ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 05 октября 2022 г.

Аннотация: *Практические занятия. Отделимые нумерации. Трансляционно полные и предполные алгебры. Негативность хаусдорфовых трансляционно предполных алгебр. Алгебры предшествования и следования. Представимость трансляционно полной алгебры над любой негативной эквивалентностью.*

Пусть ν — нумерация некоторой алгебры A. Очевидно, что совокупность перечислимых (вычислимых) $ker(\nu)$–замкнутых множеств образует базу некоторой естественной топологии на множестве классов эквивалентности $ker(\nu)$, которую мы назовём *перечислимой (вычислимой) топологией*. Отождествляя элементы $a \in A$ с их множествами ν–номеров, т.е. соответствующими $\nu^{-1}(a)$-классами эквивалентности $ker(\nu)$, мы можем также говорить о соответствующей топологии на нумерованной алгебре $(A; \nu)$.

Пусть T_i — одна из стандартных топологических аксиом $(i \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$ и ν — нумерация алгебры A.

Определение 1

Нумерация ν называется T_i–отделимой (T_i–вычислимо отделимой), если топология на A, порождённая перечислимыми (вычислимыми) $ker(\nu)$–замкнутыми множествами, удовлетворяет аксиоме T_i.

Каждая из аксиом T_i утверждает существование некоторых открытых множеств в топологии, отделяющих одни объекты от других (например, аксиома T_0 утверждает, что для любых различных точек a и b существует открытое множество O, отделяющее эти точки, т.е. такое, что $a \in O \leftrightarrow b \notin O$ либо $b \in O \leftrightarrow a \notin O$). Любое семейство S, состоящее из открытых множеств такое, что отделяющие множества в соответствующей аксиоме T_i всегда можно выбрать из S, будем называть *отделяющим семейством.*

При этом, в случае T_0–вычислимо отделимых нумерованных алгебр топологические характеризации соответствующих пространств в терминах аксиом отделимости очень просты:

Утверждение 1. Нумерация ν является T_0–вычислимо отделимой тогда и только тогда, когда она является T_i–вычислимо отделимой для каждого $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Для T_0–отделимых нумераций это не так. Пример – связное двоеточие.

Замечательным свойством перечислимых и вычислимых топологий является непрерывность всех операций алгебры, представленных действиями соответствующих вычислимых функций на основном множестве алгебры, относительно этих топологий, причем свойство непрерывности имеет место и в случае сигнатур произвольной алгоритмической сложности

Пусть $(\omega/\eta; F)$ – произвольная η-алгебра (т.е. алгебра, определимая над η). Заметим, что мы не предполагаем вычислимости семейства F рекурсивных функций, для которых η является конгруэнцией.

Допустим, что $f \in F$ и местность n операции f не меньше 2.

Зафиксируем набор $\overline{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Нужно показать, что для любого η-замкнутого вычислимого (вычислимо перечислимого) множества X, содержащего число $f(x_1, \ldots, x_n)$, существуют такие η-замкнутые рекурсивные (соответственно рекурсивно перечислимые) множества $X_1 \ni x_1, \ldots, X_n \ni x_n$, что $f(X_1, \ldots, X_n) \subseteq X$.

Рассмотрим элементарную трансляцию $\lambda x_1.f(x_1,\ldots,x_n)$, т.е. функцию от одной переменной x_1, для которой $x_2,\ldots,x_n$ играют роль фиксированных параметров (здесь используется стандартное λ-обозначение Черча.
Очевидно, что множество X_1, определяемое как $X_1=\{y|f(y,x_2,\ldots,x_n)\in X\}$, является η-замкнутым вычислимым (вычислимо перечислимым) множеством, если вычислимо (вычислимо перечислимо) X. Имея процедуру разрешения (перечисления) для X_1, равномерно строящуюся по соответствующему индексу для X, построим $X_2=\{y|z\in X_1\wedge f(z,y,x_3,\ldots,x_n)\in X\}$, которое также является η-замкнутым вычислимым (перечислимым) и, очевидно, $f(X_1,X_2,x_3,\ldots,x_n)\subseteq X$. Продолжая эти рассуждения получим искомую систему эффективных окрестностей $X_1,\ldots,X_n$, прямое произведение которых отображается операцией f во внутренность X.

Пусть (A, ν) – нумерованная алгебра эффективной сигнатуры Σ и ν – отделимая нумерация. Обогатим сигнатуру Σ счетным множеством констант $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающимся с Σ, интерпретируя константу c_n в элемент νn алгебры A. Переменной будем называть любой элемент множества $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающегося с $\Sigma \cup C$.

Трансляцией $t(x)$ назовем любой терм от одной переменной x, который можно получить из подходящего терма сигнатуры $\Sigma \cup C$ путем замены всех его переменных (из множества X) на x. Таким образом, всякая трансляция алгебры A задает на ней одноместную операцию, однозначно определенную интерпретациями всех символов обогащенной сигнатуры. Множество всех трансляций будем обозначать через $T(x)$.

ν-интерпретацией трансляции $t(x)$ в нумерации ν алгебры A назовем одноместную функцию $t_\nu(x)$, получаемую из $t(x)$ подстановкой вместо всех Σ-символов соответствующих рекурсивных функций и натуральных чисел (для Σ-констант), представляющих операции алгебры A в нумерации ν. Таким образом, каждая ν-трансляция определяет одноместную общерекурсивную функцию, представляющую соответствующую трансляцию алгебры A.
Множество ν-интерпретаций всех трансляций из $T(x)$ обозначим через $T_\nu(x)$.
Хорошо известно, что отношение эквивалентности на основном множестве алгебры A является ее конгруэнцией тогда и только тогда, когда эта эквивалентность согласована со всеми трансляциями этой алгебры.

Теперь заметим, что в силу эффективности сигнатуры Σ и рекурсивной перечислимости $T(x)$ множество $T_\nu x)$ вычислимо, т.е. существует эффективная процедура, равномерно трансформирующая номер ν-трансляции в способ вычисления соответствующей вычислимой функции. Более формально, в качестве нумерации соответствующего семейства вычислимых функций удобно принять нумерацию этого семейства синтаксическими выражениями из $T(x)$, т.к. существует очевидное эффективное соответствие между трансляциями и ν-трансляциями. С использованием стандартных λ-обозначений Чёрча множество вычислимых ν-трансляций можно записать как $T_\nu(x) = \{\lambda x.t_\nu(x) \mid t(x) \in T(x)\}$, где все символы в $t(x)$, за исключением переменной x, представлены интерпретациями сигнатурных символов в нумерации ν. Вполне очевидна вычислимость этого семейства, поэтому мы не будем вдаваться в детали построения конкретной вычислимой геделевской нумерации $\gamma : \omega \to T_\nu(x)$.

Пусть A_0, A_1 – разбиение основного множества алгебры A на две непересекающиеся части и $\Theta(A)$ – решетка всех конгруэнций этой алгебры. Рассмотрим множество $\Theta(A_0, A_1)$ всех тех конгруэнций алгебры A, никакая из которых не отождествляет никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1, т.е.
$\Theta(A_0, A_1) = \{\theta \mid \theta \in \Theta(A) \wedge (x = y\ (mod\ \theta) \rightarrow\ ((x \in A_0 \wedge y \in A_0) \vee (x \in A_1 \wedge y \in A_1)))\}$.

Лемма 1

В $\Theta(A_0, A_1)$ существует наибольший элемент.

Доказательство. Множество $\Theta(A_0, A_1)$ непустое, т.к. в нем содержится нулевая конгруэнция. Пусть θ^* есть точная верхняя грань для $\Theta(A_0, A_1)$. Покажем, что $\theta^* \in \Theta(A_0, A_1)$. В самом деле, $a = b\ (mod \theta^*)$ равносильно существованию конечной цепочки $a = a_0\theta_0 a_1\theta_1 \dots a_{m-1}\theta_{m-1}a_m = b$, в которой все $\theta_i \in \Theta(A_0, A_1)$.

Остается заметить, что как a, так и b обязаны принадлежать одному и тому же множеству A_i, т.к. никакое звено этой цепочки не может изменить членство в этих множествах. *Лемма доказана.*
Пусть $\nu m \neq \nu n$. Из отделимости ν следует существование η-замкнутого вычислимо перечислимого множества α (где η – обозначает нумерационную эквивалентность нумерации ν), отделяющего эти элементы. Пусть, для определенности, $m \in \alpha$ и $n \notin \alpha$. Положим $A_0 = \nu\alpha$ и $A_1 = \nu(\omega \setminus \alpha)$, тогда множества A_0, A_1 образуют разбиение основного множества алгебры A на две дизъюнктные части. По лемме 1 существует наибольшая конгруэнция θ^*, не "склеивающая" никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1. Очевидно, $\nu m \neq \nu n(\pmod{\theta^*})$. Поскольку θ^* – наибольшая конгруэнция, различающая элементы νm и νn алгебры A, то всякая ненулевая конгруэнция фактор-алгебры A/θ^* содержит пару элементов $\langle \nu m/\theta^*, \nu n/\theta^* \rangle$.

Практические занятия

Рассмотрим нумерованную фактор-алгебру $(A/\theta^*, \nu^*)$ нумерованной алгебры (A, ν), где ν^* обозначает естественную нумерацию фактор-алгебры, индуцированную нумерацией ν, т.е. $\nu^* = \theta^* \nu$. Точно так же, любой гомоморфизм нумерованных алгебр является непрерывным отображением соответствующих топологических пространств (как эффективно, так и вычислимо порожденных), т.к. рассматриваемые нами гомоморфизмы являются морфизмами. Следующий факт сводит изучение отделимых нумераций алгебр к их вычислимым (в смысле Ю.Л.Ершова) нумерациям.

Теорема об эффективной аппроксимируемости.

Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.

Лемма 2

Фактор-алгебра A/θ^* с естественной нумерацией $\nu^* = \theta^* \nu$ эффективно отделима.

Пусть $t_0, t_1, \ldots,$ – вычислимая последовательность всех ν-трансляций. Рассмотрим последовательность множеств $t_0^{-1}(\alpha), t_1^{-1}(\alpha), \ldots$. Тогда эта последовательность, очевидно, вычислима и, с учетом вышесказанного, является отделяющей для нумерации ν^*. *Лемма доказана.*

Следовательно, для любой пары различных элементов алгебры (A, ν) найдется эффективный на номерах гомоморфизм из этой алгебры на подходящую эффективно отделимую алгебру, различающий эти элементы.

Отделимость эффективно отделимой нумерованной алгебры очевидна. *Теорема доказана.*

Напомним, что алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если пересечение всех ее ненулевых конгруэнций есть ненулевая конгруэнция [1]. Другими словами, для такой алгебры не существует семейства разделяющих ненулевых конгруэнций, прямое произведение по факторам которых аппроксимировало бы данную алгебру.

Решетка конгруэнций алгебры называется *артиновой (нетеровой)*, если не существует строго бесконечно убывающей (соответственно возрастающей) цепи конгруэнций.

Конгруэнцией θ универсальной алгебры A сигнатуры Σ называется любая эквивалентность на A, сохраняющая все операции, т.е. $\forall f \in \Sigma \forall \overline{x} = \overline{y} \pmod{\theta} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \pmod{\theta}$.

Если алгебра не имеет нетривиальных конгруэнций (кроме нулевой $id\ A$ и единичной A^2), то она называется конгруэнц-простой.

[1] Г. Биркгоф. Теория решеток. М., Наука, 1984, 568 с.

Напомним, что нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (под аппроксимируемостью понимается наличие семейства разделяющих вычислимых гомоморфизмов). Из этой характеризации вытекает факт негативности как всякой вычислимо отделимо нумерованной подпрямо неразложимой алгебры, так и любой вычислимо отделимо нумерованной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций.

В частности, имеет место

Утверждение Всякая нумерованная конгруэнц-простая алгебра, обладающая нетривиальным вычислимым подмножеством, является негативной.

Однако, по-видимому, класс отделимых нумераций алгебр является более фундаментальным объектом с точки зрения дескриптивной теории вычислимости, т.к. именно наличие вычислимо перечислимых невычислимых множеств придает теории алгоритмов изящество, глубину и универсальность и образует тот плацдарм, с которого собственно говоря и начинаются построения различных иерархий. Семейство Ω перечислимых множеств называется вычислимым, если существует такая его нумерация $\nu : \omega \to \Omega$, что множество $\{\langle x, y\rangle | y \in \nu x\}$ перечислимо.

Определение 2

Нумерованная алгебра называется T_0–эффективно отделимой, если существует вычислимое семейство отделяющих вычислимо перечислимых множеств.

Далее T_0-эффективно отделимые нумерованные алгебры будем называть эффективно отделимыми.

Унарная термальная операция с фиксированными элементами алгебры в качестве параметров называется трансляцией.

Определение универсальной полноты

Универсальная алгебра называется трансляционно полной, если всякая упорядоченная пара различных ее элементов переводится в любую другую упорядоченную пару различных элементов подходящей трансляцией.

Замечание 1. Важнейшими примерами трансляционно полных алгебр являются тела. В самом деле, пусть $a \neq b$ и $c \neq d$ – фиксированные элементы тела $\Re$, $T(a)$ – множество всех трансляций вида $\{\lambda x.[r(x-a)+c] | r \in \Re\}$. Тогда любая трансляция из $T(a)$ переводит элемент a в c, но единственная трансляция из $T(a)$, а именно $t(x) = (d-c)(b-a)^{-1}(x-a)+c$ (при $r = (d-c)(b-a)^{-1}$) переводит элемент b в d, т.е. трансляция $t(x)$ осуществляет перевод пары $\langle a, b\rangle$ в пару $\langle c, d\rangle$.

Будем говорить, что пара $\langle c, d\rangle$ трансляционно достижима из пары $\langle a, b\rangle$, если существует такая трансляция t, что $t(a) = c \wedge t(b) = d$ либо $t(a) = d \wedge t(b) = c$. Заметим, что если алгебра содержит тождественную операцию, то пара $\langle a, b\rangle$ всегда будет трансляционно достижима из пары $\langle b, a\rangle$.

Определение 4. Универсальная алгебра называется трансляционно предполной, если существует такая пара её различных элементов, которая трансляционно достижима из любой другой пары различных элементов.

Очевидно, что трансляционная предполнота алгебры влечет её подпрямую неразложимость (т.к. пересечение всех ненулевых конгруэнций ненулевое). Однако, вообще говоря из подпрямой неразложимости алгебры не следует ее трансляционная предполнота. Неформально говоря, трансляционная предполнота алгебры означает наличие весьма богатого семейства трансляций, позволяющего достигать фиксированной пары элементов алгебры непосредственным действием подходящих трансляций, минуя процесс "склеек" пар элементов, порожденных соответствующей главной конгруэнцией (конгруэнтным замыканием).

Пусть $P = (\omega; p)$ – алгебра предшествования, $S = (\omega; s)$ –алгебра следования

Предложение Для алгебры P справедливо следующее:
(1) P имеет артинову и ненетерову решётку конгруэнций;
(2) решётка конгруэнций алгебры P изоморфна $\omega + 1$;
(3) решётка подалгебр алгебры P также изоморфна $\omega + 1$;
(4) всякая фактор–алгебра P/θ по ненулевой конгруэнции θ изоморфна P;
(5) группа автоморфизмов алгебры P тривиальна.
(6) P трансляционно предполна, но не полна и подпрямо неразложима.

Проверить алгебру S на наличие этих свойств.

Пусть SDI – класс подпрямо неразложимых алгебр, ALC – класс алгебр с артиновыми решетками конгруэнций.
Очевидно, $P \in SDI \cap ALC$.
Обозначим через $Simp$ класс простых алгебр, $TrComp$ – класс трансляционно полных алгебр и $TrPrComp$ – класс трансляционно предполных алгебр.

Предложение Имеют место следующие соотношения:
(1) $Simp \cup TrPrComp \subsetneq SDI$;
(2) $Simp \setminus TrPrComp \neq \varnothing$;
(3) $TrPrComp \setminus Simp \neq \varnothing$;
(4) $TrComp \subsetneq TrPrComp$;
(5) $TrComp \subseteq Simp \cap TrPrComp$;
(6) $TrPrComp \setminus ALC \neq \varnothing$;
(7) $ALC \setminus TrPrComp \neq \varnothing$.

Теорема 2 Всякая T_2–отделимая нумерация трансляционно предполной алгебры является негативной.

Доказательство. По условию имеютя два элемента a, b алгебры, в которую трансляционно отображается любая другая пара различных элементов. Если μ – T_2-отделимая нумерация, то

$$\mu x \neq \mu y \Leftrightarrow \exists t \in T(z)[t(x) \in \mu^{-1}(a) \wedge t(y) \in \mu^{-1}(b)].$$

В частности, всякая T_2-отделимая нумерация алгебры P является негативной.

Следствие Всякая позитивная нумерация трансляционно предполной алгебры является разрешимой.

Практические занятия

В отличие от позитивности, которую при различных построениях приходится аккуратно поддерживать, свойство негативности, напротив, оказалось очень тесно связанным с сильными типами отделимости и его ликвидация связана с определенными трудностями. В случае эквивалентностей (т.е. алгебр пустой сигнатуры) затруднений не возникает, т.к. любая позитивная эквивалентность (так же, как и негативная) является эффективно отделимой. Более того, покажем, что позитивные и негативные эквивалентности дают примеры равномерно T_2-отделимых нумераций (т.е. существует эффективная процедура, которая по паре различных по модулю ядра эквивалентности натуральных чисел "выдает" алгоритмы перечисления пары замкнутых непересекающихся множеств, содержащих данную пару чисел).

Предложение 3. Позитивные и негативные эквивалентности являются равномерно эффективно T_2–отделимыми.

Теорема 3. Существует T_1-отделимо нумерованная подпрямо неразложимая алгебра не являющаяся негативной.

Доказательство основано на построении такого T_1-отделимого представления ν алгебры предшествования P, что не существует двух непересекающихся перечислимых $ker(\nu)$-замкнутых множеств.

Следствие 2. Существует подпрямо неразложимая алгебра с артиновой решеткой конгруэнций, обладающая T_1-отделимой не негативной нумерацией.

Следствие 3. Существует трансляционно предполная алгебра, обладающая T_1-отделимой не негативной нумерацией.

Рассмотрим простейшую бесконечную алгебру следования $S = \langle \omega, s \rangle, s(x) = x + 1$, являющуюся в некотором смысле "противоположной" алгебре предшествования P. Нетрудно заметить, что алгебра следования имеет нетерову решетку конгруэнций (более того, всякая ее ненулевая конгруэнция имеет конечный индекс).

Справедливо следующее

Предложение 4. Алгебра S имеет вычислимо отделимые (а значит и T_4-отделимые) нумерации, алгоритмические сложности ядер которых превосходят любую наперед заданную.

В то же время, любая отделимая нумерация алгебры P эффективно отделима.

Рассмотрим теперь связи между свойствами негативности нумераций универсальных алгебр из рассматриваемых нами классов алгебр с условиями конечности и аксиомами отделимости соответствующих топологических пространств, порожденных перечислимыми множествами.

Теорема 2 дает достаточное (трансляционная предполнота), но не необходимое условие негативности любого T_2-отделимого представления алгебры. Покажем, что существует естественный пример конгруэнц-простой, но не трансляционно предполной бесконечной алгебры, всякая T_1-отделимая (не говоря уже о T_2-отделимой) нумерация которой негативна (даже разрешима!).

Предложение 5. Пусть $M = (\omega; f)$ – алгебра с одной трёхместной операцией, определённой как

$$f(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y \\ x, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Тогда всякая T_1-отделимая нумерация алгебры M является разрешимой.

Замечание 2. Алгебра M является простой (т.е. подпрямо неразложимой) и, очевидно, не трансляционно предполной.

Замечание 3. Пусть ν – любая нумерация тела $\Re$, для которой существует нетривиальное перечислимое (в нумерации ν) подмножество множества $\Re$. Тогда ν негативна.

Таким образом, всякая T_0-отделимая нумерация любого тела является негативной. При этом, очевидно, что всякое тело дает пример подпрямо неразложимой алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, которая к тому же трансляционно полна (тем более трансляционно предполна). Однако, в отличие от предыдущего примера алгебры M (всякая T_1-отделимая нумерация которой разрешима), любое бесконечное тело, имеющее разрешимую нумерацию, обладает также и негативной наразрешимой нумерацией [2].

[2] B.M. Khoussainov, T.A. Slaman, P.M. Semukhin. Π_1^0–Presentasions of Algebras // Archive for Mathematical Logic, 2006, 45, No 6, 769-781

Остается открытым принципиальный вопрос о существовании T_2-отделимо нумерованных не негативных подпрямо неразложимых алгебр. Разумеется, согласно Теореме 1, такие алгебры (если они существуют) не будут трансляционно предполными. Самым сильным вариантом решения этого вопроса был бы пример T_2-отделимо нумерованной не негативной конгруэнц-простой алгебры.

1. Показать, что пересечение двух негативных (позитивных) эквивалентностей негативно (позитивно)

Решение:

Для негативных эквивалентностей

$$x \neq y \pmod{\eta_0 \cap \eta_1} \Leftrightarrow x \neq y \pmod{\eta_0} \vee x \neq y \pmod{\eta_1}.$$

Для позитивных

$$x = y \pmod{\eta_0 \cap \eta_1} \Leftrightarrow x = y \pmod{\eta_0} \wedge x = y \pmod{\eta_1}.$$

Определение 1

Нумерация μ семейства $\{\eta_n | n \in \omega\}$ негативных (позитивных) эквивалентностей называется вычислимой (в смысле Ю.Л.Ершова), если множество $\{\langle n, x, y\rangle | x \neq y \pmod{\mu(n)}, n \in \omega\}$ вычислимо перечислимо (соответственно $\{\langle n, x, y\rangle | x = y \pmod{\mu(n)}, n \in \omega\}$).

2. Показать, что пересечение вычислимого семейства негативных (позитивных) эквивалентностей негативно (позитивно)

Решение:

Для негативных эквивалентностей

$$x \neq y \pmod{\bigcap_{n\in\omega} \eta_n} \Leftrightarrow \exists n\, x \neq y \pmod{\eta_n}.$$

Для позитивных

$$x = y \pmod{\bigcap_{n\in\omega} \eta_n} \Leftrightarrow \forall n\, x = y \pmod{\eta_n}.$$

3. Показать, что вычислимо отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является негативно.
Решение:
Пусть $(\mathfrak{A}, \mu)$ вычислимо отделимая универсальная алгебра с артиновой решеткой конгруэнций. Если $\mathfrak{A}$ конечна, то доказывать нечего, т.к. кадый элемент алгебры будет μ-вычислимым. Если $\mathfrak{A}$. μ не является негативной, то существует негативная конгруэнция η_0, "склеивающая" какую-то пару различных элементов a_0, a_1 алгебры $\mathfrak{A}$. Но эти элементы различаются некоторой негативной конгруэнцией η_1. Пересечение $\eta_0 \bigcap \eta_1$ является негативной, а значит собственной (ненулевой и неединичной) конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$. Итерируя данную процедуру можно построить бесконечно убывающую цепь конгруэнций, что противоречит артиновости.

О представимости алгебр над эквивалентностями

Показать, что над любой негативной эквивалентностью представима конечно порожденная конгруэнц-простая алгебра.

О представимости алгебр над эквивалентностями

Существуют позитивные эквивалентности, над которыми представимы только локально конечные алгебры с континуальными решетками конгруэнций.

О совпадении перечислимых топологий

Показать, что для негативных нумераций перечислимо порожденная топология совпадает с вычислимо порожденной топологией.

Решение:

Следующее утверждение полезно для обозрения всех η_1-замкнутых расширений эквивалентности η_0.

О совпадении перечислимых топологий

Если α – η_1-замкнутое множество и η_1 является расширением η_0, то α также и η_0-замкнуто (т.е. свойство замкнутости наследуемо "'вниз" относительно "расщеплений" эквивалентностей).

В самом деле, если α – η_1-замкнуто, $x \in \alpha$ и $x = y \pmod{\eta_0}$, то, т.к. $\eta_0 \subseteq \eta_1$, имеем $y \in \alpha$.
Априори, эффективно отделимые компактные пространства казались довольно редкими объектами. Следующее утверждение показывает, что это не так.

О компактных расширениях

Всякая бесконечная эквивалентность на ω имеет такое бесконечное расширение, эффективное (вычислимое) фактор-пространство по модулю которого является компактным.

Доказательство. Пусть η – бесконечная эквивалентность. Обозначим через $\{t_0 < t_1 < \dots\}$ ее характеристическую трансверсаль, выписанную в порядке строгого возрастания. Положим $\alpha_0 = \{t_0\}/\eta$, т.е. α_0 – это смежный η-класс, содержащий число 0.
η-замкнутое множество называется η-бесконечным (η-конечным), если оно состоит из бесконечного (конечного) числа смежных классов эквивалентности η.

Следующее утверждение представляет самостоятельный интерес

О компактных расширениях

Пусть Σ – счетное семейство η-замкнутых множеств, дополнения которых η-бесконечны. Тогда существует такое бесконечное расширение η^* эквивалентности η, что никакое η^*-замкнутое надмножество α_0 не является Σ-множеством (т.е. множеством из Σ).

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$. Будем строить возрастающую последовательность η-замкнутых и η-конечных множеств $\delta_0, \delta_1, \ldots$ по шагам.
Шаг 0. Т.к. σ_0 является η-кобесконечным, то существуют такие k, l, что $t_k \notin \sigma_0 \wedge t_l \notin \sigma_0$. Выберем среди таких чисел наименьшее (t_{k_0}) и следующее после наименьшего (t_{l_0}) и определим $\delta_0 = \alpha_0 \cup \{t_{k_0}\}/\eta$ (сразу отметим, что t_{l_0} никогда не попадет в строящееся объединение $\bigcup\limits_{n\in\omega} \sigma_n$).

Шаг n+1. Этот шаг посвящен добавлению некоторого η-класса, являющегося подмножеством $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ в $\bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$ с гарантированным невключением в это объединение какого-то другого η-класса, входящего в $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ (последнее нужно, чтобы η^* имела бесконечное число смежных классов).
Пусть $\{\langle t_{k_0}, t_{l_0}\rangle, \ldots, \langle t_{k_n}, t_{l_n}\rangle\}$ – все упорядоченные пары трансверсальных чисел, использовавшихся для включения (t_{k_i}) в построенные $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$. Выберем такие $t_{k_{n+1}} < t_{l_{n+1}}$, что оба эти числа трансверсальны, принадлежат $\omega \setminus \sigma_{n+1}$ и $t_{k_{n+1}}$ больше всех ранее использованных.
Положим $\delta_{n+1} = \delta_n \cup \{t_{k_{n+1}}\}/\eta$.
Конец шага n+1.
Определим $\delta = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$.
Пусть $\eta^* = \eta \cup \{\langle x, y\rangle | x, y \in \delta\}$.

Конструкция обеспечивает "склейку" бесконечного числа η-классов в один η^*-класс, содержащий число t_0 (=0). При этом, все η^*-классы вне множества δ совпадают с η-классами и число этих классов бесконечно. Наконец, никакое η^*-замкнутое расширение класса $\{t_0\}/\eta^* = \delta$ не является Σ-расширением, т.к. δ имеет непустое пересечение с дополнением каждого $\sigma_m \in \Sigma, m \in \omega$. *Лемма доказана.*

Согласно этой Лемме, например, для семейства всех η-перечислимых кобесконечных множеств можно построить такое бесконечное расширение η^* для η, что все η-перечислимые расширения некоторого η^*-класса β будут η^*-коконечны, т.е. η^*/ω-пространство будет компактным. При этом, все η-замкнутые перечислимые кандидаты на окрестности β с бесконечными дополнениями нами ликвидированы, а новым η^*-замкнутым множествам взяться неоткуда, т.к. всякое η^*-замкнутое множество является одновременно и η-замкнутым. Таким образом, фактор-пространство ω/η^* компактно относительно топологии, порожденной эффективными множествами.

Для вычислимо порожденных топологий ситуация аналогичная.

Теорема доказана.

О представимости

Над любой негативной эквивалентностью представима трансляционно полная универсальная алгебра.

Доказательство. Пусть η – негативная эквивалентность. Если характеристическая трансверсаль $tr(\eta)$ конечна, то η разрешима и доказывать нечего. Поэтому предполагаем, что $tr(\eta) = \{t_0, t_1, \ldots\}$ бесконечна. Заметим, что $tr(\eta)$ перечислима, т.к. $x \in tr(\eta) \Leftrightarrow \forall z < x(z \neq x \pmod{\eta})$. Покажем, что для любой пары $x \neq y \pmod{\eta}$ существует разрешимое η-замкнутое множество, отделяющее x, y и, более того, это множество равномерно строится по данным x, y.
Шаг 0. $A_x^0 = \{x\}, A_y^0 = \{y\}$.
Шаг $s+1$. Пусть z – наименьшее натуральное число, не принадлежащее $A_x^s \cup A_y^s$. Проверяем z на предмет его отвержения хотя бы одним из множеств A_x^s, A_y^s.

Если z отвергается A_x^s, то полагаем $A_x^{s+1} = A_x^s, A_y^{s+1} = A_y^s \cup \{z\}$; если x отвергается A_y^s, то $A_x^{s+1} = A_x^s \cup \{z\}, A_y^{s+1} = A_y^s$. Если z отвергается обоими множествами, то относим его к A_x^{s+1}. Конец шага $s+1$.

Определим

$$A_x = \bigcup_{s \in \omega} A_x^s, A_y = \bigcup_{s \in \omega} A_y^s.$$

Индукцией по шагам построения легко показать, что каждый шаг заканчивается с отнесением текущего тестируемого натурального числа к одному из двух множеств, а также тот факт, что $[A_x^s]_\eta \cap [A_y^s]_\eta = \emptyset$ для любого шага s. Поэтому перечислимые A_x, A_y не пересекаются, являются η-замкнутыми и их объединение покрывает все ω. Равномерная зависимость индексов характеристических функций A_x, A_y от x, y очевидна.

Теперь для каждой пары $\langle x, y\rangle$ различных по модулю η чисел построим вычислимое семейство трансляций $T_{x,y} = \{f_{x,y,m,n} | m, n \in \omega\}$ следующим образом:

$$z \in A_x \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_m; z \in A_y \Rightarrow f_{x,y,m,n}(z) = t_n,$$

где $t_m, t_n \in tr(\eta), m \neq n$.
Наконец, определим вычислимое семейство трансляций

$$T = \bigcup_{x \neq y \pmod{\eta}} T_{x,y}.$$

Очевидно, что любая трансляция $f \in T$ согласована с η, т.е. $x = y \pmod{\eta} \Rightarrow f(x) = f(y) \pmod{\eta}$ и потому корректно определена фактор-алгебра $\langle \omega/\eta; T\rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; T\rangle$ по конгруэнции η. Т.к. для любой пары различных по модулю η чисел x, y и любых различных $t_m, t_n \in tr(\eta)$ найдется трансляция из T, переводящая x в t_m и y в t_n, то алгебра $\langle \omega/\eta; T\rangle$ трансляционно полна.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!