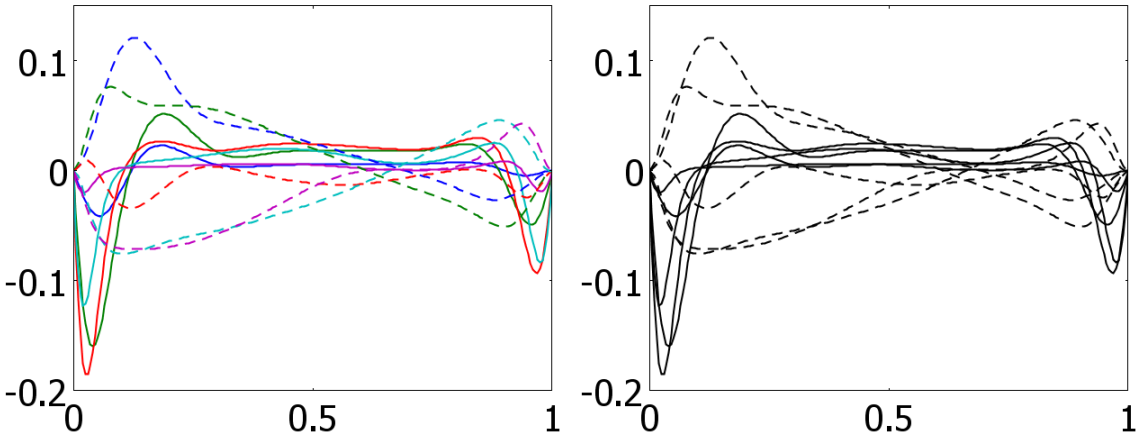
$\mathrm{Re} = 200$



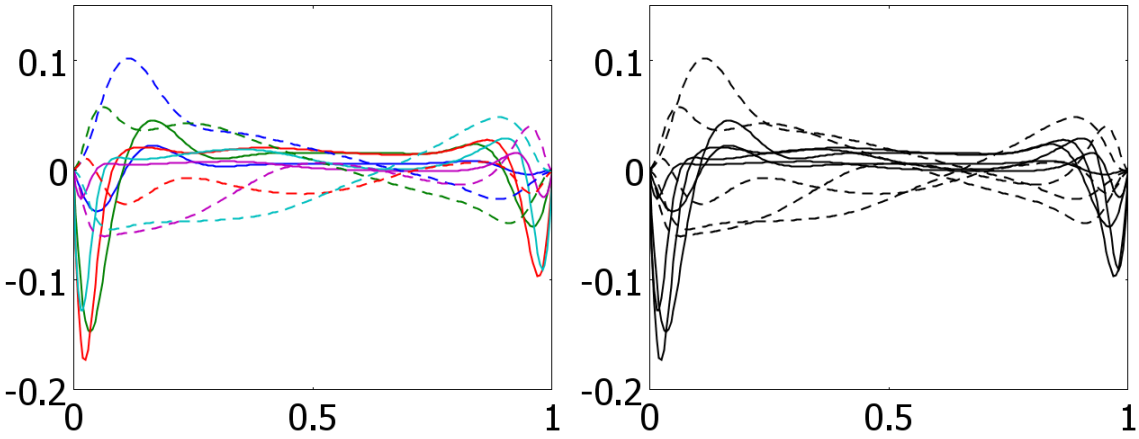
$\mathrm{Re} = 400$



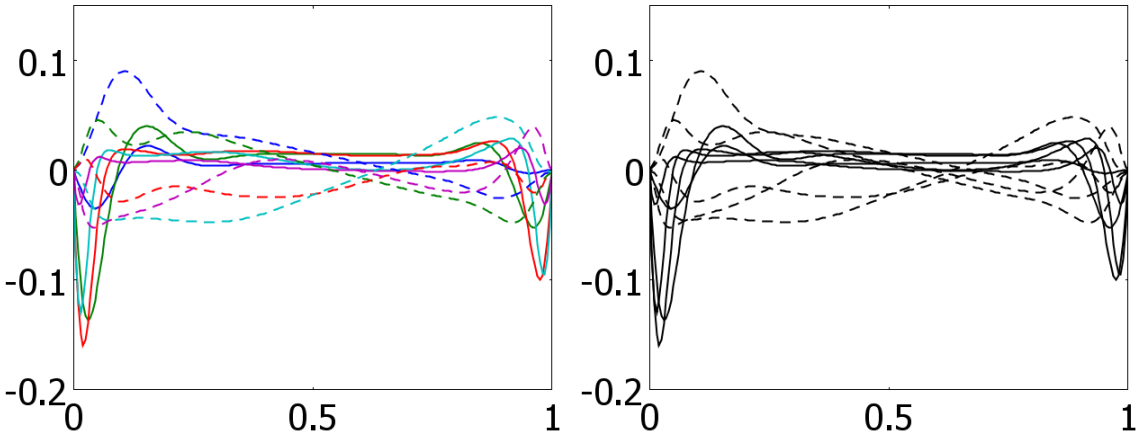
Re = 500



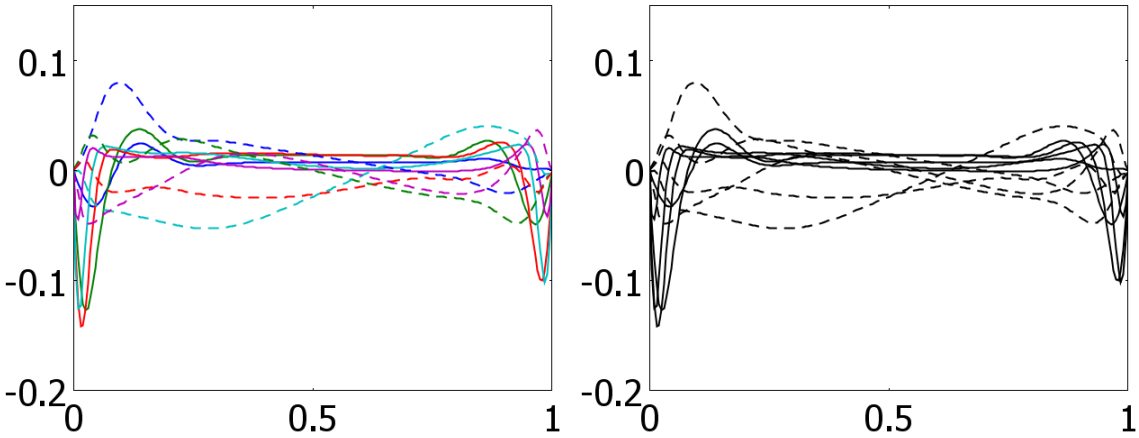
Re = 600



Re = 800



Re = 1000



Re = 1500

S=20R=10D

Линии уровня Ковариантная компонента u3

$\mathrm{Re} \to 0$

Re = 200

Re = 400

Re = 500

Re = 600

Re = 800

Re = 1000

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня радиальной компонента v1=w1

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня окружной контравариантной компоненты w2

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня давления

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

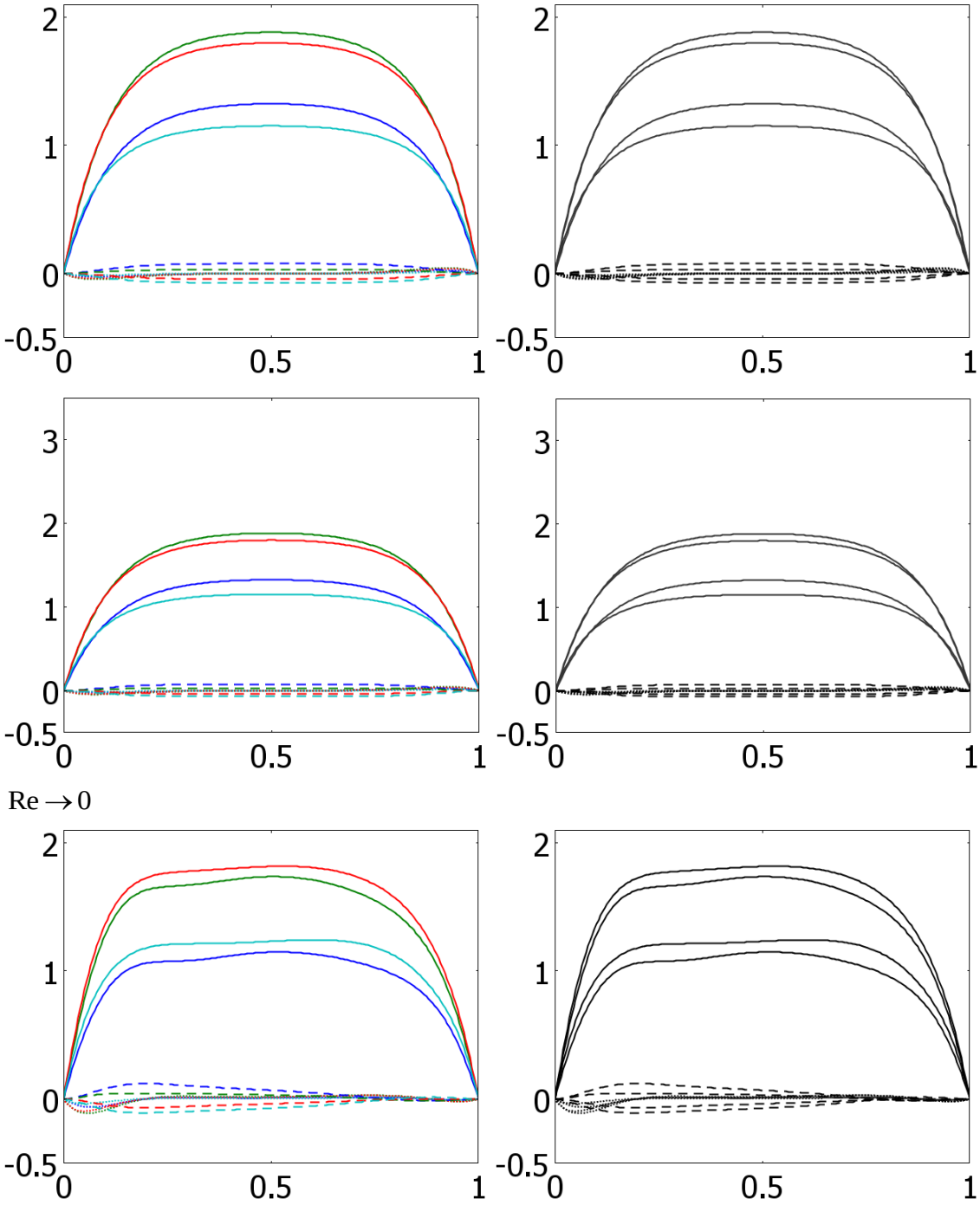
$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

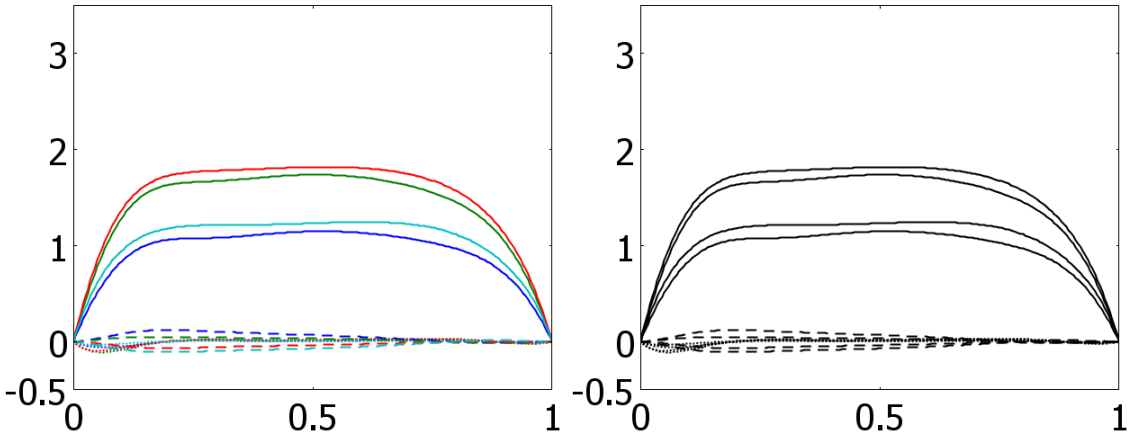
$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

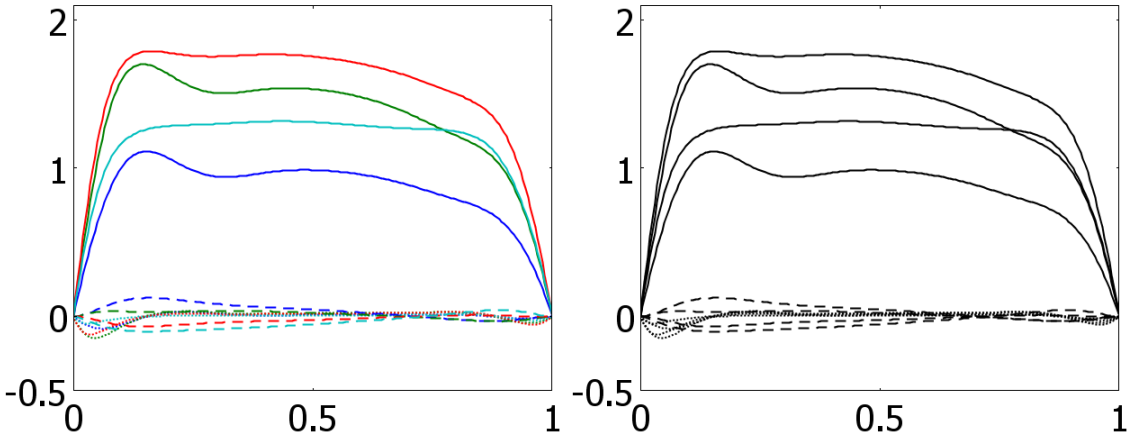
Окружные разрезы и компоненты скорости u3, w1,w2

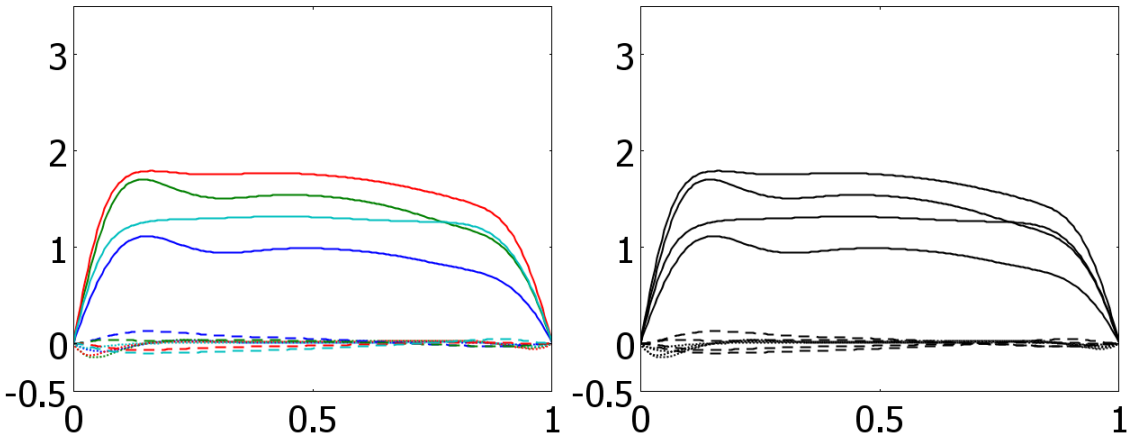


$\mathrm{Re} \to 0$

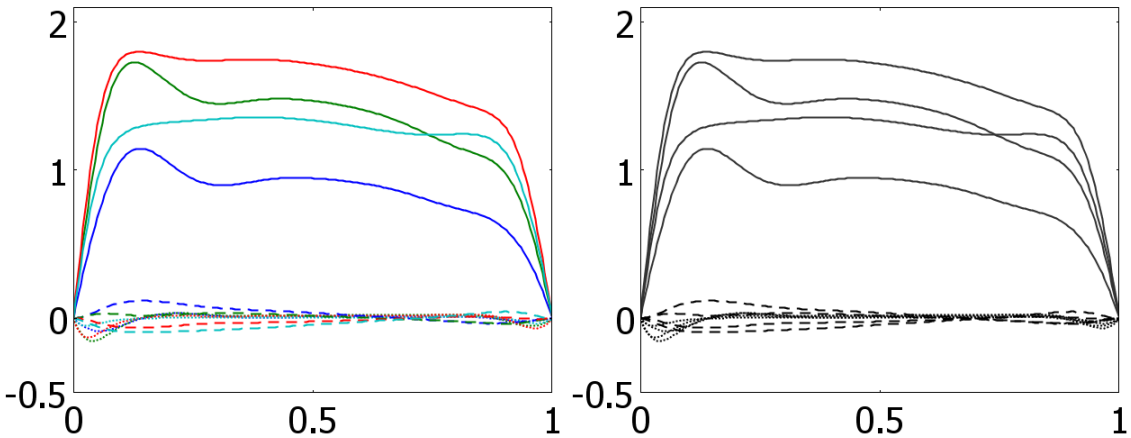


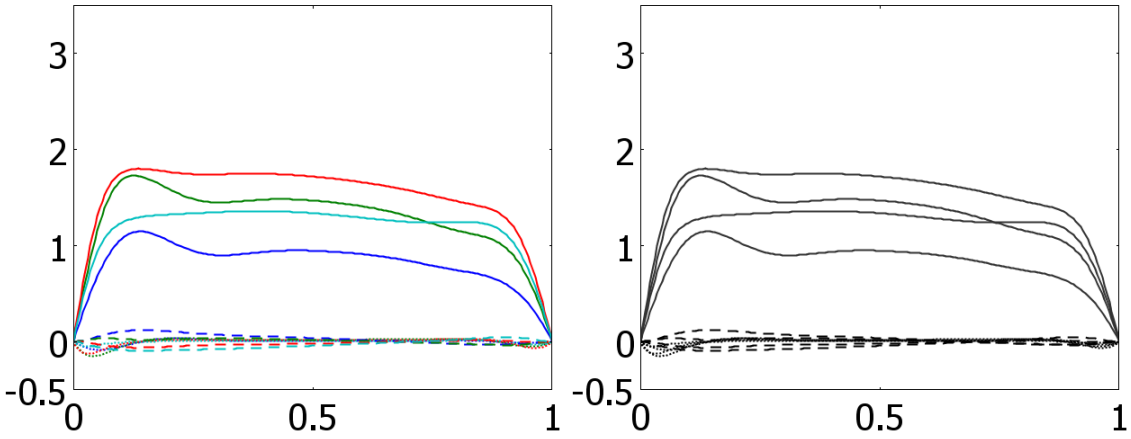
Re = 200



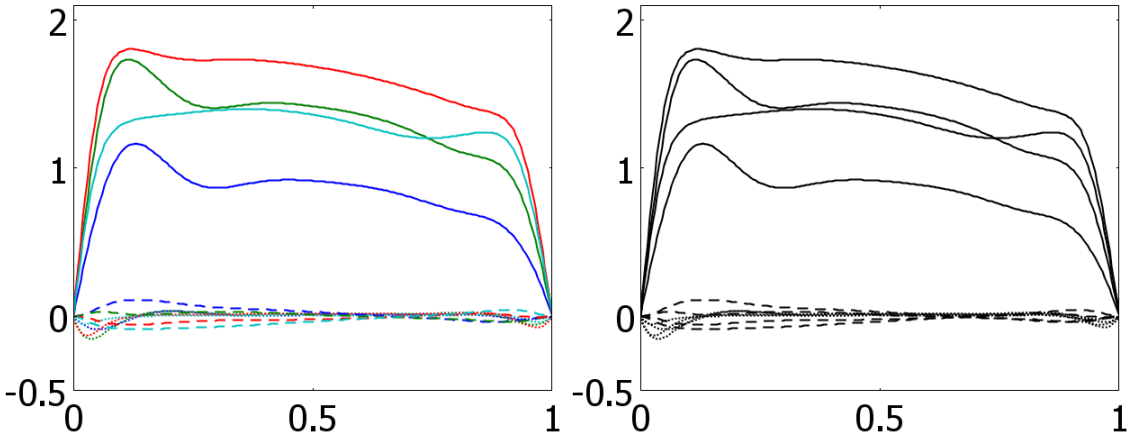


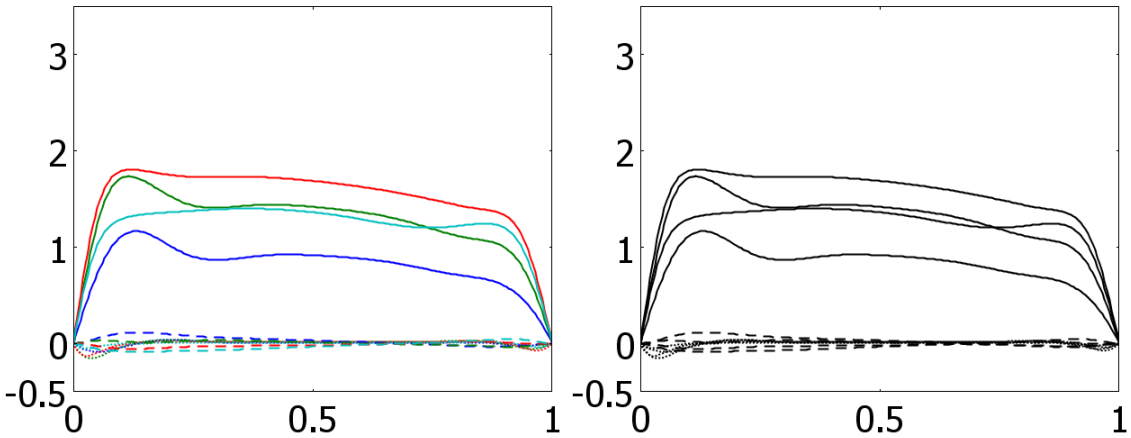
Re = 400



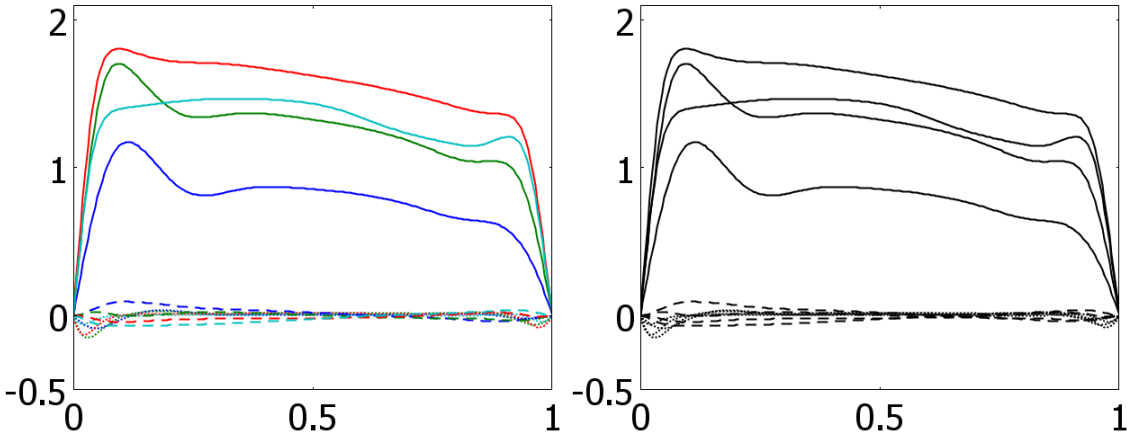


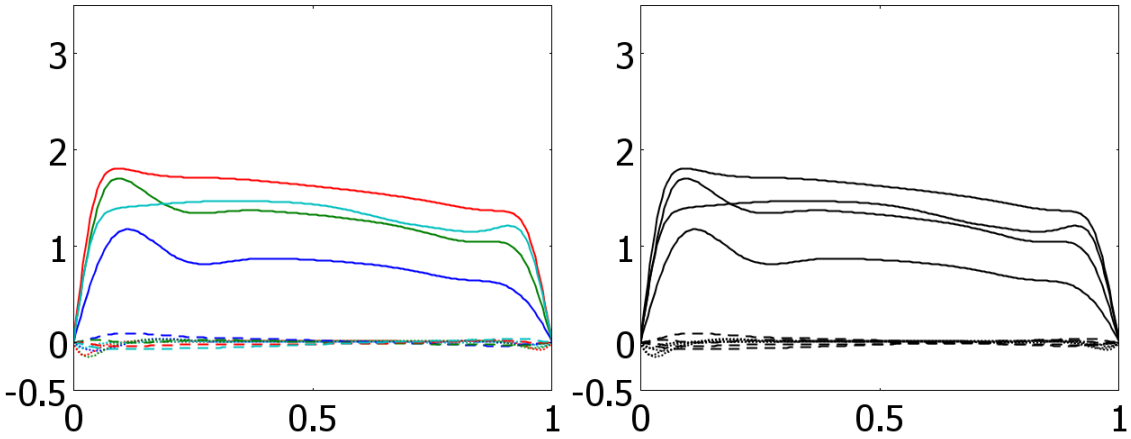
Re = 500



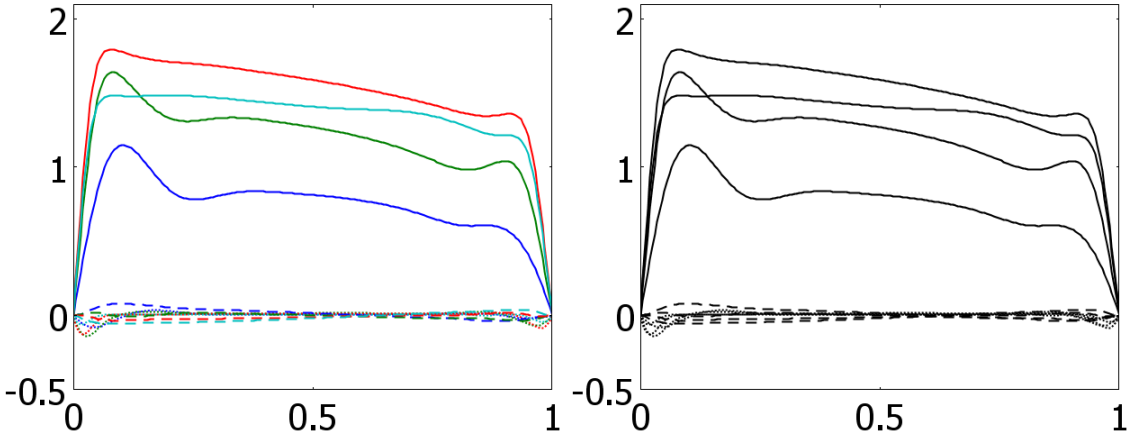


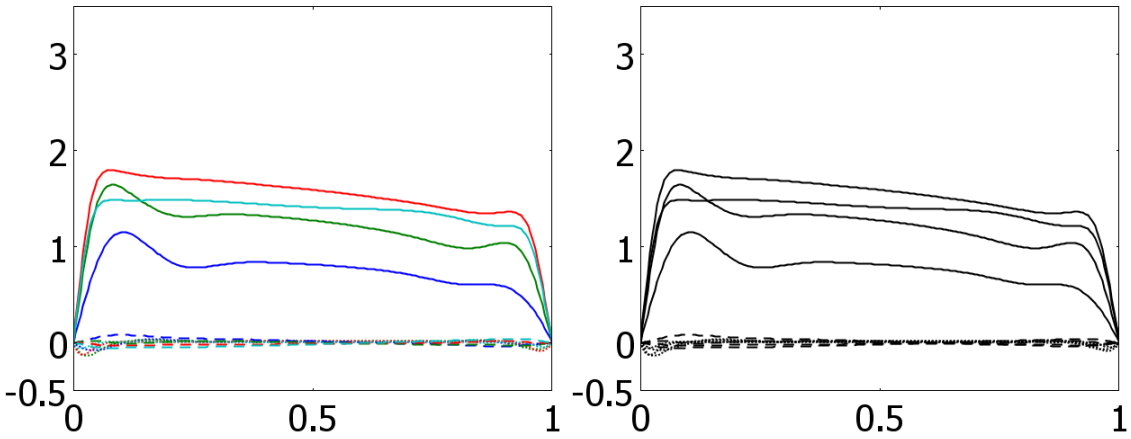
Re = 600



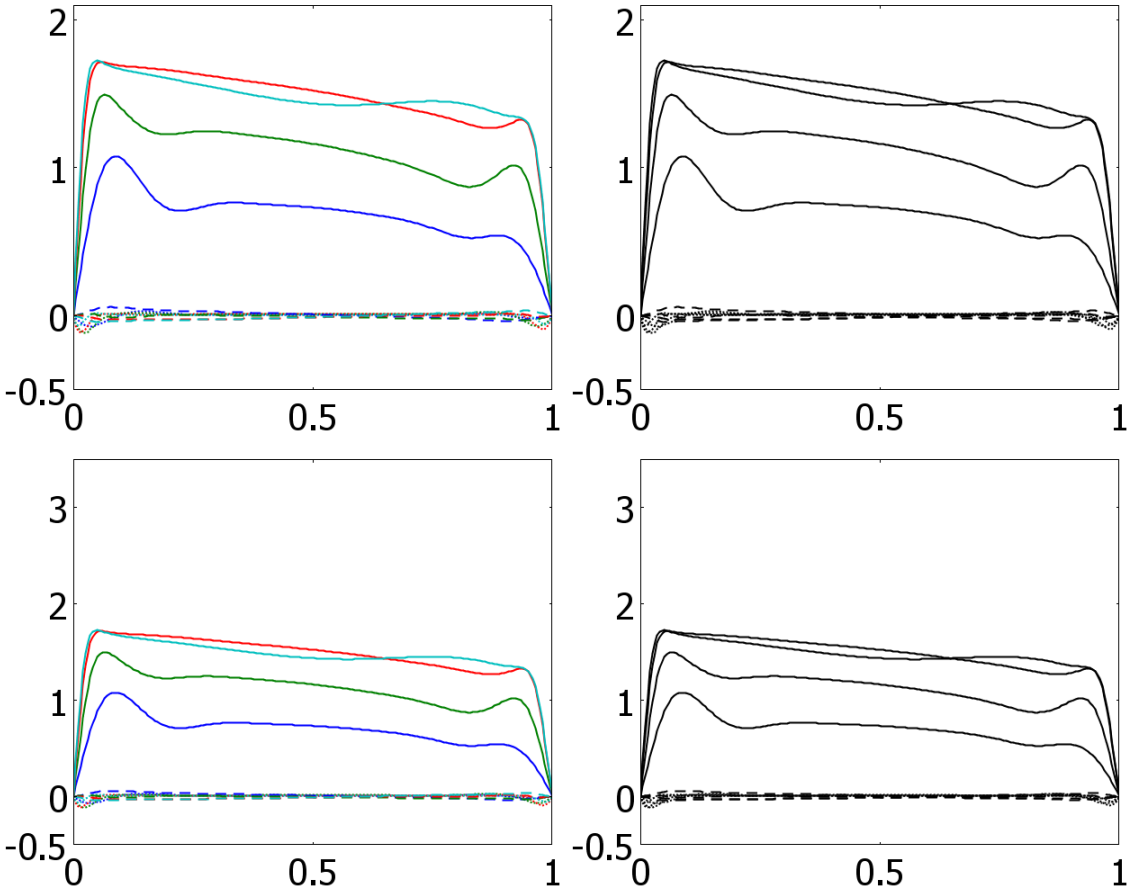


$\mathrm{Re} = 800$



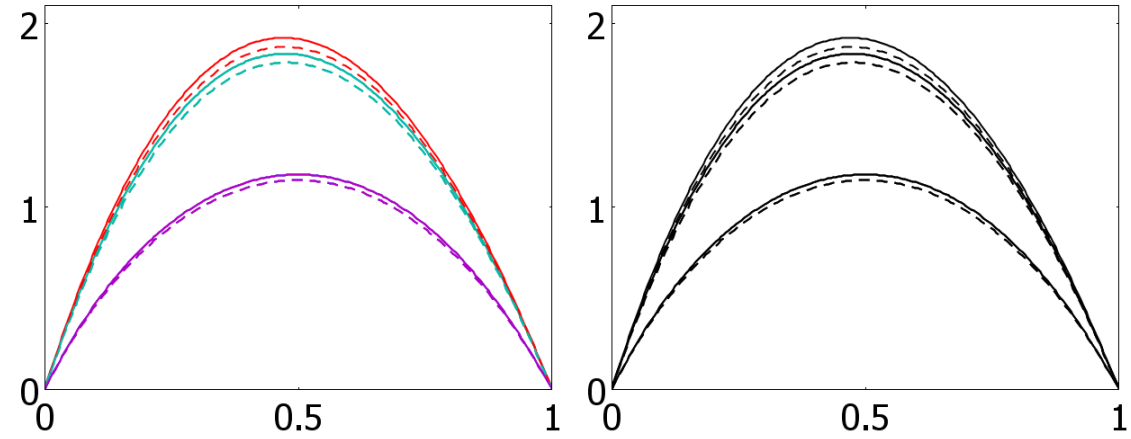


$\mathrm{Re} = 1000$

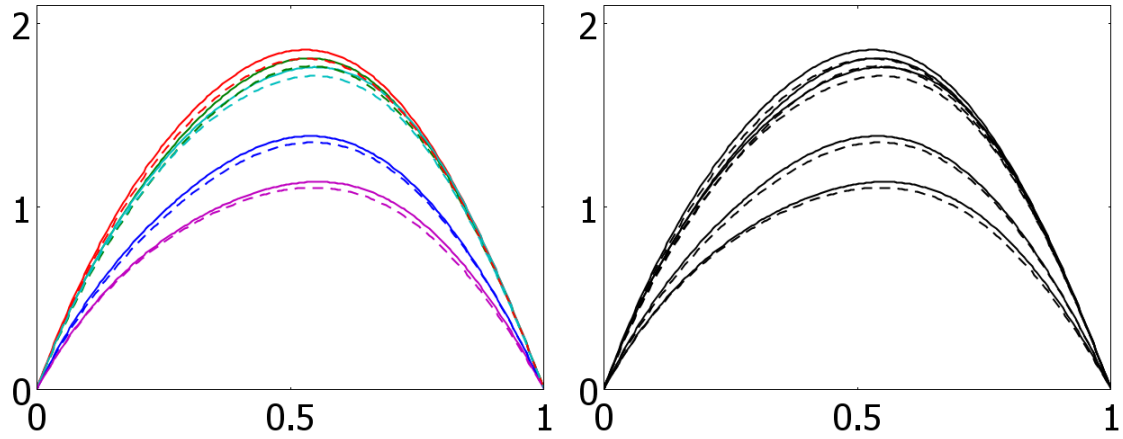


$\mathrm{Re} = 1500$

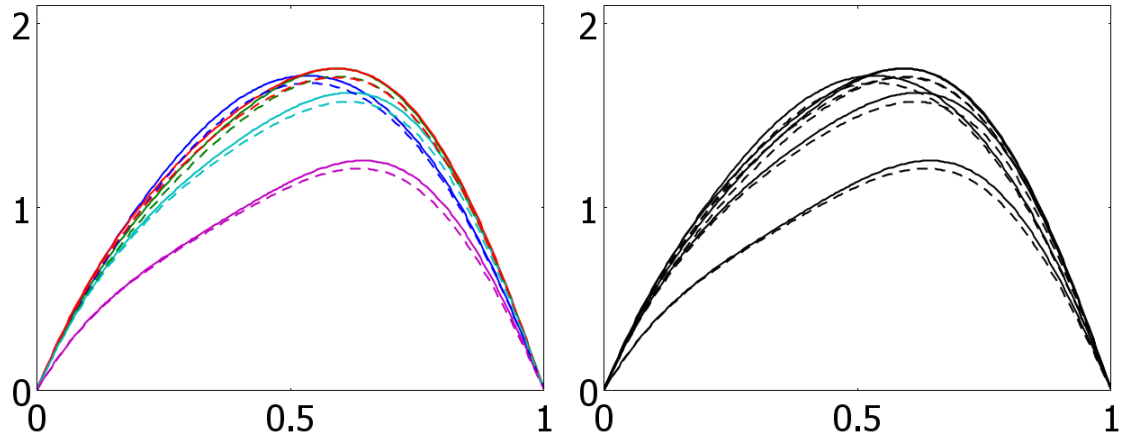
Профили радиальный разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



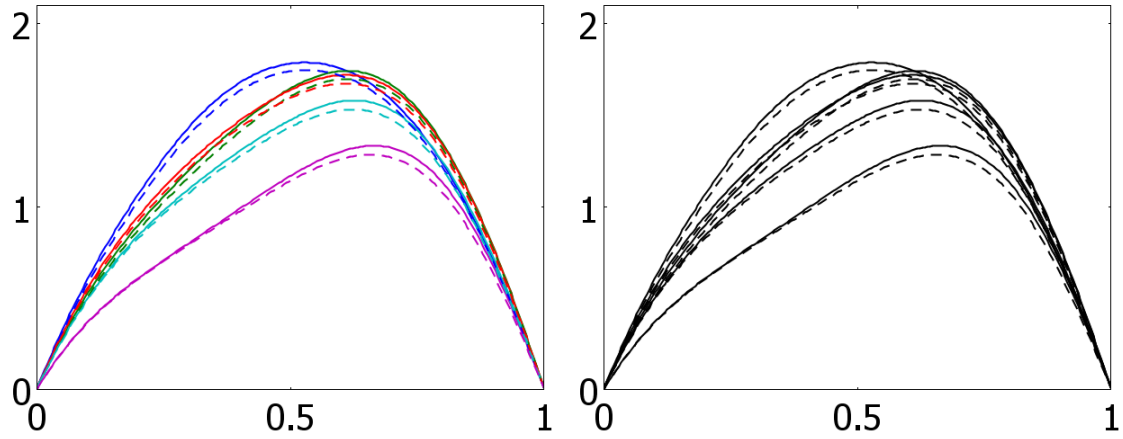
$\mathrm{Re} \to 0$



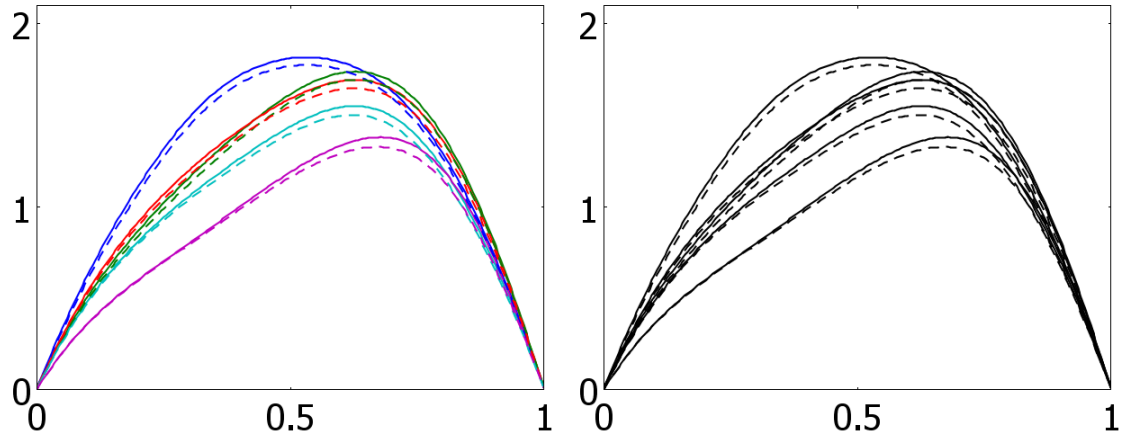
Re = 200



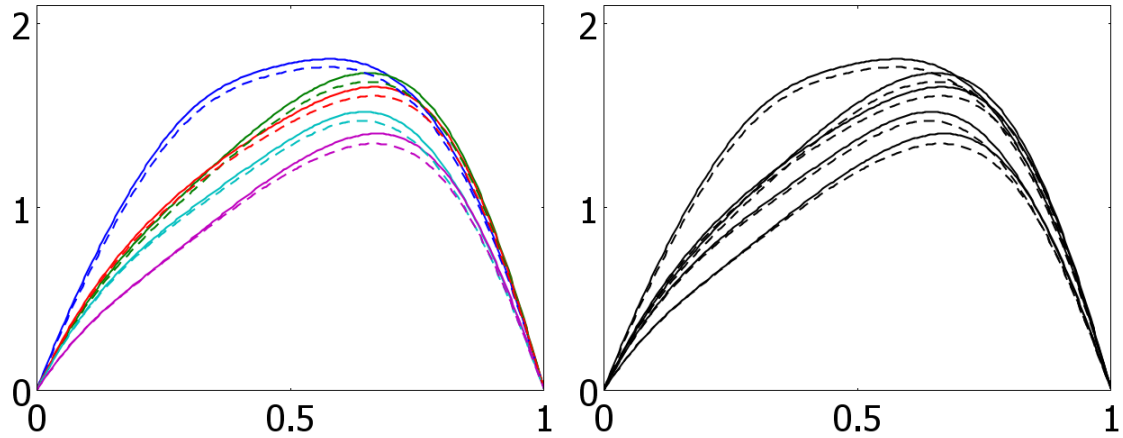
Re = 400



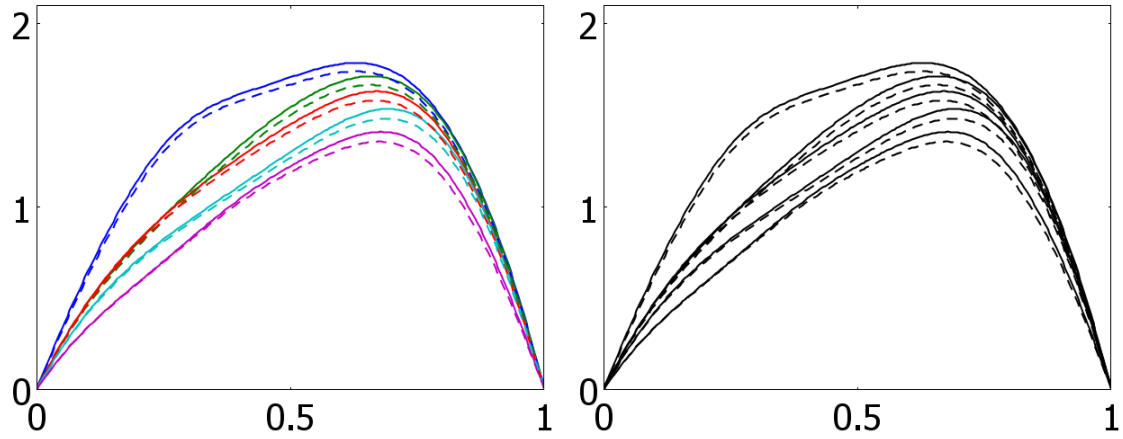
Re = 500



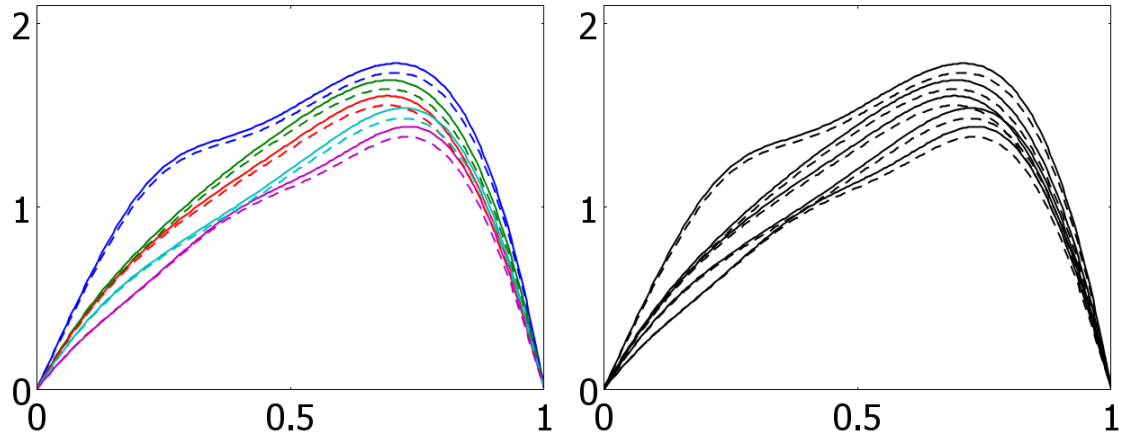
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

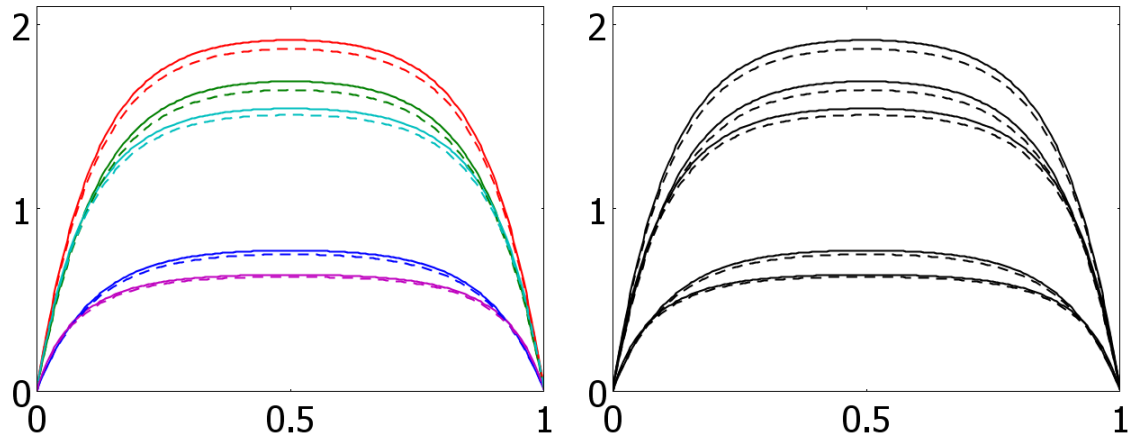


$\mathrm{Re} = 1000$

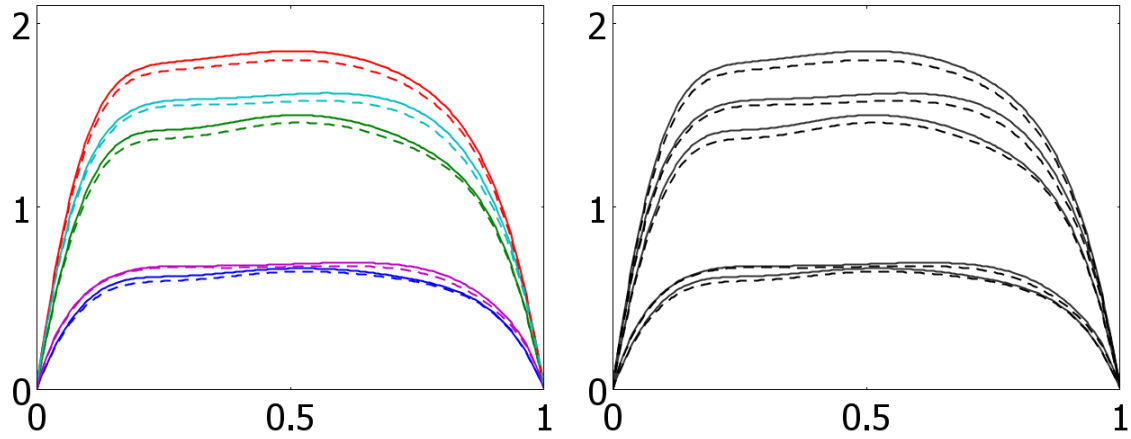


$\mathrm{Re} = 1500$

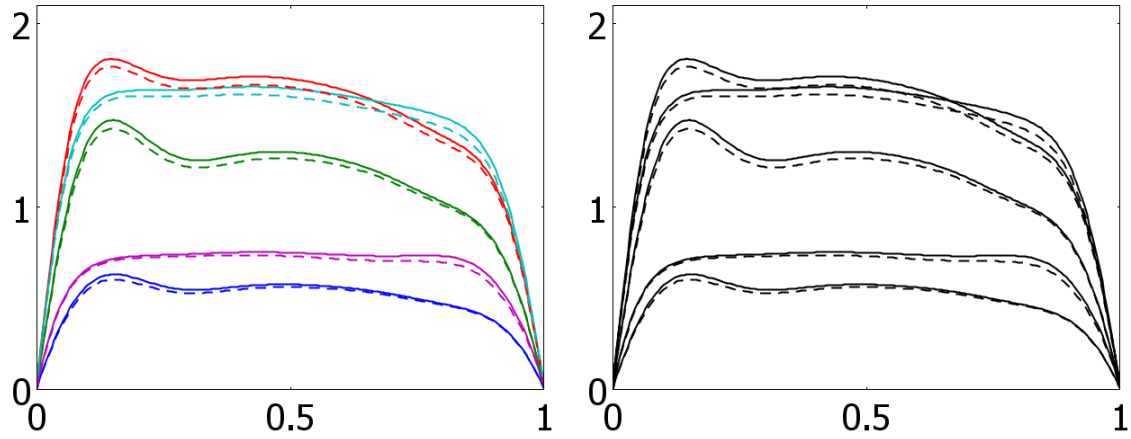
Профили окружной разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



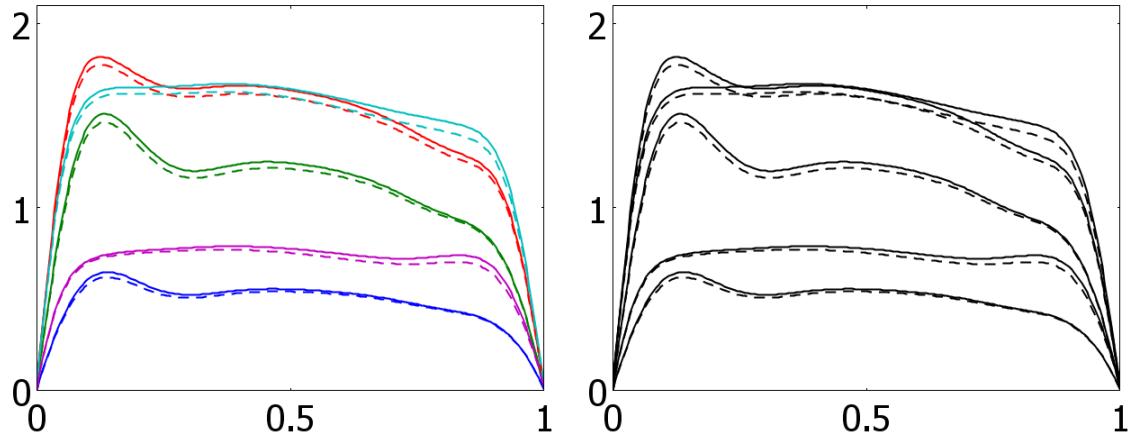
$\mathrm{Re} \to 0$



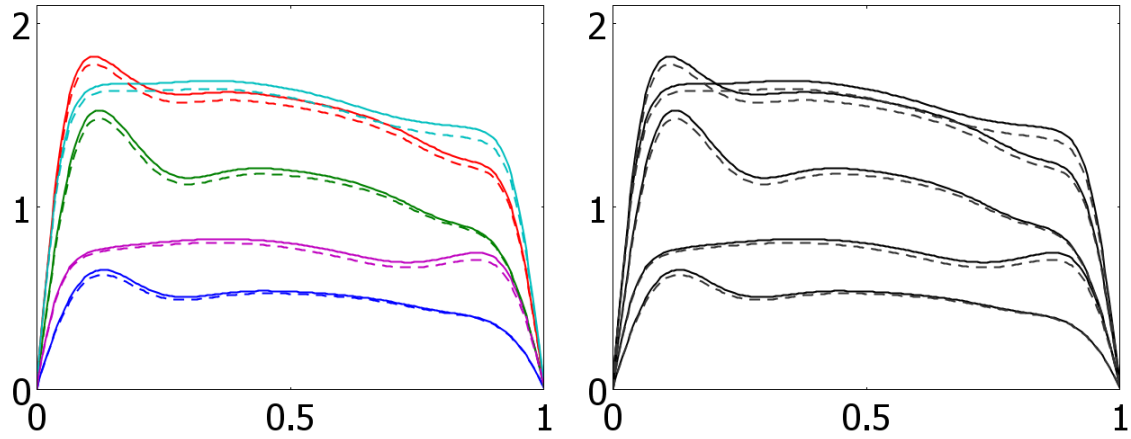
$\mathrm{Re} = 200$



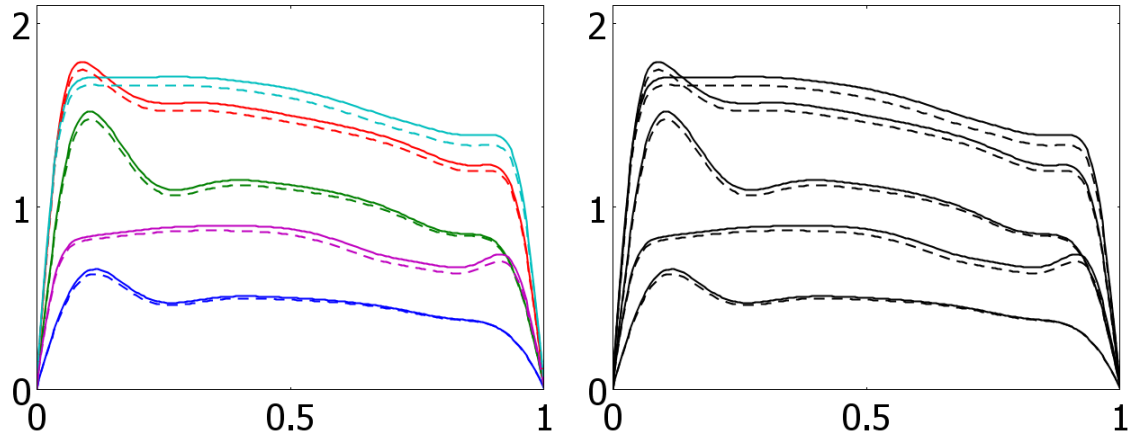
Re = 400



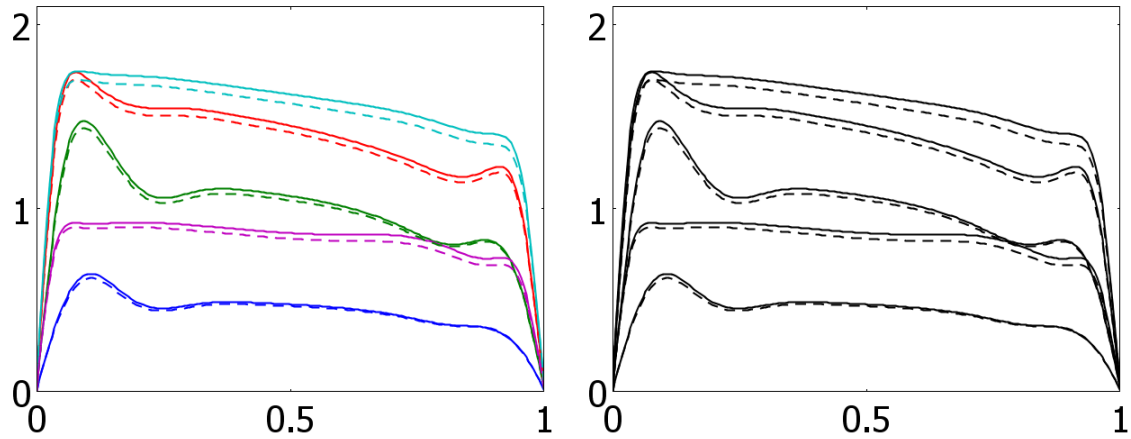
Re = 500



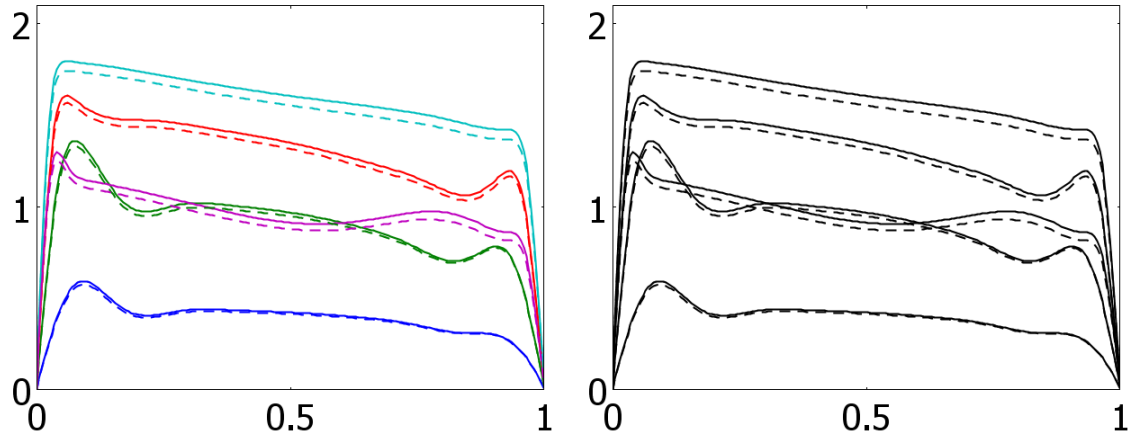
Re = 600



Re = 800

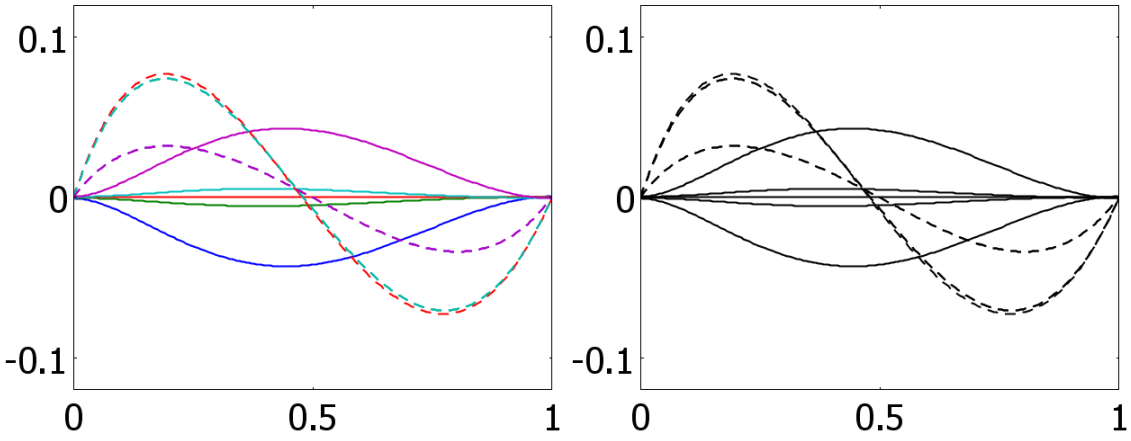


Re = 1000

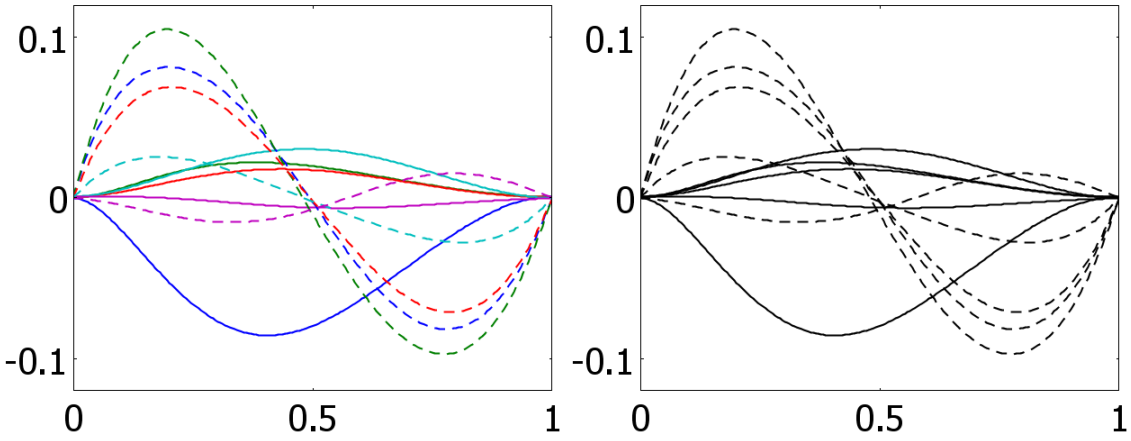


Re = 1500

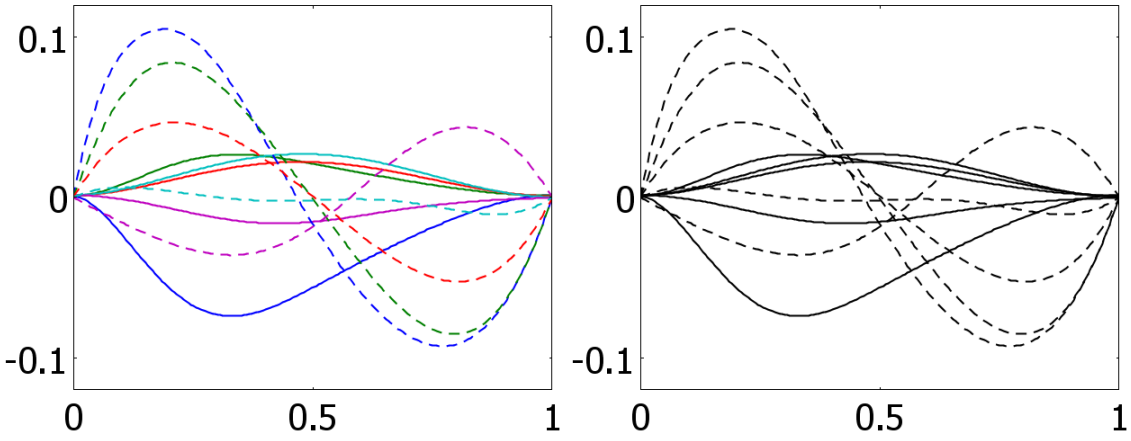
Профили радиальный разрез контравариантных компонент w1 и w2



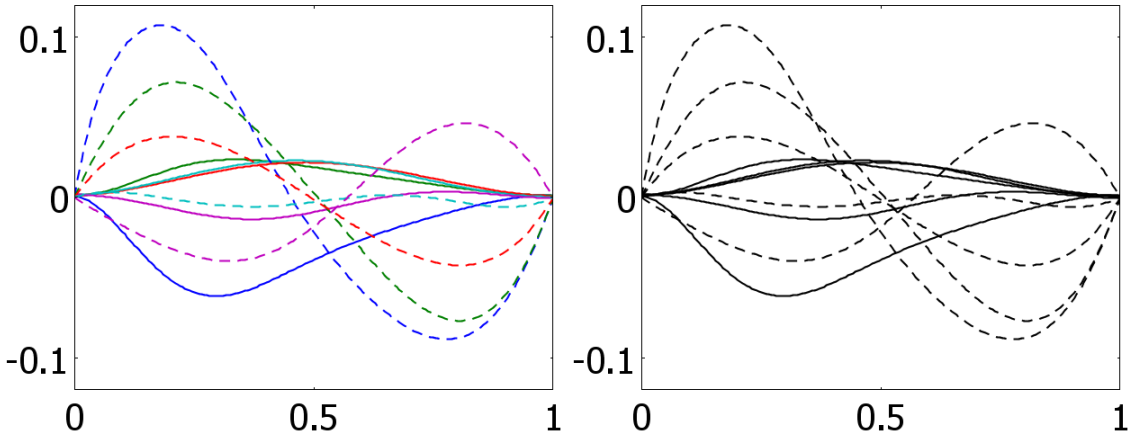
$\mathrm{Re} \to 0$



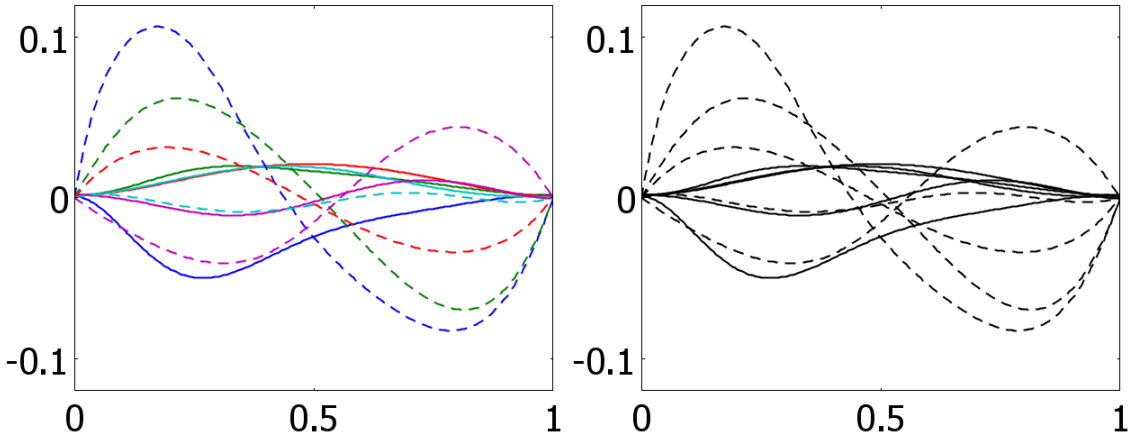
$\mathrm{Re} = 200$



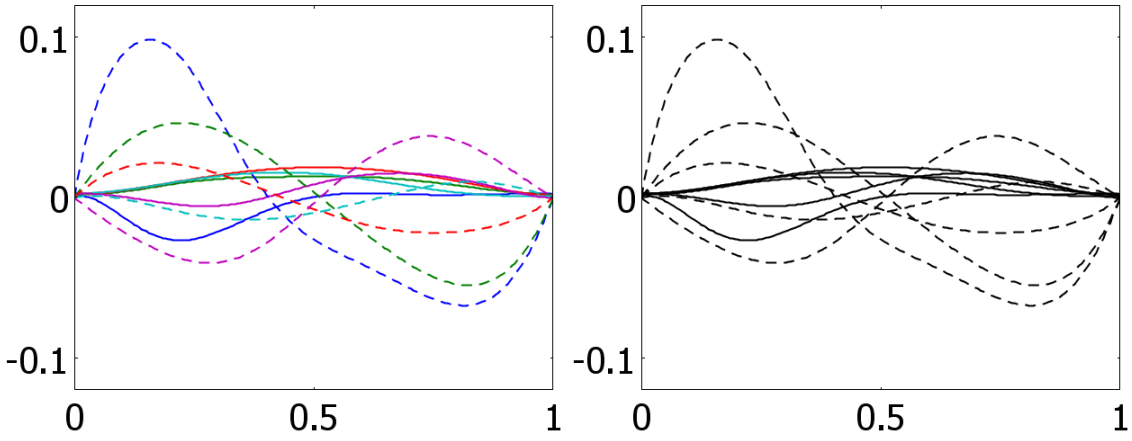
$\mathrm{Re} = 400$



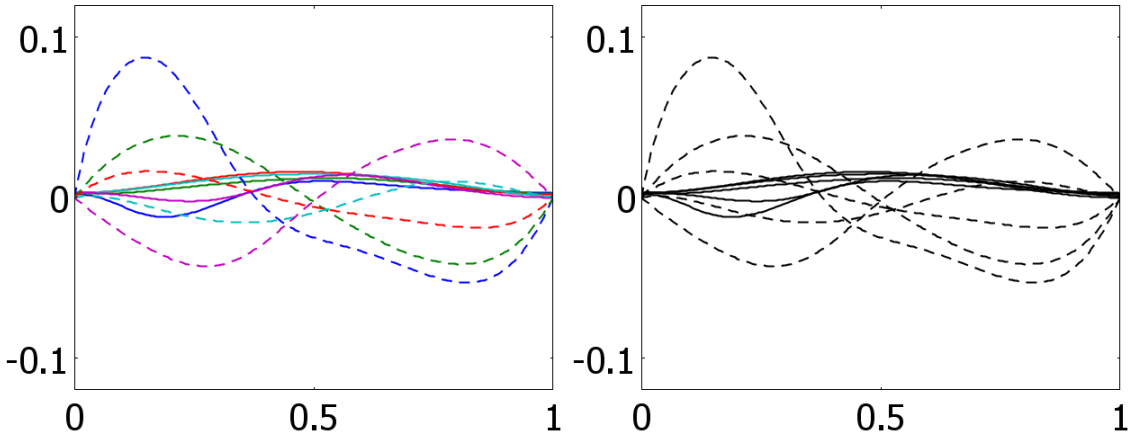
$\mathrm{Re} = 500$



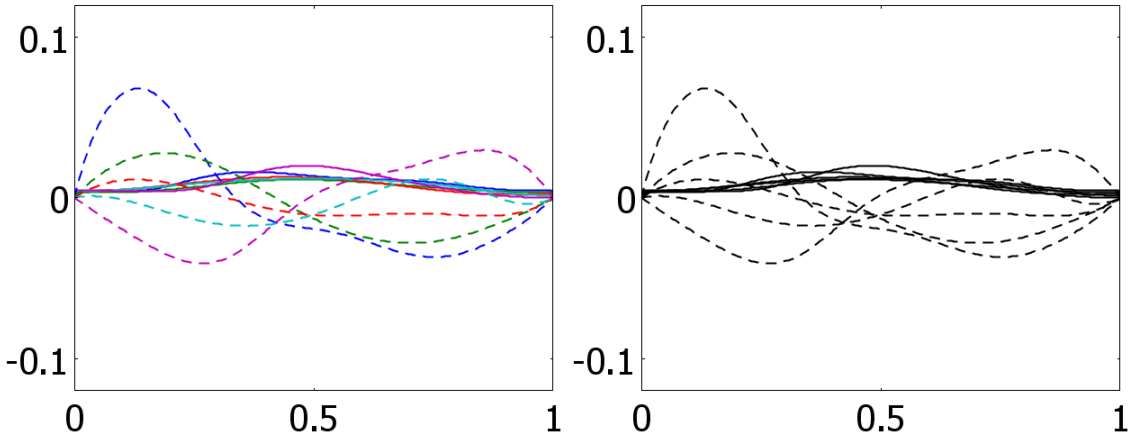
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

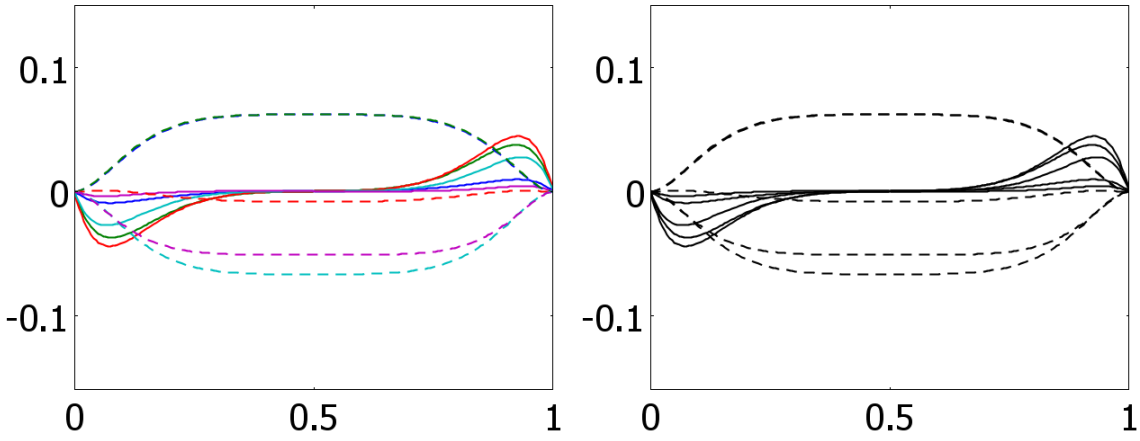


$\mathrm{Re} = 1000$

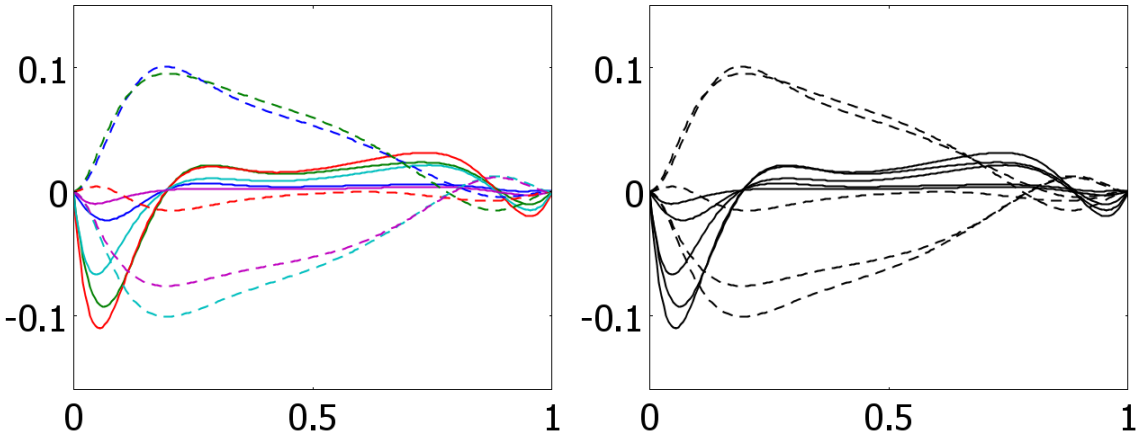


$\mathrm{Re} = 1500$

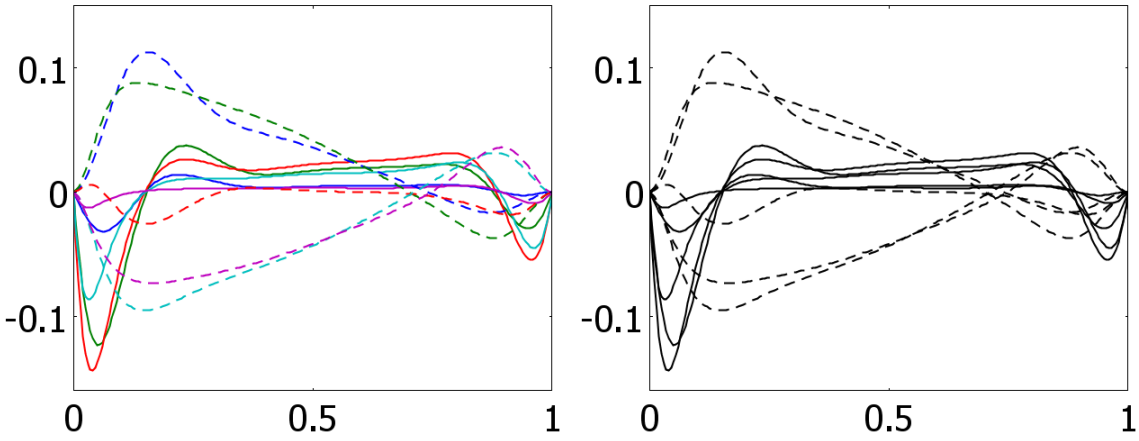
Профили окружной разрез контравариантных компонент w1 и w2



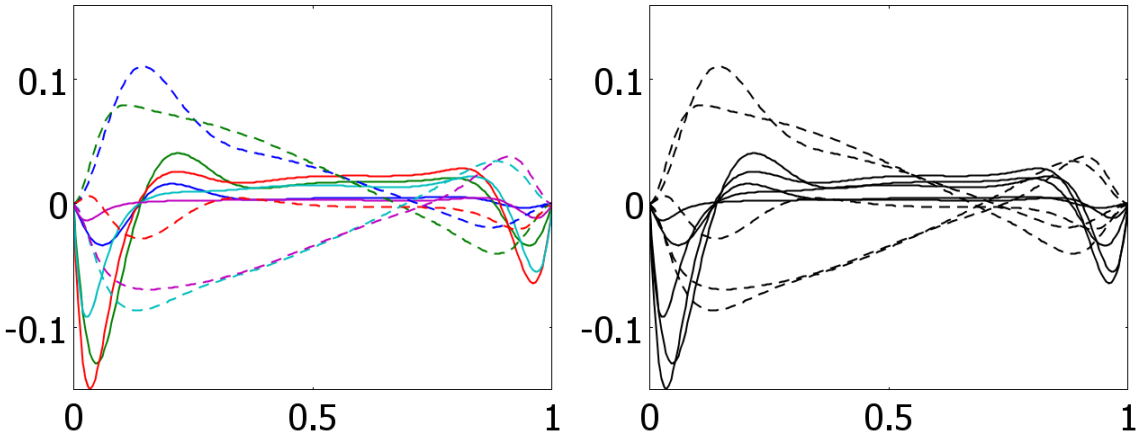
$\mathrm{Re} \to 0$



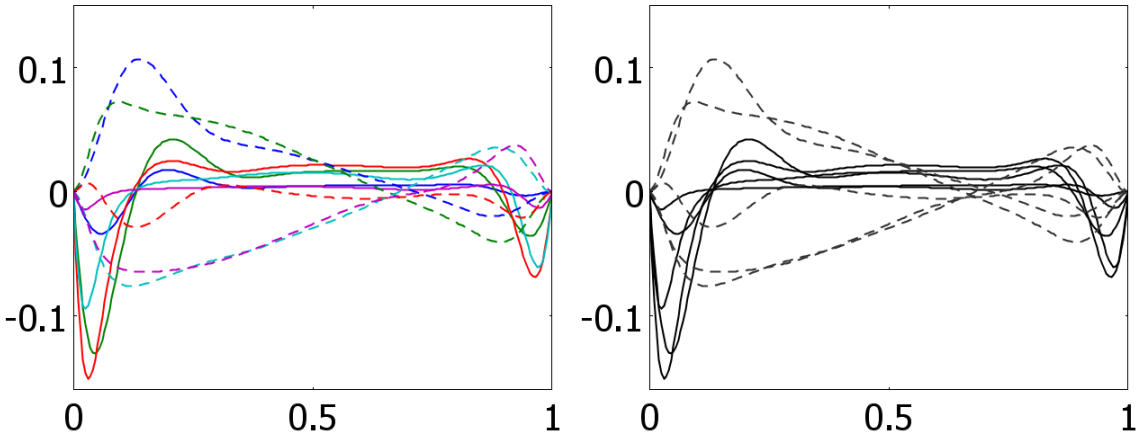
Re = 200



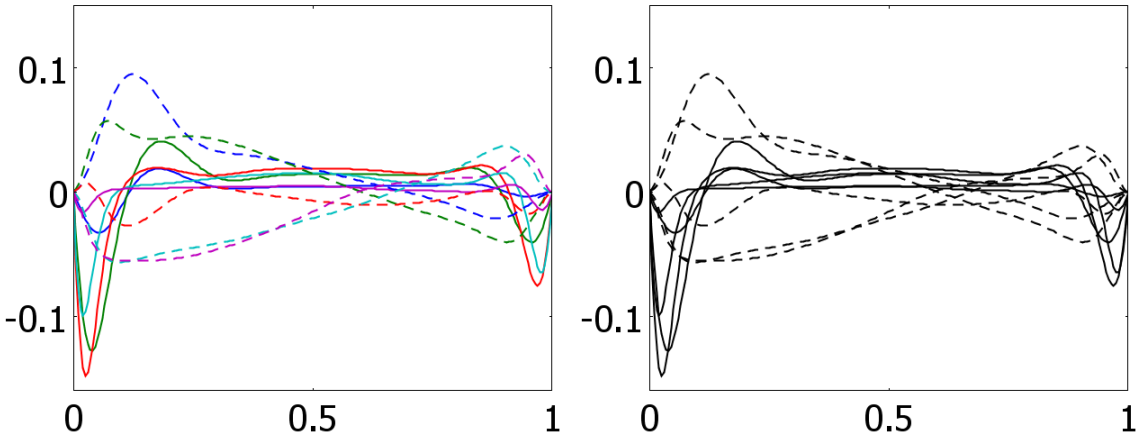
Re = 400



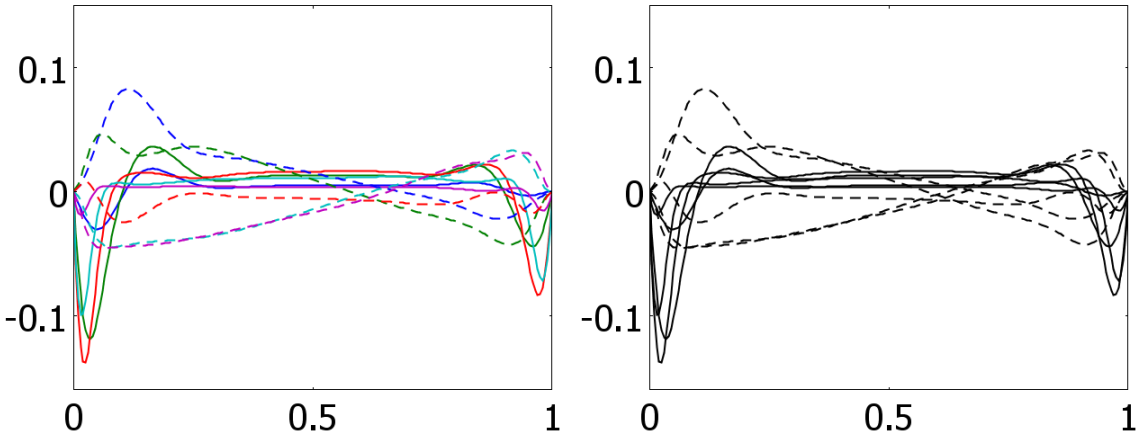
Re = 500



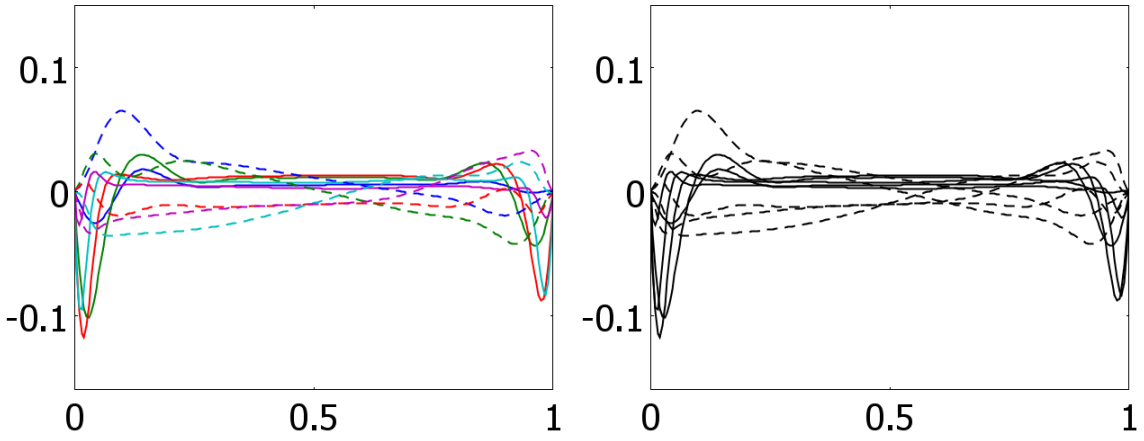
Re = 600



Re = 800



Re = 1000



$\mathrm{Re} = 1500$

S=100R=50D

Линии уровня Ковариантная компонента u3

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня осевой Контравариантная компонента v3

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня радиальной компонента v1=w1

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня окружной ковариантной компоненты v2

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

Линии уровня окружной контравариантной компоненты w2

$\mathrm{Re} \to 0$

$\mathrm{Re} = 200$

$\mathrm{Re} = 400$

$\mathrm{Re} = 500$

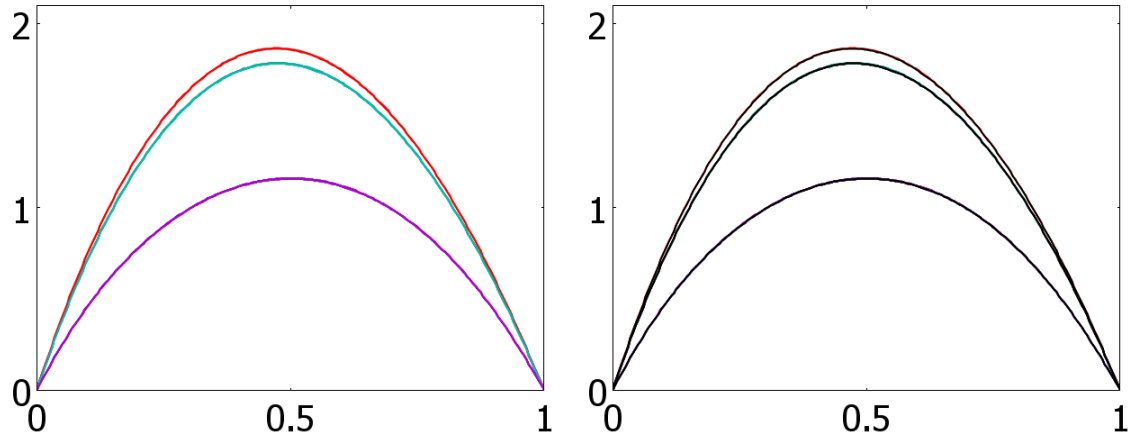
$\mathrm{Re} = 600$

$\mathrm{Re} = 800$

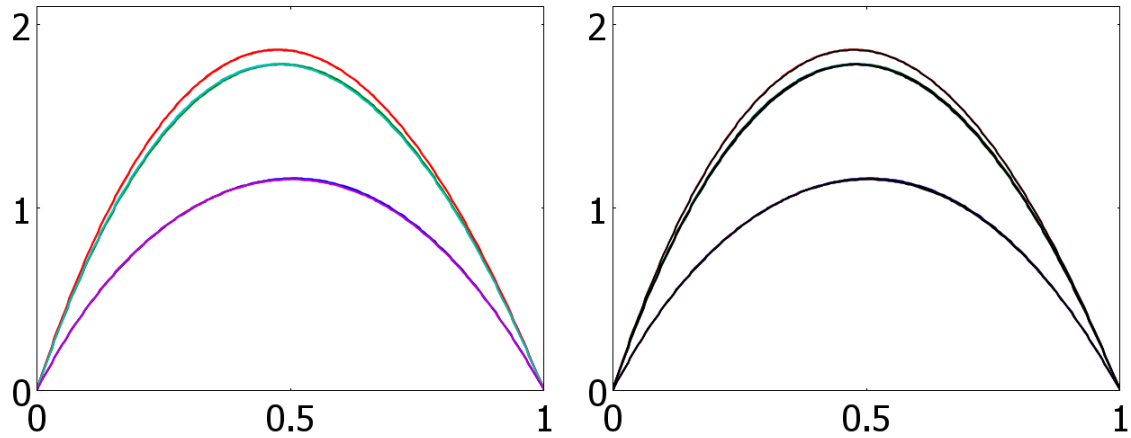
$\mathrm{Re} = 1000$

$\mathrm{Re} = 1500$

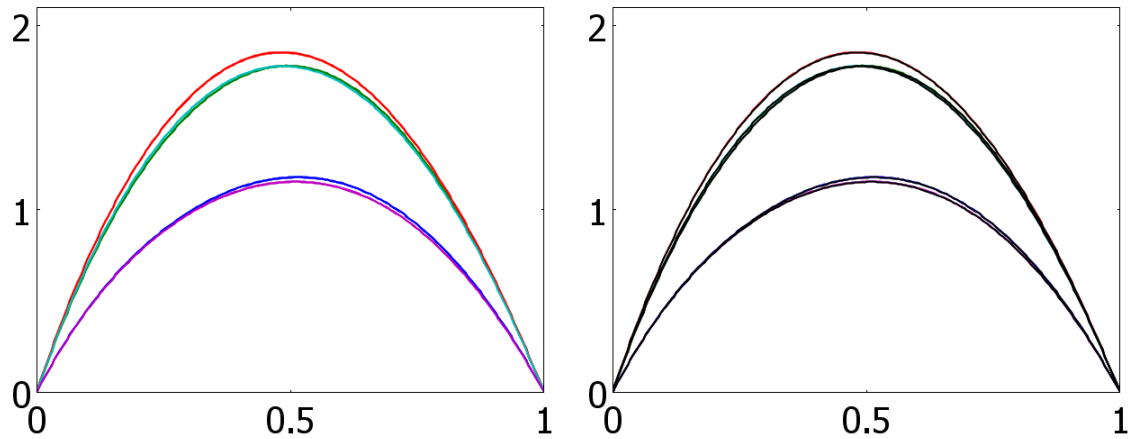
Профили радиальный разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



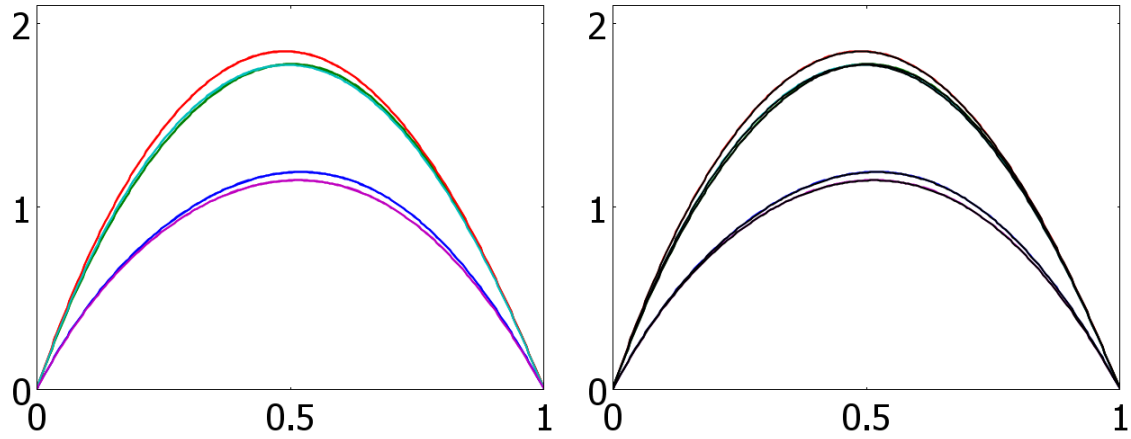
$\mathrm{Re} \to 0$



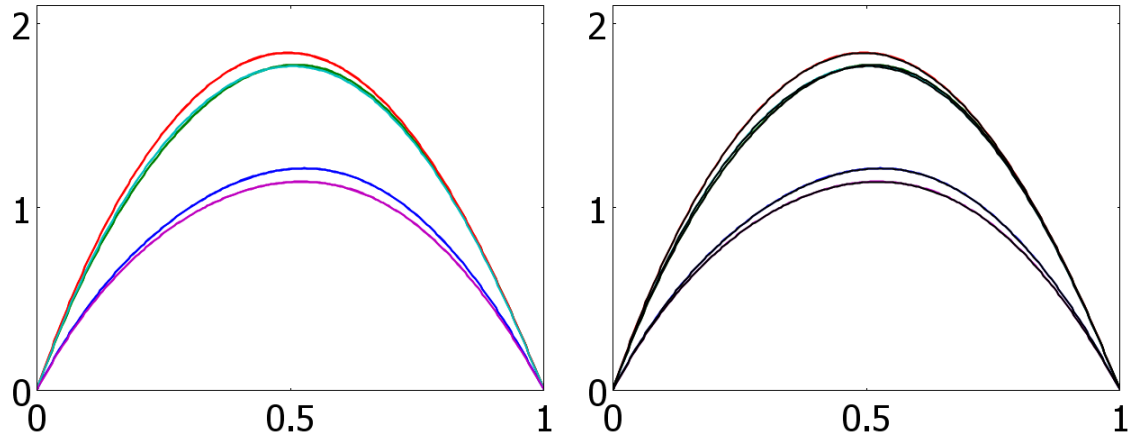
$\mathrm{Re} = 200$



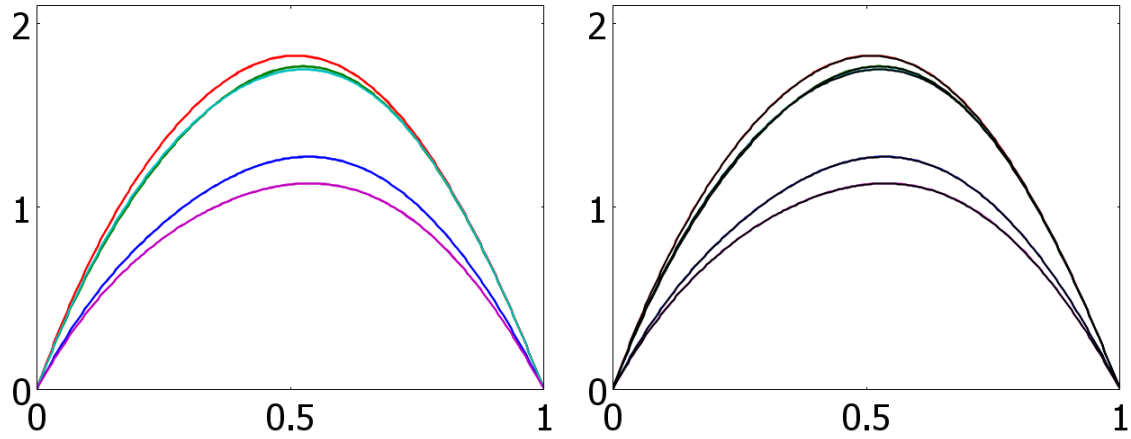
$\mathrm{Re} = 400$



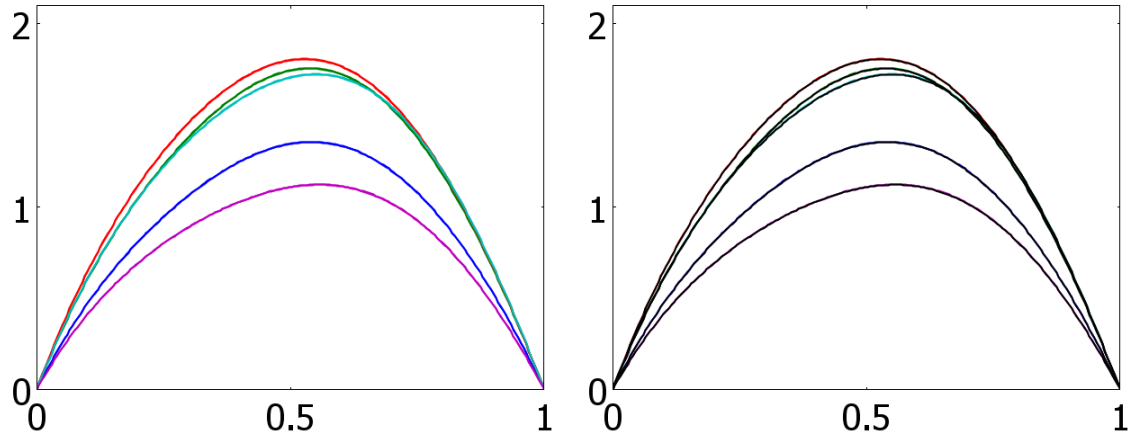
$\mathrm{Re} = 500$



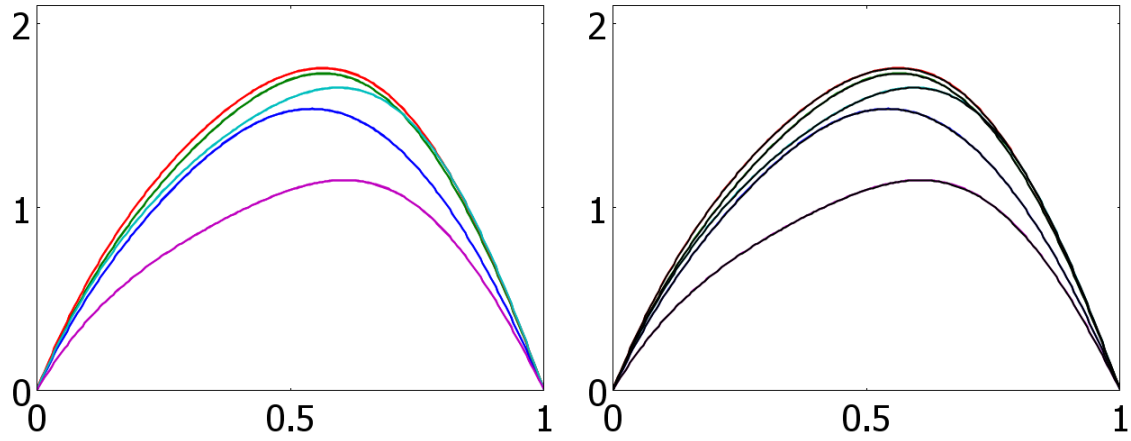
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

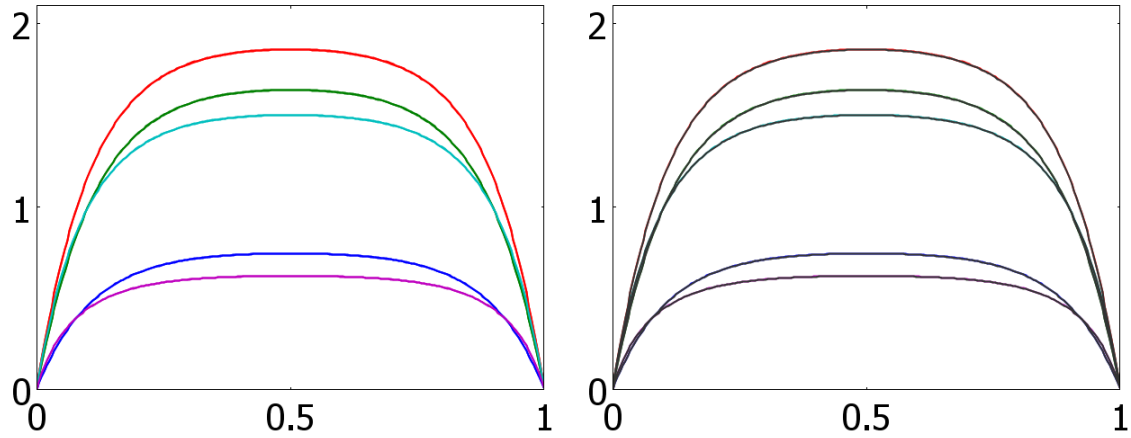


$\mathrm{Re} = 1000$

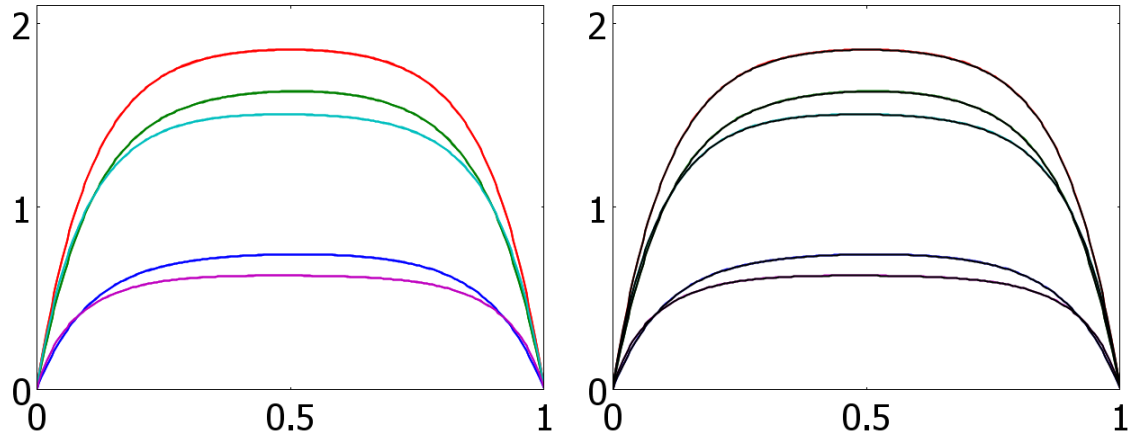


$\mathrm{Re} = 1500$

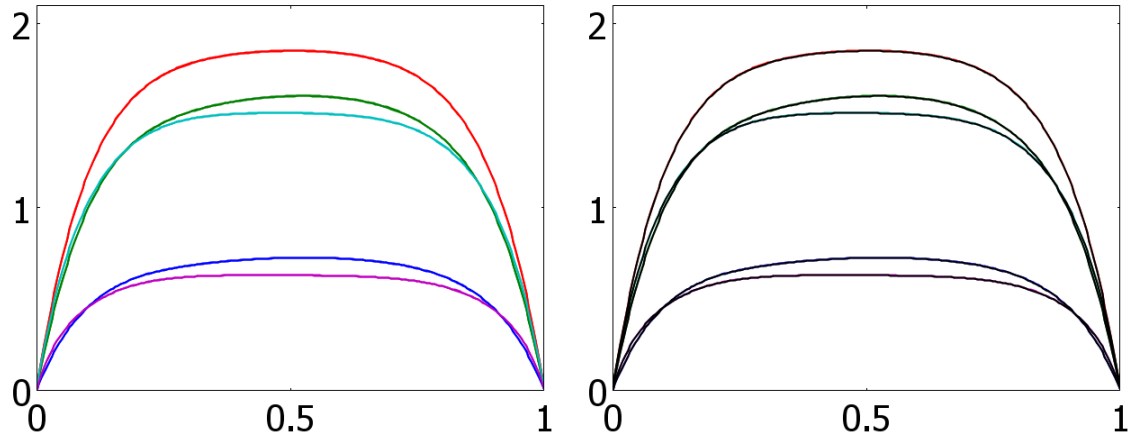
Профили окружной разрез винтовой и осевой компонент u3 и v3



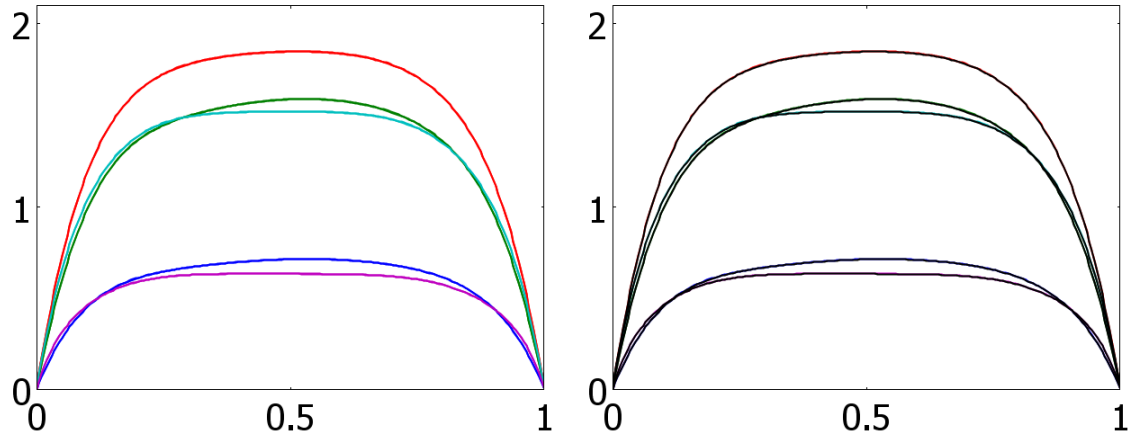
$\mathrm{Re} \to 0$



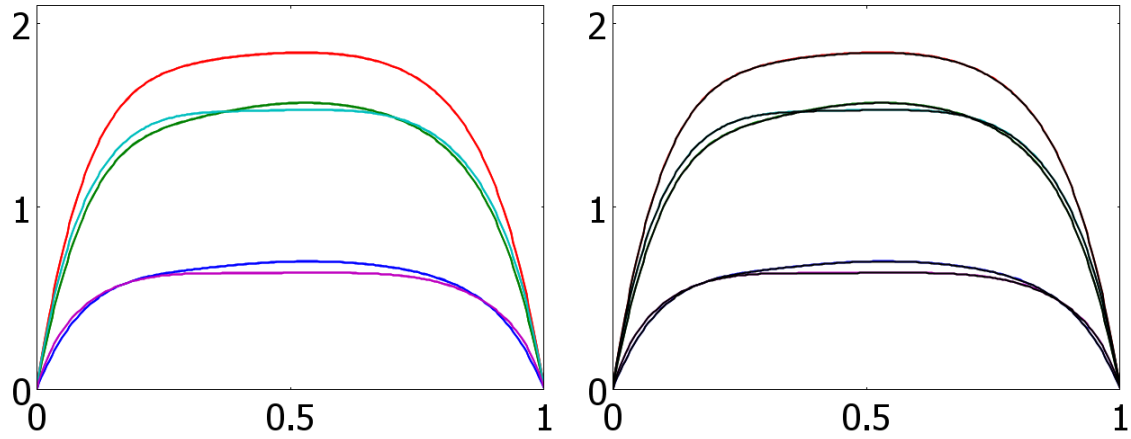
Re = 200



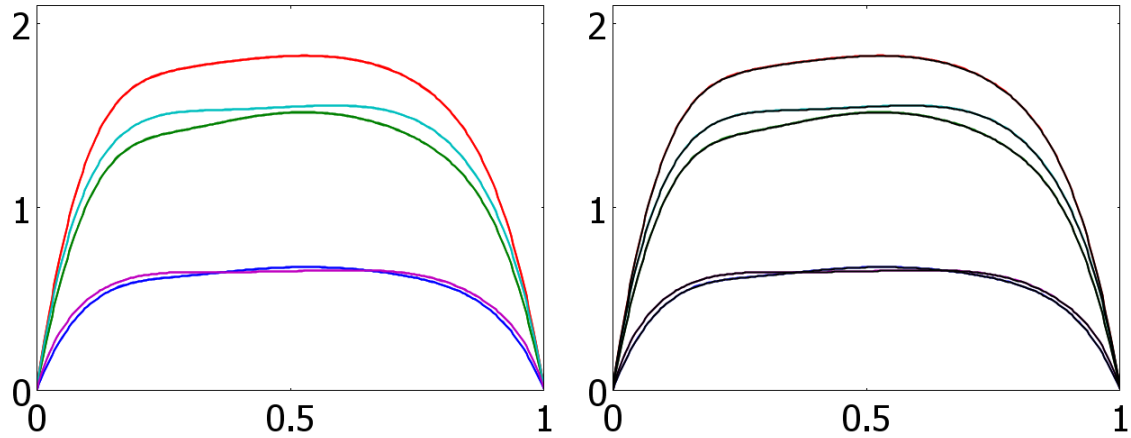
Re = 400



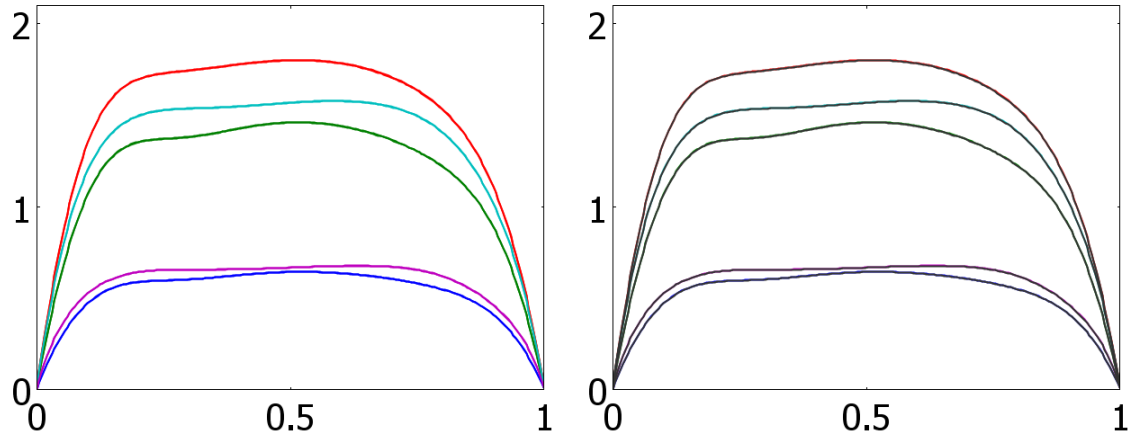
Re = 500



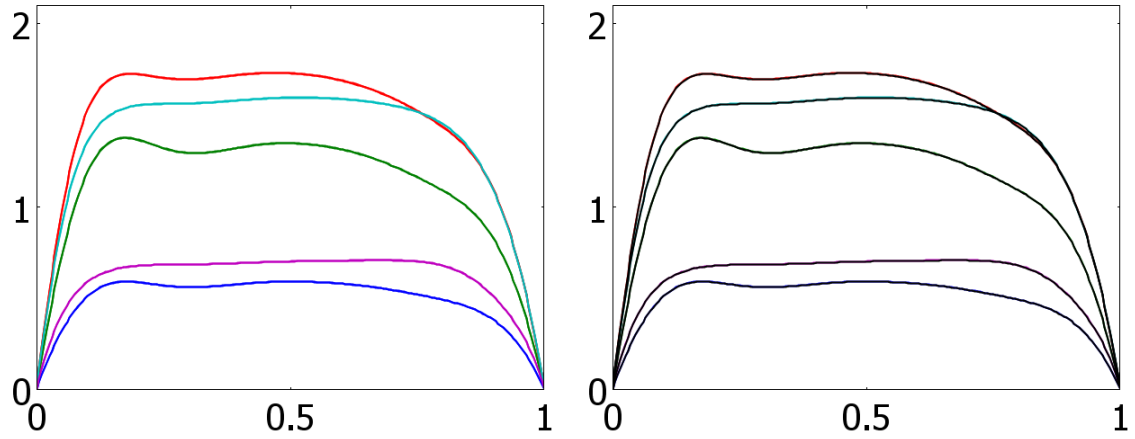
$\mathrm{Re} = 600$



$\mathrm{Re} = 800$

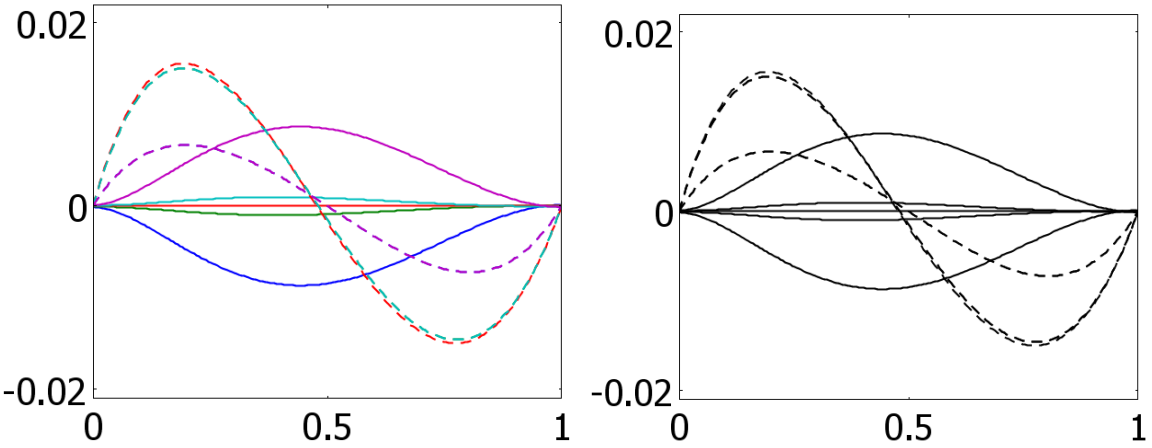


$\mathrm{Re} = 1000$

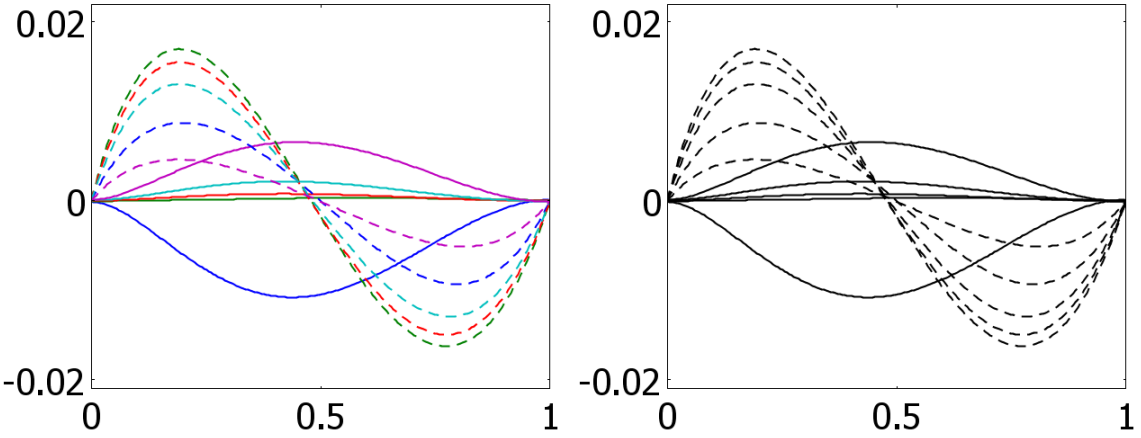


$\mathrm{Re} = 1500$

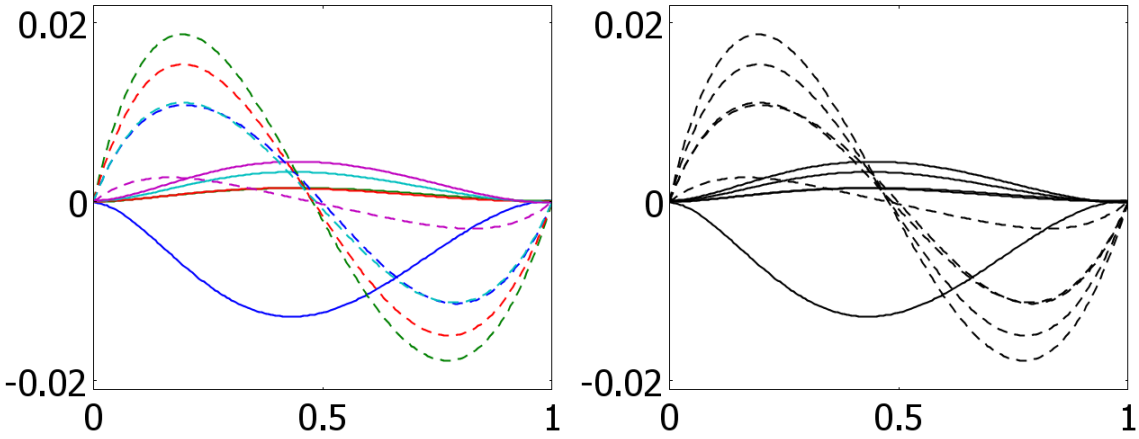
Профили радиальный разрез контравариантных компонент w1 и w2



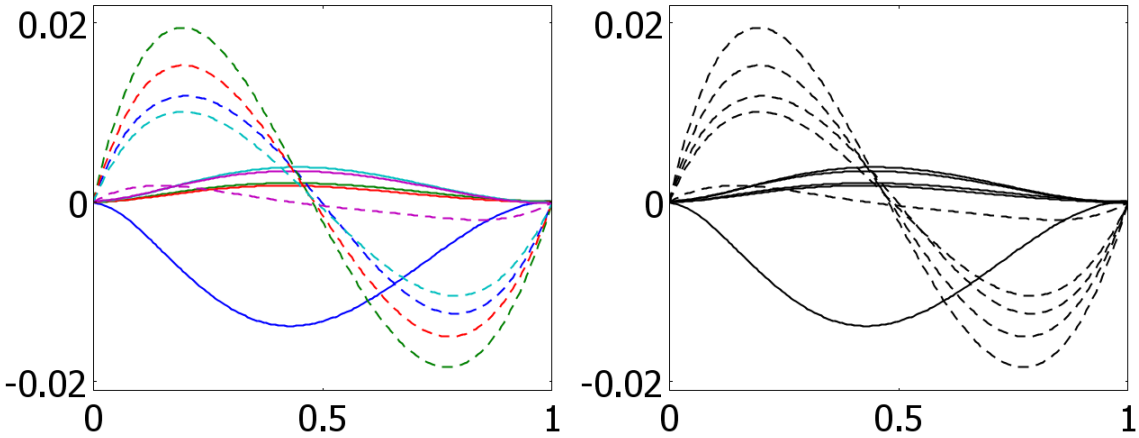
$\mathrm{Re} \to 0$



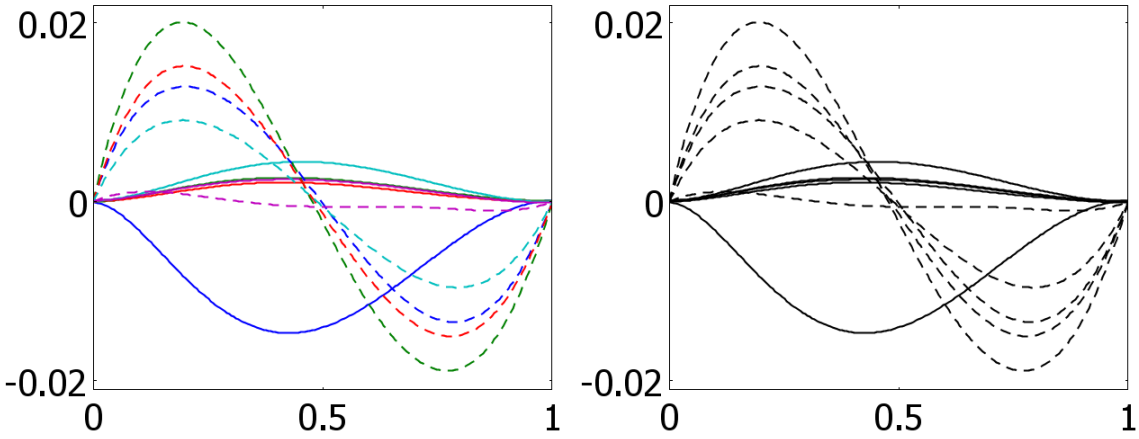
$\mathrm{Re} = 200$



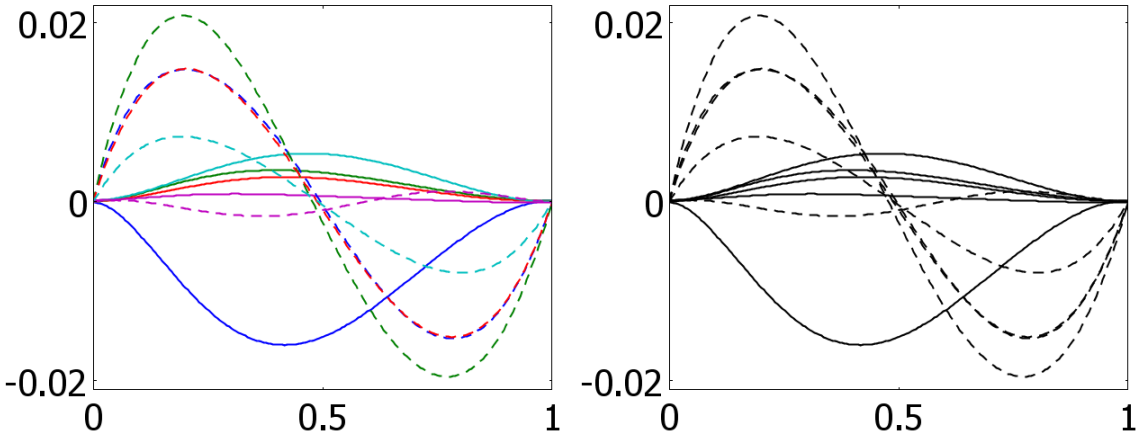
Re = 400



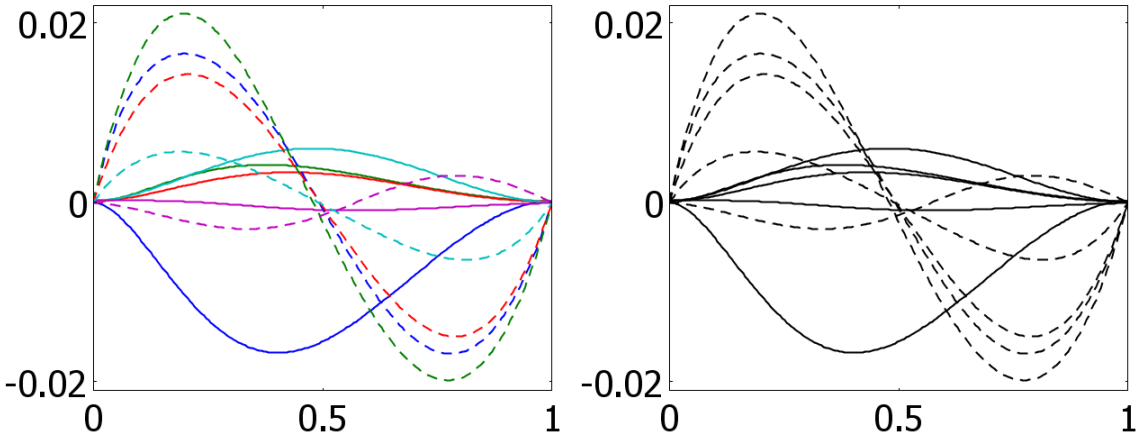
Re = 500



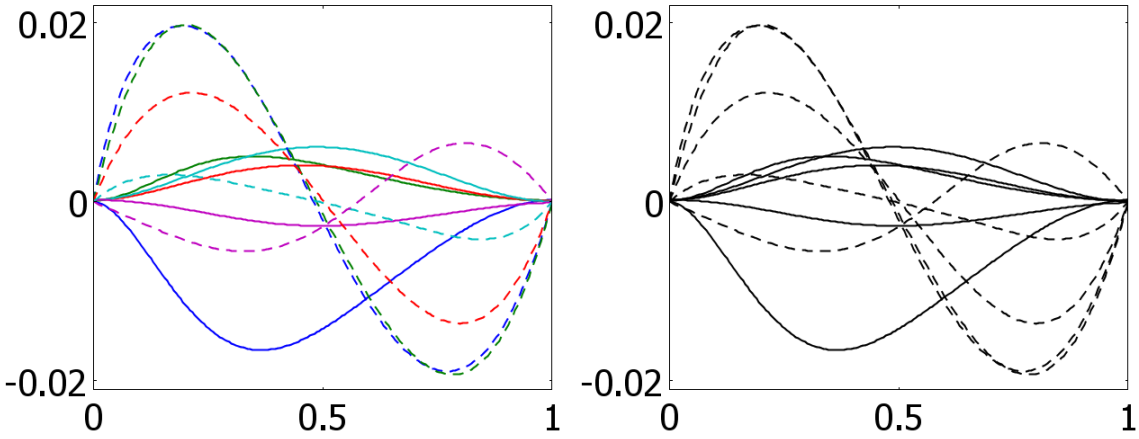
Re = 600



$\mathrm{Re} = 800$

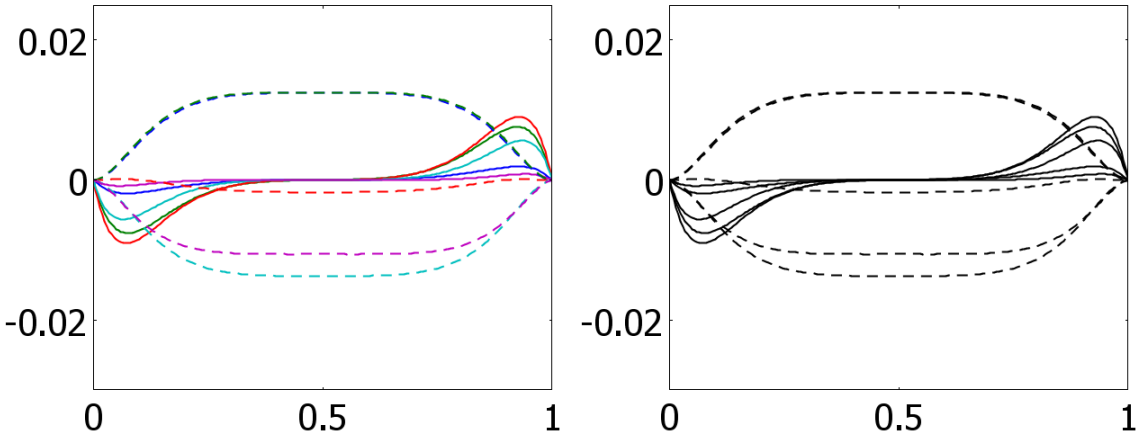


$\mathrm{Re} = 1000$

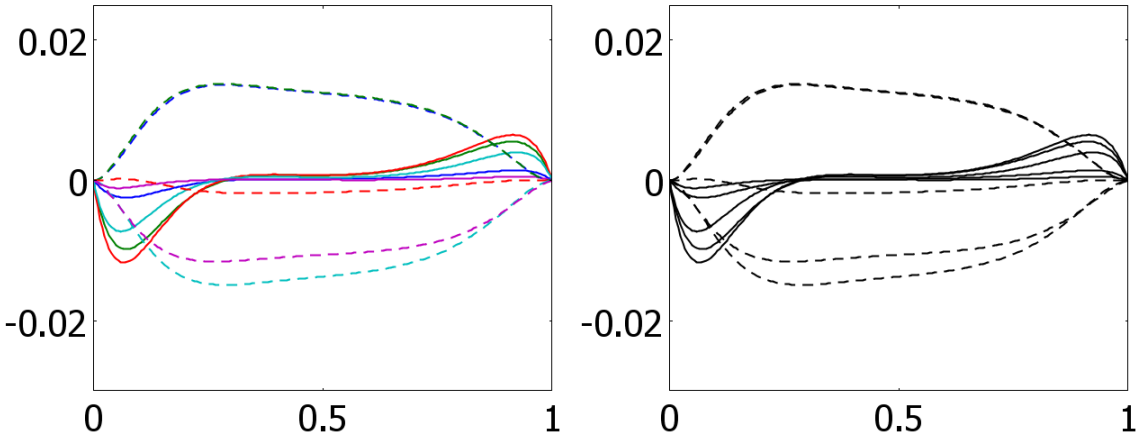


$\mathrm{Re} = 1500$

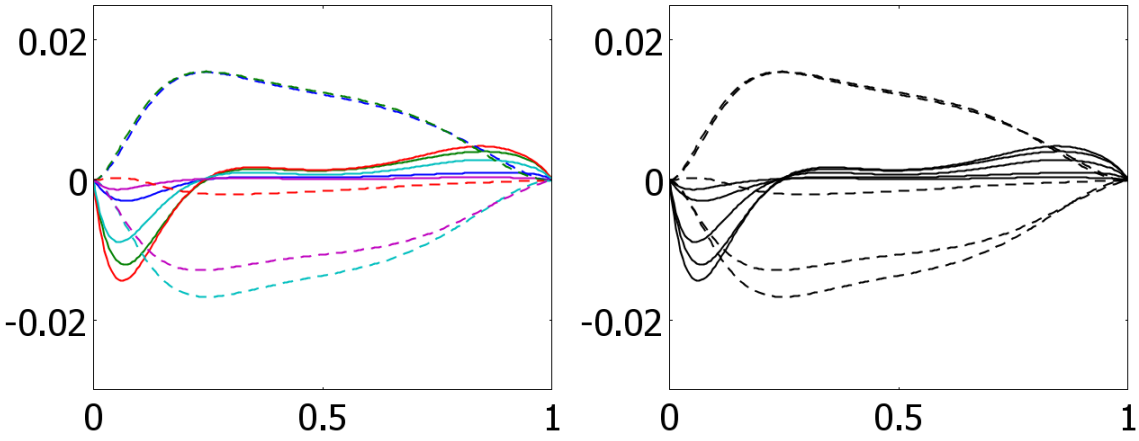
Профили окружной разрез контравариантных компонент w1 и w2



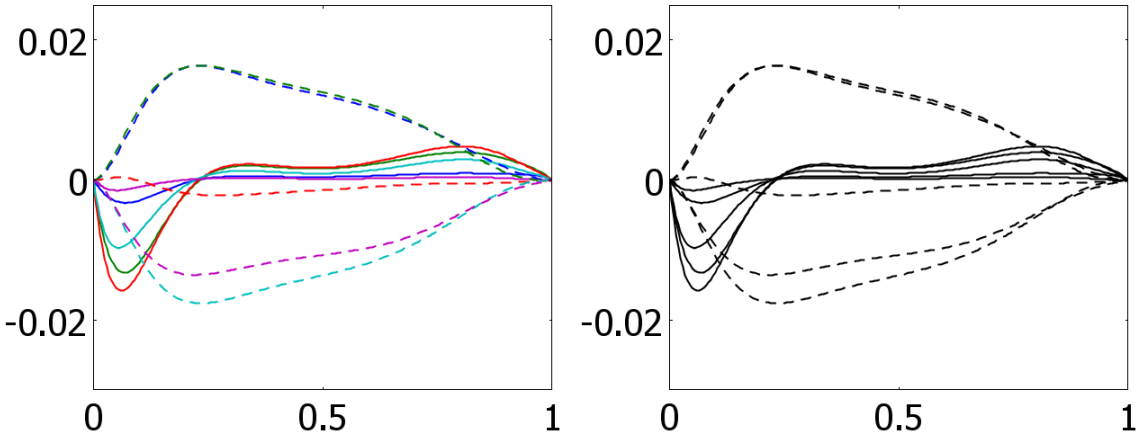
$\mathrm{Re} \to 0$



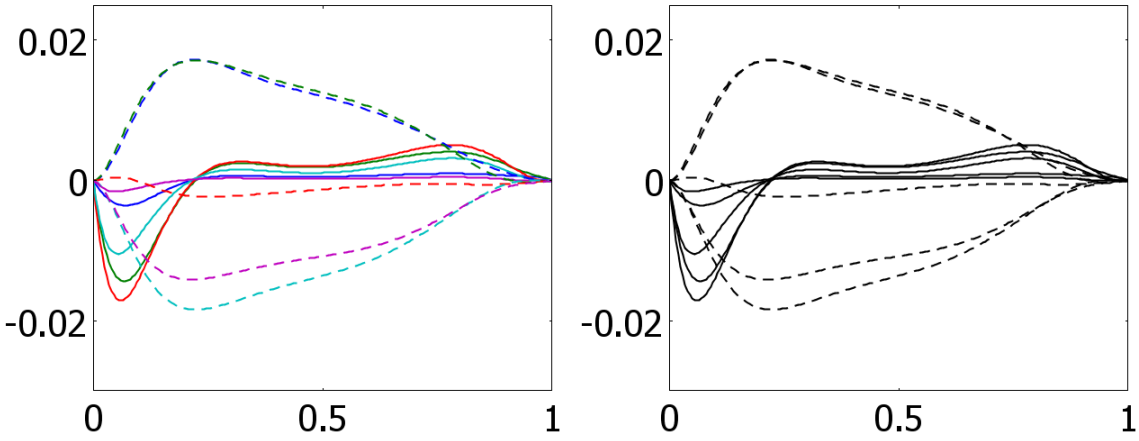
$\mathrm{Re} = 200$



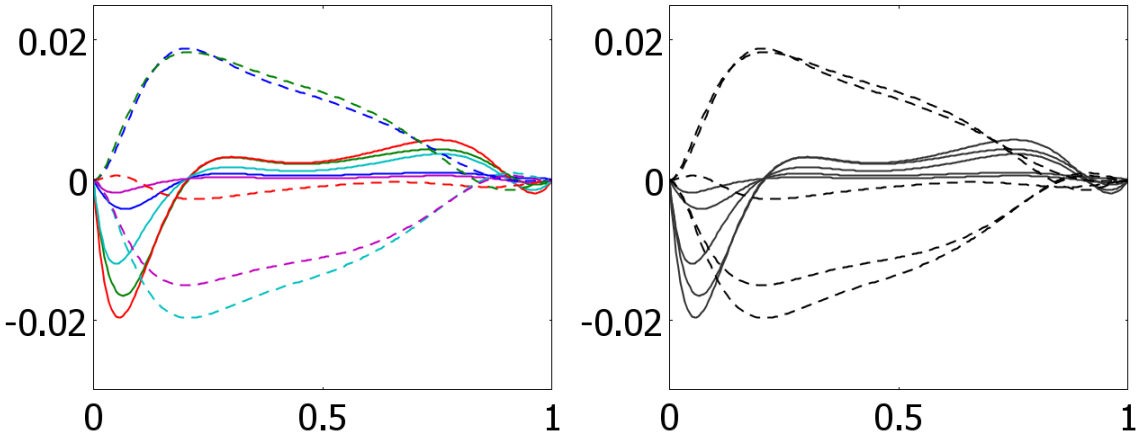
$\mathrm{Re} = 400$



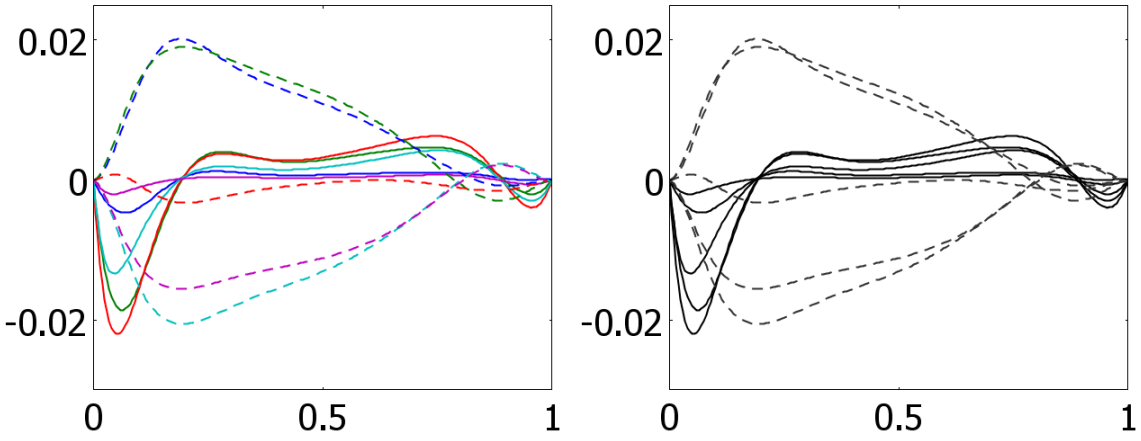
Re = 500



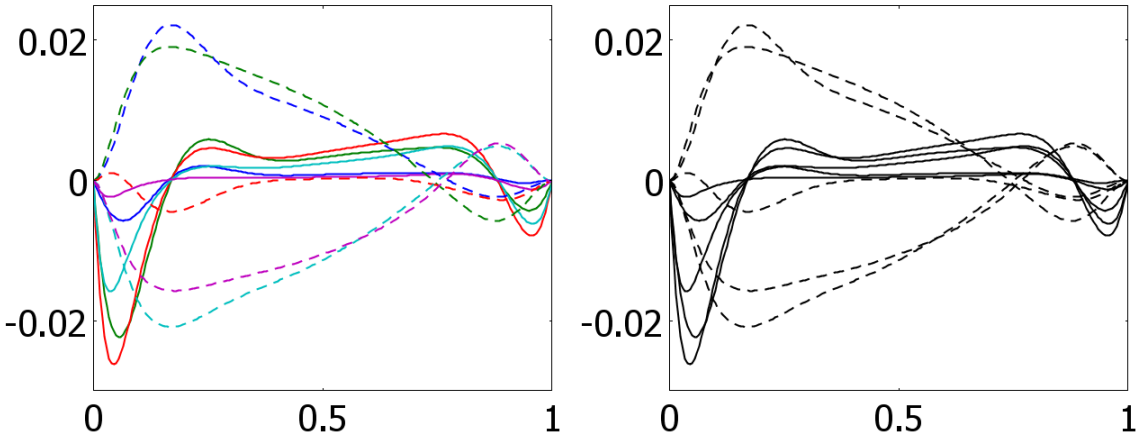
Re = 600



Re = 800



Re = 1000



Re = 1500

Интенсификаторы конвективного теплообмена, принцип работы которых основан на винтовой закрутке внутреннего потока жидкости, отличаются большим разнообразием конструкций. Рассматривая оригинальные конструкции, следует отметить винтовую вставку из скрученной ленты, шаг которой уменьшается по ходу потока. Изменение общеизвестной конструкции проводится в целях выравнивания гидравлического сопротивления (рис. 1). Наружная труба теплообменника (рис. 2) выполнена с изменяющейся площадью поперечного сечения, уменьшающейся в направлении движения среды. Винтовые ребра имеют высоту, увеличивающуюся обратно пропорционально шагу в направлении уменьшения поперечного сечения наружной трубы.

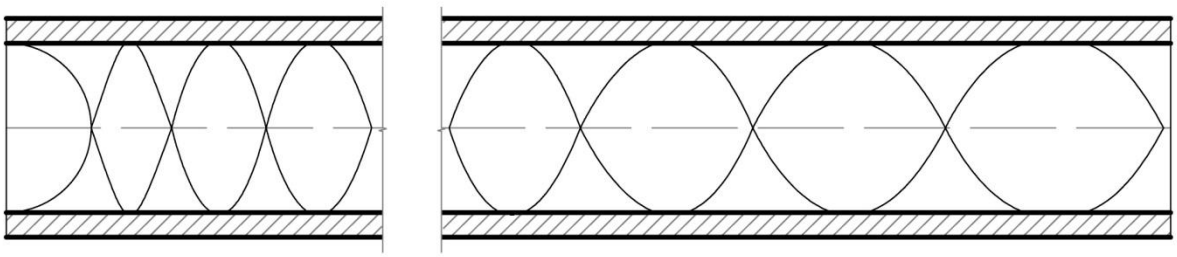


Рис. 1 Винтовая вставка из скрученной ленты с переменным шагом

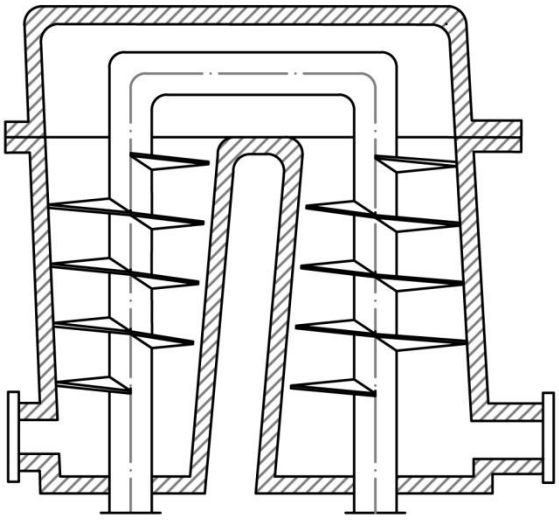


Рис. 2. Теплообменник с переменным шнековым интенсификатором

Для исключения зоны обратного движения среды в зазоре между винтовой вставкой и стенкой канала предложено выполнить вставку с таким диаметром, чтобы тонкая винтовая кромка деформировалась и уплотняла зазоры (рис. 3). В теплообменнике, рассмотрены винтовые поверхности, образованные косыми витками из спиральной ленты (рис. 4). Конструкция подогревателя со спиральными закручивателями потока, каждый из которых в совокупности с корпусом образует винтовой канал типа шнекового (рис. 5).

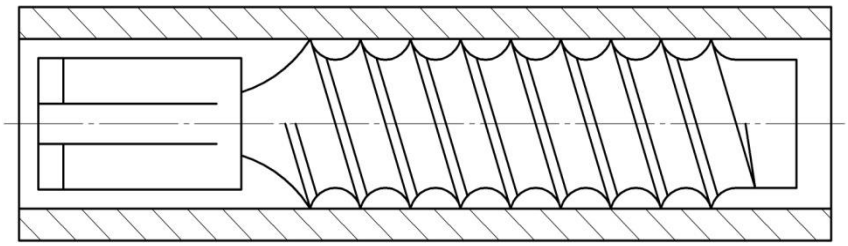


Рис. 3 Винтовая вставка с уплотняющей кромкой

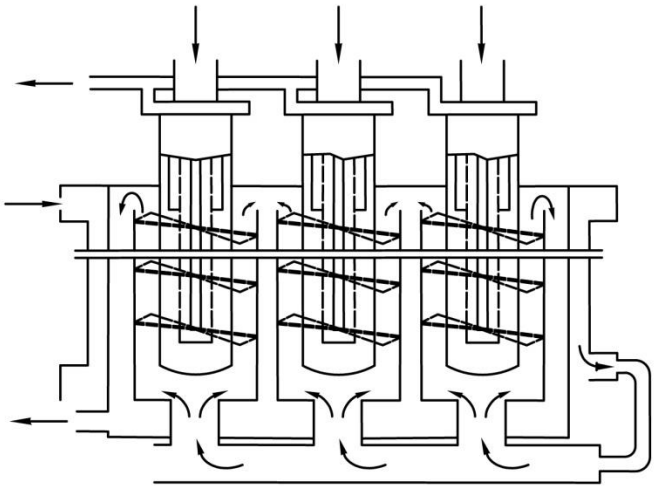


Рис. 4 Рабочий элемент теплообменника спирального типа

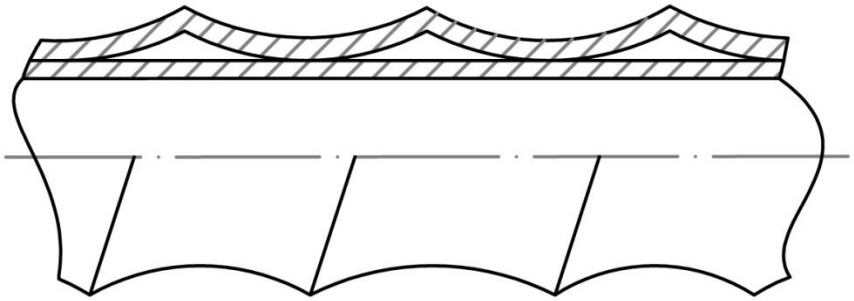


Рис. 5 Подогреватель с винтовым интенсификатором теплообмена

Для интенсификации конвективного теплообмена в межтрубном пространстве кожухотрубчатых теплообменников предложено винтообразное оребрение труб, примыкающее одно к другому и образующее систему винтовых каналов различного поперечного сечения (рис. 6).

Для интенсификации теплообмена в средах с высокой вязкостью предложена конструкция теплообменного элемента с внутренней винтовой

ленточной вставкой, помещаемой в спиральную канавку на внутренней поверхности трубы.

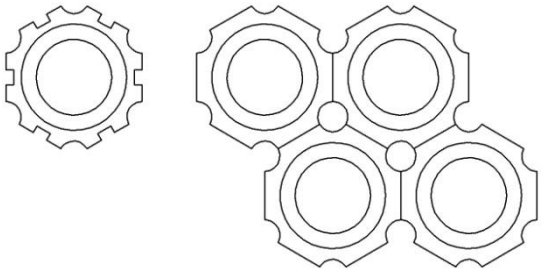


Рис. 6 Кожухотрубчатый теплообменник с винтовым наружным оребрением труб

Для интенсификации теплообмена в аппаратах типа «труба в трубе» рассмотрено спиральное оребрение внутренней трубы, примыкающее к стенке наружной трубы, причем трубы расположены эксцентрично друг относительно друга. Также возможно снабжать винтовое оребрение кольцевого зазора системой осевых отверстий, через которые проходит пучок труб для второй текущей среды (рис. 7).

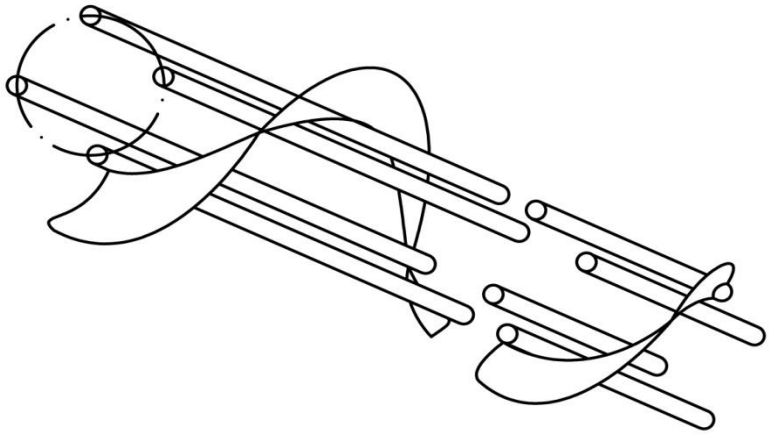


Рис. 7 Конструкция трубчатого пучка с винтовым закручивателем потока

Таким образом, из приведенного краткого перечня и анализа основных конструкций интенсификаторов конвективного теплообмена винтового типа видно, что совершенствование их ведется на протяжении длительного времени и применение их в теплообменной аппаратуре весьма перспективно. Одновременно следует отметить и многообразие конструктивных форм каналов,

образованных интенсификаторами винтового типа.

В связи с тем, что большинство опубликованных работ по интенсификации конвективного тепло и массопереноса в каналах посвящено ньютоновским средам и эти работы в основном хронологически более ранние, анализ эффектов следует начать именно с ньютоновских сред.

Таким образом, можно констатировать тот факт, что для наиболее важной и интересной с практической точки зрения ламинарной области течения недостаточно опытных данных, а также отсутствуют строгие методы расчета гидродинамических и тепловых характеристик. И это наблюдается, к сожалению, при ламинарных течениях, для которых традиционны строгие постановки и решения гидродинамических задач.

Анализ различных способов интенсификации теплообмена с точки зрения влияния их на технико-экономические показатели теплообменного оборудования, позволил выявить ряд преимуществ, выгодно отличающих применение шероховатых поверхностей теплообмена.

Искусственная шероховатость поверхности создается путем накатки, навивки, штамповки, применение вставок различной формы и т. д. Исследование влияния шероховатости на теплообмен и трение позволили определить оптимальные формы интенсификаторов, позволяющие существенно улучшить технико-экономические показатели теплообменников. К ним относятся: кольцевая накатка (рис 8), спиральное оребрение (рис 9), пружинные вставки (рис 10), винтовая накатка (рис 11), и т.д. классифицируемые как дискретная шероховатость поверхности.

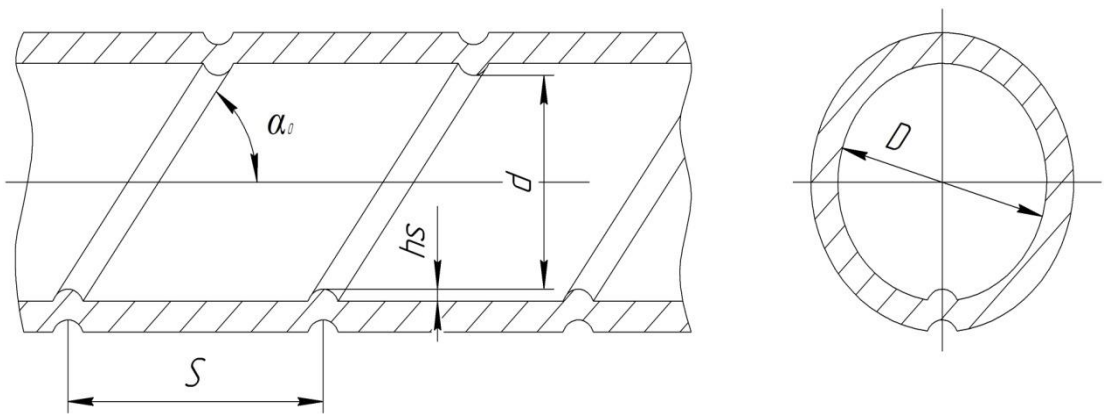


Рис. 8 Общий вид трубы с винтовой накаткой

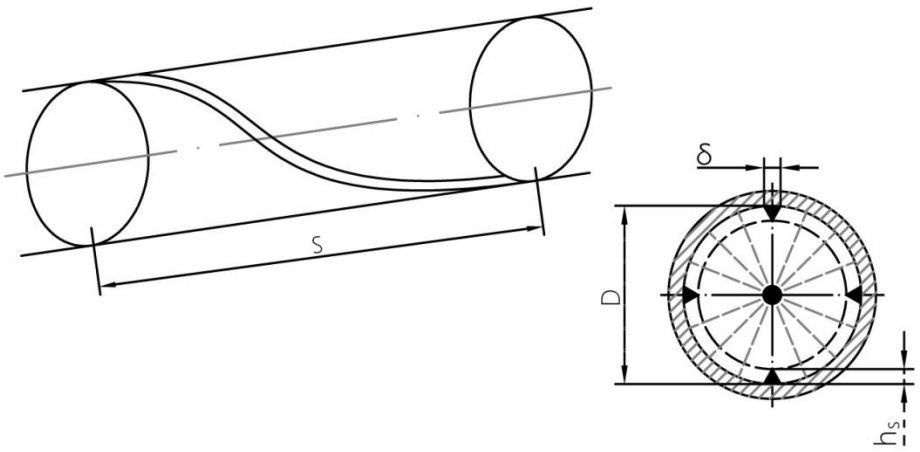


Рис. 9 Общий вид трубы со спиральным оребрением

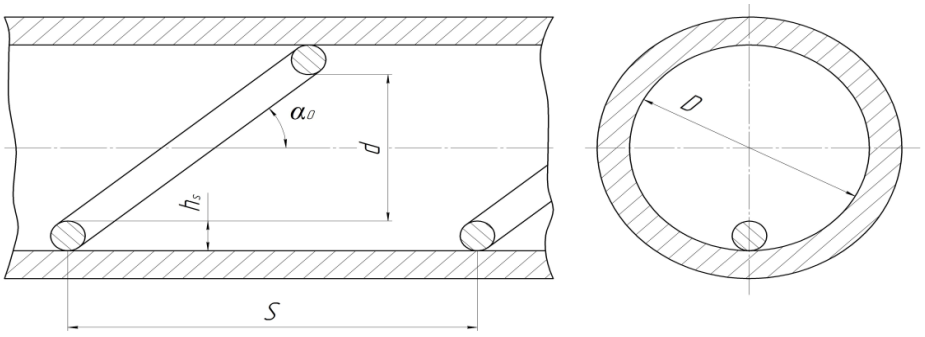


Рис. 10 Общий вид трубы со спиральными пружинными вставками

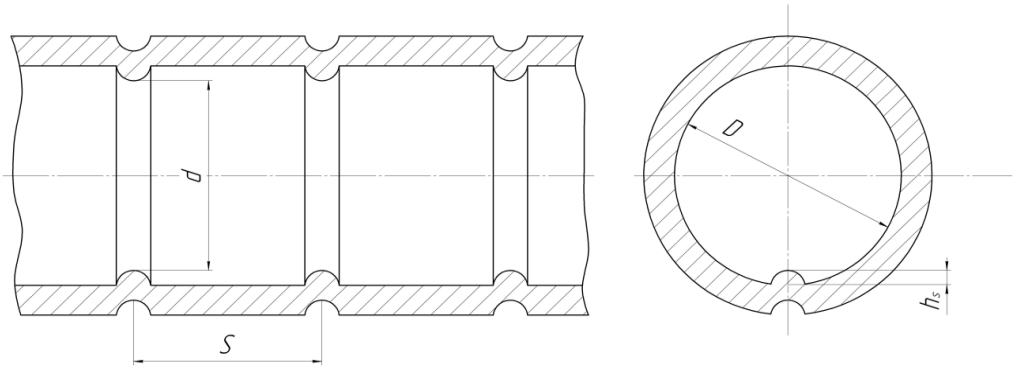


Рис. 11 Общий вид трубы с кольцевой накаткой

Интенсификация теплоотдачи посредством дискретных выступов осуществляется за счет турбулизации и разрушения пристенной зоны течений. Увеличение интенсивности теплообмена и гидросопротивления зависит от

высоты выступа (h_s), расстояние между выступами (S), формы выступов и их взаиморасположение.

В случаях, когда компактность теплообменного оборудования является предпочтительной по сравнению с затратами энергии на прокачку жидкости, наиболее часто в качестве таковых применяются одно и многозаходные шнековые вставки. Общий вид канала с трехзаходной шнековой вставкой представлен на рис.12. В таких каналах появляются поперечные потоки, которые приводят к более интенсивному переносу тепла в поперечных направлениях, по сравнению с каналами без вставок, когда перенос тепла в этом направлении происходит исключительно за счет теплопроводности.

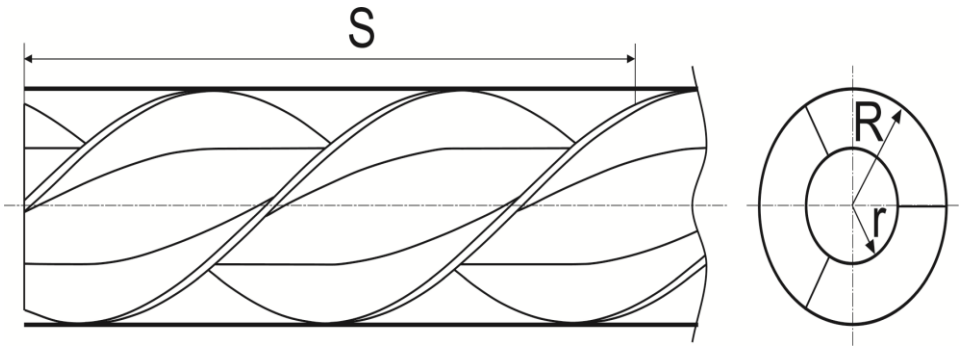


Рис. 12 Общий вид канала с трехзаходной шнековой вставкой

Обзор научной литературы и патентных источников показывает, что интенсификаторы конвективного теплообмена отличаются большим разнообразием конструктивных решений. Физические принципы, дающие возможность получить положительный эффект, известны уже длительное время, однако зависимости для расчета теплообмена и гидравлического сопротивления во всем широком диапазоне геометрических характеристик интенсификаторов, гидродинамических и тепловых условий, свойств жидкости определены далеко не в полной мере.

Следует также отметить, что подавляющая часть работ ученых А. Берглса, Ю.Г. Назмеева, Г.А. Дрейцера, В.А. Кирпикова, А.А. Гухмана, Ю.Ф. Гортышова, А.И. Леонтьева указывают на несомненную перспективность применения известных методов интенсификации именно к ламинарному режиму течения

жидкости. Однако именно реологически сложные среды, отличающиеся высокими значениями вязкости, в силу присущему им ламинарному режиму течения более всего нуждаются в детальной разработке методов интенсификации процессов переноса, и в частности теплообмена.

Теплообменные аппараты применяются в энергетике, химической, нефтеперерабатывающей, в холодильной и криогенной технике, в системах отопления и горячего водоснабжения, кондиционирования, в тепловых двигателях. В настоящее время подавляющая часть этих аппаратов состоит из трубчатых поверхностей теплообмена.

С ростом энергетических мощностей и объема производства все более увеличиваются масса и габариты применяемых теплообменных аппаратов. Уменьшение массы и габаритов теплообменных аппаратов является актуальной проблемой. Одним из наиболее перспективных путей решения этой проблемы является интенсификация теплообмена.

Посредством интенсификации теплообмена возможно улучшить режим работы теплообменника, например, снизить температурный напор, т.е. снизить температуру стенки при фиксированной температуре теплоносителя или увеличить температуру теплоносителя при заданной максимально допустимой температуре стенки.

В работах Назмеева Ю.Г. отмечено, что область ламинарных течений является весьма перспективной областью, где разработка и анализ способов повышения эффективности теплообменной аппаратуры является весьма актуальной задачей, так как исторически методы интенсификации развивались в области турбулентных течений. Там же было отмечено, что выбор методов интенсификации теплообмена при ламинарных течениях высоковязких сред (высоковязкие нефти) характеризуется некоторыми особенностями. В первую очередь это желательное воздействие не только на пристенные слои жидкости, но и на весь поток жидкости в каналах, так как при течении высоковязких сред отсутствуют ламинарные пограничные (пристенные) слои, которые лимитируют процессы переноса тепла. Кроме того, применение активных методов

воздействия часто не оправдано с точки зрения затрат энергии. Ориентируясь на эти особенности, можно выделить один из самых популярных пассивных методов интенсификации конвективного теплообмена, а именно, применение различных вставок – закручивающих поток, организующих вторичные течения по всему поперечному сечению трубы.

Шнековые вставки являются одним из наиболее выгодных устройств, интенсифицирующих процессы теплообмена. Расчетам гидродинамических характеристик потоков при использовании шнековых вставок посвящены многие работы Ю.Г. Назмеева с соавторами.

Очевидно, что течение в каналах со шнековой вставкой существенно трехмерно. В последние годы, в связи с большой востребованностью шнековых вставок как интенсификаторов конвективного теплообмена и бурным развитием численных методов появилась возможность тщательных расчетов таких трехмерных течений. Однако, необходимость привлечения громоздких расчетов для анализа структуры винтовых течений снижает как точность расчетов, так и объем возможных исследований, ограниченный большим значением времени расчетов. Круглые трубы со шнековой вставкой обладают однопараметрической группой винтовой симметрии. Именно винтовая симметрия таких каналов позволяет упростить нахождения конечного решения и проанализировать влияние всех параметров задачи на ее решение.