8 класс

1. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 50 отличников и 60 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

2. Найдите такое натуральное число x, чтобы выполнялось равенство

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{50}{99}.$$

3. Вася должен был найти сумму 11 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

4. Оля и Коля собираются купить по одной открытке и по одному конверту. В магазине продаются 10 открыток по цене от 40 рублей до 99 рублей и 10 конвертов по цене от 10 рублей до 49 рублей. Все цены разные. Стоимость каждой открытки и каждого конверта — целое количество рублей. Верно ли, что Оля и Коля всегда смогут купить два набора из открытки и конверта по одной и той же цене?

5. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD взяты точки K и M соответственно, причём $\angle AKB=\angle MKC=60^\circ$. Найдите угол AMK.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 76 отличников и 80 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

2. Вася должен был найти сумму 13 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

3. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x+b)^2 + b(x+a)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

4. По кругу написаны все цифры от 0 до 9 в некотором порядке так, что сумма любых трёх подряд идущих цифр не превосходит некоторого натурального числа k. При каком наименьшем k это возможно?

5. Угол A в треугольнике ABC равен 40°. Окружность, проходящая через A и B и касающаяся BC, пересекает медиану к стороне BC (или ее продолжение) в точке M, отличной от A. Найдите угол BMC.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

2. Действительные числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b} = M$. Какие значения может принимать величина M?

3. По кругу написаны все целые числа от 0 до 12 в некотором порядке так, что сумма любых четырёх подряд идущих чисел не превосходит некоторого натурального числа k. При каком наименьшем k это возможно?

4. Каждое из неотрицательных чисел x, y и z не больше 2. Докажите:

$$\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{y^2+(2-z)^2}+\sqrt{z^2+(2-x)^2} \leqslant 6.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте CC_1 точка M выбрана так, что $\angle AMB = 90°$. Найдите отношение $CM : MC_1$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 110 отличников и 100 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

2. Сколько делителей числа 10^{1000} не являются делителями числа 10^{999}?

3. На каждой из 100 карточек записано по одному числу, отличному от нуля, при этом каждое число равно кубу суммы всех остальных. Какие это числа?

4. Сумма положительных чисел a, b и c не меньше 3. Докажите, что

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant 2.$$

5. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте CC_1 точка M выбрана так, что $\angle AMB = 90^\circ$. Найдите отношение $CM : MC_1$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

8 класс

1. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 50 отличников и 60 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

Ответ: *а*) 11 *учеников; б*) *на* 1.

Решение. *а*) Пусть x — количество школьников в кружке. Поскольку каждый высказался об остальных $(x-1)$ школьниках, общее число ответов равно $x \cdot (x-1) = 50+60$, откуда $x = 11$.

б) Пусть среди 11 школьников было a отличников и b хулиганов, тогда $a+b = 11$. Подсчитаем, сколько было ответов «хулиган». Его дал каждый из a отличников про каждого из b хулиганов, и таких ответов было ab. Столько же было ответов «хулиган» от каждого из b хулиганов про каждого из a отличников. Всего было дано $2ab = 60$ ответов «хулиган», то есть $ab = 30$.

Зная сумму и произведение, находим сами числа a и b — это 5 и 6. По условию отличников было меньше, чем хулиганов, значит, $a = 5$, $b = 6$, и $b - a = 1$.

Критерии. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла, пункта *б*) — 4 балла. Только ответ и пример к условию задачи — 2 балла. Правильно указано только количество школьников в кружке — 1 балл.

2. Найдите такое натуральное число x, чтобы выполнялось равенство

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{50}{99}.$$

Ответ: $x = 99$.

Решение. Каждый сомножитель, входящий в произведение, раскладывается как разность квадратов, поэтому уравнение можно записать в виде

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{50}{99}, \qquad \text{или}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x+1}{x} = \frac{50}{99}, \quad \text{то есть} \quad \frac{x+1}{2x} = \frac{50}{99} \iff x = 99.$$

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Установлено, что после преобразований получается уравнение первой степени — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. Вася должен был найти сумму 11 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

Ответ: 1221.

Обозначим Васины числа через $n-5, n-4, \ldots, n, \ldots, n+4, n+5$, а пропущенные числа — через k и $k+1$. Тогда сумма Васиных чисел равна $S = 11n$, и по условию $S - k - (k+1) = 1000$. Какие значения может принимать сумма двух пропущенных чисел $k + (k+1) = 2k+1$? Сумма двух наименьших чисел равна $(n-5)+(n-4) = 2n-9$, а сумма двух наибольших — $(n+4)+(n+5) = 2n+9$, поэтому

$$2n - 9 \leqslant 2k+1 \leqslant 2n+9.$$

С другой стороны, $2k+1 = S - 1000$, поэтому $2n-9 \leqslant 11n - 1000 \leqslant 2n+9$. Отсюда $111 \leqslant n \leqslant 112$, то есть $n = 111$ или $n = 112$. Из равенства $11n - (2k+1) = 1000$ следует, что n — нечётное число. Значит, $n = 111$ и $S = 11n = 11 \cdot 111 = 1221$, а пропущенные числа — 110 и 111.

Критерии. Только верный ответ — 2 балла. Отмечено, что сумма двух пропущенных чисел не больше суммы двух наибольших и не меньше суммы двух наименьших — ещё 2 балла. Доказано, что среднее число n равно 111 или 112 — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. Оля и Коля собираются купить по одной открытке и по одному конверту. В магазине продаются 10 открыток по цене от 40 рублей до 99 рублей и 10 конвертов по цене от 10 рублей до 49 рублей. Все цены разные. Стоимость каждой открытки и каждого конверта — целое количество рублей. Верно ли, что Оля и Коля всегда смогут купить два набора из открытки и конверта по одной и той же цене?

Ответ: *верно.*

Решение. Количество различных вариантов покупки набора из открытки и конверта равно $10 \cdot 10 = 100$. Наименьшая цена такого набора — $40 + 10 = 50$ рублей, а наибольшая — $99 + 49 = 148$ рублей. Значит, количество вариантов различных возможных цен за один набор равно $148-50+1 = 99$. Поскольку это число меньше 100, по принципу Дирихле найдутся два набора из открытки и конверта одинаковой стоимости, при этом стоимости открыток и конвертов в этих наборах будут разными.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Верно найдено количество различных вариантов покупки набора из открытки и конверта — 1 балл. Верно отмечена цена наименьшего и наибольшего набора из открытки и конверта — 2 балла. Подсчитано количество вариантов различных возможных цен — 2 балла. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

5. В квадрате $ABCD$ на сторонах BC и CD взяты точки K и M соответственно, причём $\angle AKB = \angle MKC = 60^\circ$. Найдите угол AMK.

Ответ: 75°.

Решение. (Рис. 1.) Опустим из точки A перпендикуляр AN к прямой KM. Тогда углы ABK и KAN равны 30°. Прямоугольные треугольники ABK и ANK имеют общую гипотенузу AK и два равных угла, поэтому они равны, и значит, $AB = AN = AD$. Прямоугольные треугольники ANM и ADM также равны, поскольку имеют общую гипотенузу AM и равные катеты AN и AD. Отсюда $\angle NAM = \angle MAD = \frac{1}{2}(90^\circ - 30^\circ - 30^\circ) = 15^\circ$, и значит, в прямоугольном треугольнике ANM угол AMN равен $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

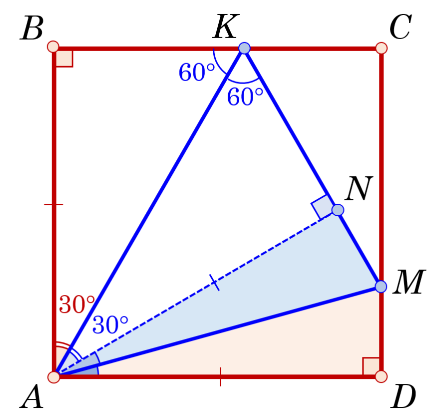

Рис. 1

Критерии. Верное дополнительное построение (перпендикуляр из точки A или M на прямые KM или AK соответственно) — 2 балла. Доказано равенство треугольников ABK и ANK — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

9 класс

1. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 76 отличников и 80 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

Ответ: *а*) 13 *учеников; б*) *на* 3.

Решение. *а*) Пусть x — количество школьников в кружке. Поскольку каждый высказался об остальных $(x-1)$ школьниках, общее число ответов равно $x \cdot (x-1) = 76 + 80$, откуда $x = 13$.

б) Пусть среди 13 школьников было a отличников и b хулиганов, тогда $a+b = 13$. Подсчитаем, сколько было ответов «хулиган». Его дал каждый из a отличников про каждого из b хулиганов, и таких ответов было ab. Столько же было ответов «хулиган» от каждого из b хулиганов про каждого из a отличников. Всего было дано $2ab = 80$ ответов «хулиган», то есть $ab = 40$.

Зная сумму и произведение, находим сами числа a и b — это 5 и 8. По условию отличников было меньше, чем хулиганов, значит, $a = 5$, $b = 8$, и $b - a = 3$.

Критерии. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла, пункта *б*) — 4 балла. Только ответ и пример к условию задачи — 2 балла. Правильно указано только количество школьников в кружке — 1 балл.

2. Вася должен был найти сумму 13 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

Ответ: 1183.

Обозначим Васины числа через $n-6, n-5, \ldots, n, \ldots, n+5, n+6$, а пропущенные числа — через k и $k+1$. Тогда сумма Васиных чисел равна $S = 13n$, и по условию $S - k - (k+1) = 1000$. Какие значения может принимать сумма двух пропущенных чисел $k + (k+1) = 2k+1$? Сумма двух наименьших чисел равна $(n-6) + (n-5) = 2n - 11$, а сумма двух наибольших — $(n+5) + (n+6) = 2n + 11$, поэтому

$$2n - 11 \leqslant 2k + 1 \leqslant 2n + 11.$$

С другой стороны, $2k+1 = S - 1000$, поэтому $2n - 11 \leqslant 13n - 1000 \leqslant 2n + 11$. Отсюда $90 \leqslant n \leqslant 91$, то есть $n = 90$ или $n = 91$. Из равенства $13n - (2k+1) = 1000$ следует, что n — нечётное число. Значит, $n = 91$ и $S = 13n = 13 \cdot 91 = 1183$, а пропущенные числа — 91 и 92.

Критерии. Только верный ответ — 2 балла. Отмечено, что сумма двух пропущенных чисел не больше суммы двух наибольших и не меньше суммы двух наименьших — ещё 2 балла. Доказано, что среднее число n равно 90 или 91 — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x+b)^2 + b(x+a)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|\,a\,| = |\,b\,|$.

Решение. Пусть $|b| \neq |a|$. Тогда $b + a \neq 0$, и данное уравнение $(a+b)x^2 + 4abx + ab(a+b) = 0$ — квадратное. При этом

$$\tfrac{1}{4}D = 4a^2b^2 - ab(a+b)^2 = -ab(a-b)^2 \neq 0.$$

Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение, что противоречит условию.

Критерии. Доказывается обратное утверждение — 1 балл. Пропущено обоснование того, что полученное уравнение квадратное — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. По кругу написаны все цифры от 0 до 9 в некотором порядке так, что сумма любых трёх подряд идущих цифр не превосходит некоторого натурального числа k. При каком наименьшем k это возможно?

Ответ: *при* $k = 15$.

Решение. Пусть цифры расставлены по кругу требуемым образом. Если исключить 0, то остальные девять цифр разбиваются на три группы из трёх подряд идущих цифр. По условию сумма цифр в каждой группе не превосходит k, поэтому сумма всех цифр (включая ноль) не превосходит $3k$. С другой стороны, сумма всех цифр равна $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Итак, $45 \leqslant 3k$, и значит, $k \geqslant 15$.

Пример требуемой расстановки цифр для $k = 15$:

$$- 0 - 9 - 5 - 1 - 8 - 4 - 3 - 7 - 2 - 6 - .$$

Критерии. Доказана оценка $k \geqslant 15$ — 4 балла. Приведён верный пример для $k = 15$ — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Угол A в треугольнике ABC равен $40°$. Окружность, проходящая через A и B и касающаяся BC, пересекает медиану к стороне BC (или ее продолжение) в точке M, отличной от A. Найдите угол BMC.

Ответ: $140°$.

Решение. (Рис. 2.) Обозначим через P середину BC. Угол между касательной BP и хордой BM измеряется половиной дуги, которую стягивает эта хорда, поэтому $\angle MBP = \angle BAM$. В треугольниках BMP и ABP имеются две пары равных углов: $\angle MBP = \angle BAP$ и $\angle BPM = \angle BPA$. Значит, эти треугольники подобны, и поскольку $BP = PC$, получаем

$$\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{PM} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PM}\,.$$

Отсюда следует подобие треугольников CMP и ACP, а из него равенство углов MCP и CAP. Таким образом, $\angle BMC = 180° - \angle MBC - \angle MCB = 180° - \angle MBP - \angle MCP = 180° - \angle BAP - \angle CAP = 180° - 40° = 140°$.

Критерии. За каждое доказанное равенство углов MBP и BAP или MCP и CAP, — по 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

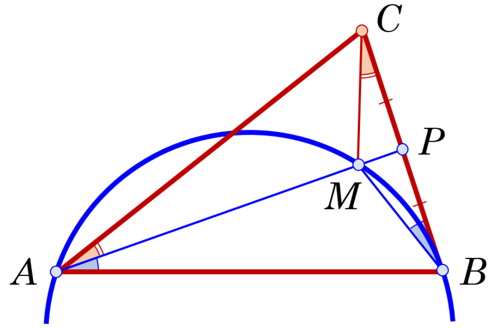

Рис. 2

10 класс

1. На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата? (*Киндер М.И.*)

Ответ: 18.

Решение. Пусть a и b, c и d — пары чисел, записанных на противоположных сторонах квадрата. Тогда $ac+cb+bd+da = 77$ или $(a+b)(c+d) = 77$. Все рассматриваемые числа — натуральные, поэтому значение каждой из скобок не меньше двух. Число 77 можно разложить на два множителя, каждый из которых не меньше двух, единственным образом: $77 = 7 \times 11$. Следовательно, $a+b$ и $c+d$ равны 7 и 11 (в каком-то порядке), поэтому сумма чисел, записанных на сторонах квадрата, равна $a+b+c+d = 7+11 = 18$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Найден ответ только путем подстановки конкретных чисел (например, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$) — 2 балла. Найден ответ с помощью разложения на множители — ещё 2 балла. При решении уравнения разобраны не все случаи — снижается 1 или 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Действительные числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b} = M$. Какие значения может принимать величина M?

Ответ: -1 *или* $1/2$.

Решение. Прибавим 1 к каждой дроби, тогда получим

$$\frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{c+a} = \frac{a+b+c}{a+b} = M+1.$$

Последние равенства выполняются при $a+b+c = 0$, причём сумма любых двух чисел (в силу ОДЗ) не равна нулю. Если же $a+b+c \neq 0$, то $b+c = c+a = a+b$, откуда $a = b = c$. В первом случае величина M равна -1, во втором — $M = 1/2$.

Критерии. Найден один или оба ответа только путем подстановки каких-то конкретных чисел (например, $a = b = c = t \Rightarrow M = 1/2$) — 1 балл. Найден один ответ с помощью преобразований системы уравнений, но не проверено, достигается ли он при каких-то a, b, c — 2 балла. Найден один ответ с помощью преобразований системы уравнений, из работы ясно, что он достигается — 3 балла. Найдены оба ответа с помощью преобразований системы уравнений, но не обосновано, почему других нет — 4 балла. Найдены оба ответа с помощью преобразований системы уравнений, но хотя бы для одного из них не проверено, достигается ли он — 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. По кругу написаны все целые числа от 0 до 12 в некотором порядке так, что сумма любых четырёх подряд идущих чисел не превосходит некоторого натурального числа k. При каком наименьшем k это возможно?

Ответ: *при* $k = 26$.

Решение. Пусть цифры расставлены по кругу требуемым образом. Если исключить 0, то остальные двенадцать чисел разбиваются на три группы из четырёх подряд идущих чисел. По условию сумма чисел в каждой группе не превосходит k, поэтому сумма всех чисел (включая ноль) не превосходит $3k$. С другой стороны, сумма всех чисел равна $0+1+2+\ldots+12 = 78$. Итак, $78 \leqslant 3k$, и значит, $k \geqslant 26$.

Пример требуемой расстановки цифр для $k = 26$:

$$- 0 - 12 - 6 - 7 - 1 - 11 - 5 - 8 - 2 - 10 - 4 - 9 - 3 - .$$

Критерии. Доказана оценка $k \geqslant 26$ — 4 балла. Приведён верный пример для $k = 26$ — 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Каждое из неотрицательных чисел x, y и z не больше 2. Докажите:

$$\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{y^2+(2-z)^2}+\sqrt{z^2+(2-x)^2} \leqslant 6.$$

Решение. Воспользуемся тем, что при неотрицательных a и b выполняется неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$. В этом легко убедиться, возведя в квадрат обе части этого неравенства. Применим его к каждому слагаемому левой части:

$$\sqrt{x^2+(2-y)^2} \leqslant x+(2-y),$$
$$\sqrt{y^2+(2-z)^2} \leqslant y+(2-z),$$
$$\sqrt{z^2+(2-x)^2} \leqslant z+(2-x).$$

Сложим эти неравенства и получим требуемое неравенство. Знак равенства достигается, например, при $x=y=z=0$ (или $x=y=z=2$).

Критерии. Утверждение доказано без обоснования неравенства $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$ — 5 баллов. При обосновании неравенства $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a+b$ допущены неточности — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

5. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте CC_1 точка M выбрана так, что $\angle AMB = 90°$. Найдите отношение $CM : MC_1$.

Ответ: $1:1$.

Первое решение. (Рис. 3.) Проведём высоты AA_1 и BB_1 в треугольнике ABC, тогда около четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность. Поскольку AB — диаметр этой окружности и $\angle AMB = 90°$, точка M также лежит на этой окружности. Докажем, что M — середина высоты, то есть $CM : MC_1 = 1:1$.

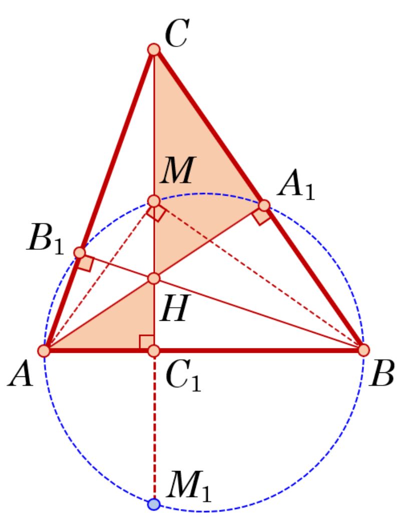

Рис. 3

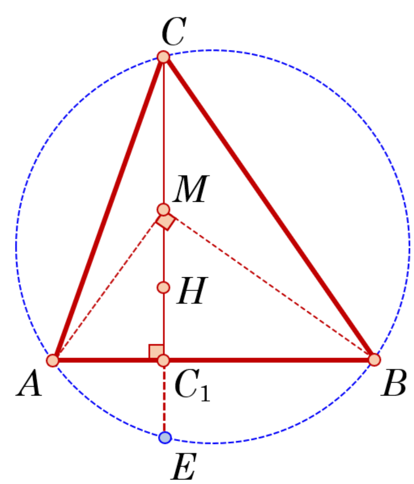

Рис. 4

Рассмотрим точку M_1 окружности, симметричную M относительно диаметра AB. Так как прямоугольные треугольники AC_1H и CA_1H подобны, то $AH : CH = C_1H : A_1H$. Следовательно, $CH \cdot C_1H = AH \cdot A_1H = MH \cdot M_1H$ (последнее равенство следует из свойства отрезков хорд окружности).

Пусть $C_1H = x$ и $MH = y$, тогда, по условию, $CH = 3x$ и $M_1H = M_1C_1 + C_1H = MC_1 + C_1H = MH + C_1H + C_1H = y + 2x$. Получим уравнение $3x^2 = y(y+2x) \Leftrightarrow y^2 + 2xy - 3x^2 = 0$. Решая его как квадратное относительно переменной y, получим, что $y = x$ или $y = -3x$. Второе равенство невозможно, значит, $MH = C_1H = x$, отсюда $CM = CH - MH = 2x = MC_1$, то есть M — середина CC_1.

Второе решение. (Рис. 4.) Воспользуемся известным фактом: точки, симметричные точке пересечения высот относительно сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC. Пусть точка E симметрична ортоцентру H относительно AB. Тогда $EC_1 = HC_1 = x$, $MH = a$, $AC_1 = y$, $BC_1 = z$.

Из прямоугольных треугольников AC_1M и BC_1M получим, что $AM^2 = y^2 + (x+a)^2$, $BM^2 = z^2 + (x+a)^2$. Кроме того, для отрезков пересекающихся хорд AB и CE окружности справедливо равенство $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot EC_1$, то есть $yz = 4x^2$. Из прямоугольного треугольника AMB: $AM^2 + BM^2 = AB^2$, то есть $y^2 + z^2 + 2(x+a)^2 = (y+z)^2$. Отсюда $(x+a)^2 = yz = 4x^2$, и значит, $x + a = 2x$, $x = a$. Таким образом, $CM : MC_1 = 1 : 1$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что основания высот AA_1, BB_1 и точка M лежит на одной окружности (с диаметром AB) — 1 балл. Составлено уравнение для отрезков пересекающихся хорд — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

11 класс

1. В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 110 отличников и 100 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

Ответ: *а*) 15 *учеников; б*) *на* 5.

Решение. *а*) Пусть x — количество школьников в кружке. Поскольку каждый высказался об остальных $(x-1)$ школьниках, общее число ответов равно $x \cdot (x-1) = 110 + 100$, откуда $x = 15$.

б) Пусть среди 15 школьников было a отличников и b хулиганов, тогда $a+b = 15$. Подсчитаем, сколько было ответов «хулиган». Его дал каждый из a отличников про каждого из b хулиганов, и таких ответов было ab. Столько же было ответов «хулиган» от каждого из b хулиганов про каждого из a отличников. Всего было дано $2ab = 100$ ответов «хулиган», то есть $ab = 50$.

Зная сумму и произведение, находим сами числа a и b — это 5 и 10. По условию отличников было меньше, чем хулиганов, значит, $a = 5$, $b = 10$, и $b - a = 5$.

Критерии. Правильное решение пункта *а*) — 3 балла, пункта *б*) — 4 балла. Только ответ и пример к условию задачи — 2 балла. Правильно указано только количество школьников в кружке — 1 балл.

2. Сколько делителей числа 10^{1000} не являются делителями числа 10^{999}?

Ответ: 2001.

Первое решение. Любой делитель числа 10^{1000} имеет вид $2^m 5^n$, где $0 \leqslant m \leqslant 1000$ и $0 \leqslant n \leqslant 1000$, и он не будет делителем числа 10^{999}, только если $m = 1000$ или $n = 1000$. При $m = 1000$ число n может принимать все значения от 0 до 1000, всего 1001 вариант. Аналогично для $n = 1000$. При таком подсчёте вариант $m = n = 1000$ мы учтём дважды. Значит, всего подходящих делителей имеется $1001 + 1001 - 1 = 2001$.

Второе решение. Известно, что у числа $2^m 5^n$ ровно $(m+1)(n+1)$ делителей. В частности, число $10^n = 2^n 5^n$ имеет $(n+1)(n+1) = (n+1)^2$ делителей. Значит, искомое число делителей равно $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, где $n = 1000$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Верно указан вид требуемых делителей ($2^m 5^n$, где $m = 1000$ или $n = 1000$.) — 3 балла. Допущена ошибка при подсчёте (например, вариант $m = n = 1000$ подсчитан дважды) — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. На каждой из 100 карточек записано по одному числу, отличному от нуля, при этом каждое число равно кубу суммы всех остальных. Какие это числа?

Ответ: *все числа равны* $1/\sqrt{99^3}$ *или все числа равны* $-1/\sqrt{99^3}$.

Решение. Пусть записаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Докажем, что все числа равны друг другу.

Установим, например, что $a_1 = a_2$. Предположим $a_1 > a_2$; по условию $(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100})^3 > (a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100})^3$. Неравенство $x^3 > y^3$ равносильно $x > y$, поэтому

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} > a_1 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} \quad \Longleftrightarrow \quad a_2 > a_1,$$

противоречие. Таким образом, все числа a_i одинаковы. Обозначим число, записанное на каждой карточке, через x. Тогда $(99x)^3 = x$. Так как $x \neq 0$, то $99^3 x^2 = 1$, и значит, $x = \pm 1/\sqrt{99^3}$.

Критерии. Разобран только случай, когда все числа равны друг другу — 2 балла. Доказано равенство всех чисел — 5 баллов. Указан лишь один набор — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. Сумма положительных чисел a, b и c не меньше 3. Докажите, что

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant 2.$$

Решение. Преобразуем числитель каждой дроби, используя тождество $a^3+b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)-2ab(a+b)$, а затем воспользуемся очевидным неравенством $a^2+ab+b^2\geqslant 3ab$:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}=a+b-\frac{2ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geqslant a+b-\frac{2ab(a+b)}{3ab}=\frac{1}{3}(a+b).$$

Применяя эти рассуждения к каждому слагаемому, приходим к неравенству

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant \frac{2}{3}(a+b+c).$$

Далее, по условию $a+b+c\geqslant 3$, поэтому отсюда получаем требуемое утверждение.

Критерии. Доказано верное неравенство для каждой отдельной дроби — 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В остроугольном треугольнике ABC точка пересечения высот H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте CC_1 точка M выбрана так, что $\angle AMB=90°$. Найдите отношение $CM:MC_1$.

Ответ: $1:1$.

Первое решение. (Рис. 5.) Проведём высоты AA_1 и BB_1 в треугольнике ABC, тогда около четырёхугольника AB_1A_1B можно описать окружность. Поскольку AB — диаметр этой окружности и $\angle AMB=90°$, точка M также лежит на этой окружности. Докажем, что M — середина высоты, то есть $CM:MC_1=1:1$.

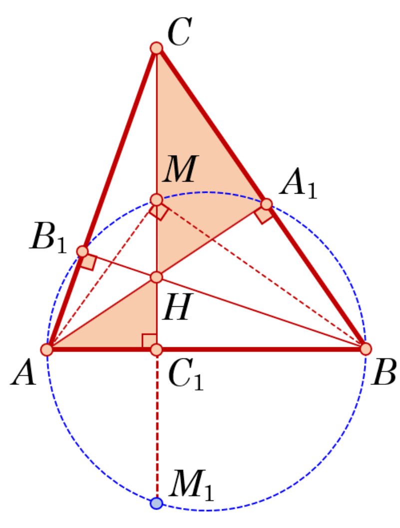

Рис. 5

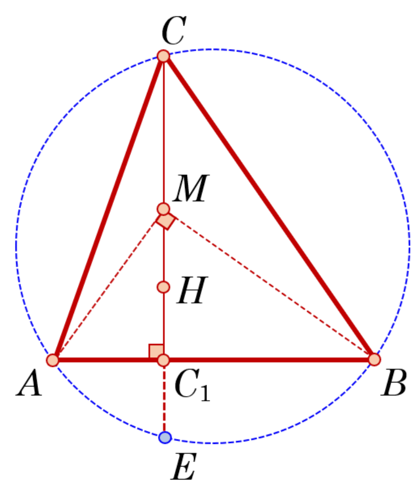

Рис. 6

Пусть M_1 — точка окружности, симметричная M относительно диаметра AB. Так как прямоугольные треугольники AC_1H и CA_1H подобны, то $AH:CH=C_1H:A_1H$. Следовательно, $CH\cdot C_1H=AH\cdot A_1H=MH\cdot M_1H$ (последнее равенство следует из свойства отрезков хорд окружности).

Пусть $C_1H=x$ и $MH=y$, тогда, по условию, $CH=3x$ и $M_1H=M_1C_1+C_1H=MC_1+C_1H=MH+C_1H+C_1H=y+2x$. Получим уравнение $3x^2=y(y+2x)\Leftrightarrow y^2+2xy-3x^2=0$. Решая его как квадратное относительно переменной y, получим, что $y = x$ или $y = -3x$. Второе равенство невозможно, значит, $MH = C_1H = x$, отсюда $CM = CH - MH = 2x = MC_1$, то есть M — середина CC_1.

Второе решение. (Рис. 6.) Воспользуемся известным фактом: точки, симметричные точке пересечения высот относительно сторон, лежат на описанной окружности треугольника ABC. Пусть точка E симметрична ортоцентру H относительно AB. Тогда $EC_1 = HC_1 = x$, $MH = a$, $AC_1 = y$, $BC_1 = z$.

Из прямоугольных треугольников AC_1M и BC_1M получим, что $AM^2 = y^2 + (x+a)^2$, $BM^2 = z^2 + (x+a)^2$. Кроме того, для отрезков пересекающихся хорд AB и CE окружности справедливо равенство $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot EC_1$, то есть $yz = 4x^2$. Из прямоугольного треугольника AMB: $AM^2 + BM^2 = AB^2$, то есть $y^2 + z^2 + 2(x+a)^2 = (y+z)^2$. Отсюда $(x+a)^2 = yz = 4x^2$, и значит, $x + a = 2x$, $x = a$. Таким образом, $CM : MC_1 = 1 : 1$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что основания высот AA_1, BB_1 и точка M лежит на одной окружности (с диаметром AB) — 1 балл. Составлено уравнение для отрезков пересекающихся хорд — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.