Известия вузов. Математика
2016, № 10, с. 29–35

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.С. ЛЕОНОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНОК ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. Рассматривается понятие линейной априорной оценки точности приближенных решений обратных задач с возмущенными данными. Устанавливается, что если для некоторого метода решения обратной задачи справедлива линейная оценка, то эта задача корректна по А.Н. Тихонову. Указываются условия и метод решения обратной задачи, не зависящий от погрешностей данных (метод квазирешений В.К. Иванова), обеспечивающие справедливость обратного утверждения: для них корректность по Тихонову ведет к линейной оценке точности приближений. Приводится пример класса нелинейных обратных задач, для которых приближения метода квазирешений имеют линейную оценку точности. В случае, если погрешности данных известны, изучается специальный метод решения корректных по Тихонову задач с линейной оценкой точности — метод невязки на множестве корректности. Дается конструктивный алгоритм реализации этого метода.

Ключевые слова: обратные задачи, линейные априорные оценки точности, корректность по Тихонову.

УДК: 519.642

Введение

Пусть Z и U — гильбертовы пространства. Рассмотрим операторное уравнение $F(z) = u$ с непрерывным (в общем случае нелинейным) оператором $F : Z \to U$. Считаем, что для правой части $u = \overline{u} \in U$ оно разрешимо, и для этой правой части существует решение $\overline{z} \in Z$ с минимальной нормой (нормальное решение). Величина u известна с погрешностью δ: дан такой элемент $u_\delta \in U$, что $\|\overline{u} - u_\delta\| \le \delta$. Оператор $F(z)$ также известен с погрешностью: для приближенного оператора $F_h(z) : Z \to U$ выполнено условие аппроксимации $\|F(z) - F_h(z)\| \le \Psi(h, \|z\|)\ \ \forall z \in Z$. Здесь $\Psi(h, t)$ — мера аппроксимации точного оператора приближенным, вид которой будет уточнен ниже. Будем обозначать через $\eta = (\delta, h)$ меры точности аппроксимации данных.

Так как задача нахождения по величинам (u_δ, F_h) приближения $z_\eta \in Z$ к $\overline{z}$ часто оказывается некорректно поставленной, то для ее решения применяются регуляризующие алгоритмы (регуляризаторы, РА [1]). Многие РА могут быть записаны в форме $z_\eta = R_\eta(u_\delta, F_h)$, где R_η – некоторый зависящий, вообще говоря, от η оператор, действующий из множества допустимых приближенных данных в Z.

В теории обратных и некорректно поставленных задач принята следующая схема получения априорной оценки точности приближения z_η (например, работы [2]–[9] и библиография

Поступила 05.03.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00182-а, 14-01-91151-ГФЕН-а).

в них). Фиксируется некоторое множество $M \subset Z$, содержащее точное нормальное решение $\overline{z}$, и вводится величина

$$\Delta_M(\eta) = \sup_{z\in M,\ (u_\delta,F_h)\in\Sigma_\eta(F,z)} \|R_\eta(u_\delta,F_h)_z\|\,.$$

Здесь $\Sigma_\eta(F,z) = \{(u_\delta,F_h) : u_\delta \in U : \|u_\delta - u\| \le \delta,\ \|F(z)-F_h(z)\| \le \Psi(h,\|z\|);\ u = F(z)\}$ — множество всех допустимых приближенных данных уравнения $F(z) = u$ при заданных уровнях их погрешностей η. Далее, находится функция $\varphi_M(\eta)$ такая, что $\Delta_M(\eta) \le \varphi_M(\eta)$ для любых допустимых η. Тогда $\|z_\eta - \overline{z}\| \le \varphi_M(\eta)$, и функция $\varphi_M(\eta)$ есть искомая априорная оценка.

Априорные оценки хорошо изучены для случая, когда $F = A : Z \to U$ — линейный ограниченный инъективный оператор, а $F_h = A_h : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор такой, что $\|A - A_h\| \le h$. Тогда для многих РА, дающих приближенные решения $z_{h\delta}$, можно получить (например, [2]–[9]) оптимальную по порядку точности оценку на множествах $M = M_r^{(p)} = \{z = |A|^p v : v \in Z,\ \|v\| \le r\}$:

$$\|z_{h\delta} - \overline{z}\| \le C(r,p)(\delta+h)^{\frac{p}{p+1}},\quad C(r,p) = \mathrm{const}\,. \tag{1}$$

Здесь $|A| = (A^*A)^{1/2}$, а $p > 0$ — заданное число. Сравним это со случаем линейного ограниченного нормально разрешимого оператора A. Он имеет ограниченный псевдообратный оператор $A^+ : U \to Z$, который может быть неустойчивым к возмущениям оператора A. Поэтому задача вычисления нормального решения $\overline{z} = A^+\overline{u}$ уравнения $Az = \overline{u}$ с возмущенным оператором A_h является в общем случае некорректно поставленной, а в случае точно заданного оператора ($h = 0$) — корректной (устойчивой) задачей. Для таких операторов A известны РА с приближенными решениями вида $z_{h\delta} = g_{h\delta}(A_h^*A_h)A_h^*u_\delta$, которые оптимальны по порядку на всем пространстве Z, т. е. на множестве $M = Z$, если функции $g_{h\delta}(\lambda)$ обладают некоторыми специальными свойствами. При этом оценка точности имеет вид ([3], [10])

$$\|z_{h\delta} - \overline{z}\| \le C_0(\delta+h),\quad C_0 = \mathrm{const}\,. \tag{2}$$

Оценка (2) качественно и количественно отличается от оценки (1) тем, что она по порядку сравнима с погрешностями данных h, δ. Далее оценки вида (2) на заданном множестве M будем называть *линейными оценками* (по δ и h).

Ниже изучается вопрос о том, для каких обратных задач вида $F(z) = u$ с приближенными данными и каких множеств M найдутся приближенные решения z_η, имеющие линейную оценку точности $\varphi_M(\eta) = C(\delta+h)$, $C = \mathrm{const}$. Указывается также, как найти такие приближенные решения.

1. Центральные результаты

Будем считать, что элемент $\overline{z}$ принадлежит заданному множеству M, на котором производится оценка точности. Пусть также выполнено равенство $\Psi(h,\|z\|) = h\quad \forall z \in M$, так что для приближенных данных (u_δ, F_h) выполнены условия аппроксимации

$$\|F(\overline{z}) - u_\delta\| = \|\overline{u} - u_\delta\| \le \delta,\quad \|F(z) - F_h(z)\| \le h\ \ \forall z \in M, \tag{3}$$

и определено множество

$$\Sigma_\eta(F,z) = \{(u_\delta,F_h) : u_\delta \in U : \|u_\delta - u\| \le \delta,\ \|F(z)-F_h(z)\| \le h;\ u = F(z)\}\,.$$

Предположим, что ошибка некоторого приближенного решения $z_\eta = R_\eta(u_\delta, F_h)$ на множестве M сравнима с ошибкой данных, т. е. выполнена линейная оценка

$$\sup_{z \in M,\ (u_\delta, F_h) \in \Sigma_\eta(F,z)} \|R_\eta(u_\delta, F_h)_z\| \le C(\delta + h), \quad C = C(M) = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Обычно при приближенном решении операторных уравнений стараются снизить ошибку приближения оператора (например, путем достаточно точной конечномерной аппроксимации). Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что $h \le k\delta$, $k = \text{const}$, т. е. ошибка в задании оператора достаточно мала.

Теорема 1. *Предположим, что множество M всюду плотно в себе* ([11], с. 53) *и уравнение $F(z) = u$ имеет единственное решение $z \in M$ для каждой правой части $u \in F(M)$. Если при любом δ, $0 < \delta \le \delta_0 = \text{const}$, при условии $h \le k\delta$ выполнена линейная оценка* (4), *то для всяких $u_1, u_2 \in F(M)$ таких, что $\|u_1 - u_2\| \le \delta_0$, выполнено неравенство*

$$\left\|F^{-1}(u_1) - F^{-1}(u_2)\right\| \le 2C(M)(1+k)\|u_1 - u_2\|. \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем произвольные элементы $u_1, u_2 \in F(M)$, для которых число $\delta = \|u_1 - u_2\|$ допустимо, т. е. $0 < \delta \le \delta_0$. Такие элементы существуют, так как оператор F непрерывен на всюду плотном в себе множестве M. Тогда из условия $h \le k\delta$ и из линейной оценки (4), считая $z = F^{-1}(u_1)$ и $z = F^{-1}(u_2)$, получим

$$\left\|R_\eta(u_1, F) - F^{-1}(u_1)\right\| \le C(M)(1+k)\delta, \quad \left\|R_\eta(u_1, F) - F^{-1}(u_2)\right\| \le C(M)(1+k)\delta.$$

Отсюда

$$\left\|F^{-1}(u_1) - F^{-1}(u_2)\right\| \le 2C(M)(1+k)\delta = 2C(M)(1+k)\|u_1 - u_2\|,$$

и оценка (5) доказана. □

Следствие. Если выполнены условия теоремы 1 и справедлива линейная оценка (4), то обратная задача $F(z) = u$ корректна по Тихонову [12] на множестве M.

Из теоремы 1 ясно, что для получения при решении обратной задачи $F(z) = u$ линейной оценки нужно выбрать адекватное множество корректности M и решать на нем обратную задачу с помощью подходящего регуляризующего алгоритма R_η. Такой подход предложен в известной статье А.Н. Тихонова [12] и затем развивался многими авторами. Однако вопрос о линейных оценках в этих работах не ставился. Впервые он поставлен в [13].

По поводу обращения теоремы 1 заметим, что в 2012–2013 гг. М.Ю. Кокурин получил результат [14], который для нашей постановки задачи формулируется так.

Предложение 1. *Корректные по Тихонову задачи и только они допускают регуляризатор, не зависящий явно от уровня погрешности данных.*

Комбинируя теорему 1 с этим утверждением, получим

Предложение 2. *В условиях теоремы* 1 *из выполнения линейной оценки* (4) *следует, что для рассматриваемой обратной задачи существует регуляризатор, не зависящий явно от уровня погрешности данных.*

В [14] отмечено, что такой регуляризатор $R_\eta(\cdot) = R(\cdot)$ может быть построен по методу квазирешений В.К. Иванова [2] в случае, когда M есть компакт. В этом методе приближенное решение задается как один из элементов z_η, для которых

$$z_\eta = \arg\inf\left\{\|F_h(z) - u_\delta\| : z \in M\right\}. \tag{6}$$

Элементы z_η существуют, если, например, операторы $F_h(z)$ непрерывны на компакте M. Более подробно вопросы существования этих элементов рассмотрены в [2], [4], [5]. Справедлива

Теорема 2. *Предположим, что множество M обладает свойством: для любых допустимых приближенных данных (u_δ, F_h) существуют элементы z_η вида (6). Пусть уравнение $F(z) = u$ имеет единственное решение $z \in M$ для каждой правой части $u \in F(M)$, и для всяких $u_1, u_2 \in F(M)$, подчиненных условию $\|u_1 - u_2\| \le \delta_0$, выполнено неравенство (5). Тогда при любом δ, $0 < \delta \le \delta_0 = \mathrm{const}$, и при условии $h \le k\delta$ для приближенных решений z_η верна линейная оценка $\Delta_M(\eta) \le 4C(1+k)^2\delta$.*

Доказательство. Из определения (6) элементов $z_\eta \in M$, условий аппроксимации (3) и требования $h \le k\delta$ получим

$$\|F_h(z_\eta) - u_\delta\| \le \|F_h(\overline{z}) - u_\delta\| \le \|F_h(\overline{z}) - F(\overline{z})\| + \|F(\overline{z}) - u_\delta\| \le h + \delta \le (k+1)\delta. \quad (7)$$

Учитывая (7) и требование $h \le k\delta$, аналогично получим

$$\|F(z_\eta) - F(\overline{z})\| \le \|F(z_\eta) - F_h(z_\eta)\| + \|F_h(z_\eta) - u_\delta\| + \|u_\delta - F(\overline{z})\| \le \\ \le h + (1+k)\delta + \delta \le 2(1+k)\delta. \quad (8)$$

Тогда из (5) при $u_1 = F(z_\eta)$, $u_2 = F(\overline{z})$ и (8) следует

$$\|z_\eta - \overline{z}\| = \left\|F^{-1}\left(F(z_\eta)\right) - F^{-1}\left(F(\overline{z})\right)\right\| \le 2C(M)(1+k)\,\|F(z_\eta) - F(\overline{z})\| \le 4C(1+k)^2\delta. \quad (9)$$

Если взять произвольные элементы $\overline{z} \in M$ и считать, что для точных данных $\{\overline{u} = F(\overline{z}), F\}$ обратных задач берутся любые приближенные данные $(u_\delta, F_h) \in \Sigma_\eta(F, \overline{z})$, то из (9) и определения величины $\Delta_M(\eta)$ следует доказываемая линейная оценка. □

Теорема 2 в определенном ограниченном смысле обращает теорему 1.

Приведем пример нелинейной обратной задачи $F(z) = u$ и соответствующего множества M, на котором по теореме 2 может быть получена линейная оценка точности.

Теорема 3. *Пусть* a) *решение $\overline{z}$ уравнения $F(z) = \overline{u}$ единственно в некотором шаре $B_r(\overline{z})$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $\overline{z}$*; b) *оператор $F(z)$ дифференцируем по Фреше в шаре $B_r(\overline{z})$;* c) *производная $F'(z)$ непрерывна в точке $\overline{z}$ (в смысле сходимости по норме в пространстве линейных операторов)*; d) *производная $F'(\overline{z})$ есть нормально разрешимый оператор, причем $\ker F'(\overline{z}) = 0$. Тогда найдется шар $M = B_{r_1}(\overline{z})$, $0 < r_1 < r$, в котором выполнено неравенство*

$$\|F(z_1) - F(z_2)\| \ge \mu_0 \|z_1 - z_2\|, \quad \mu_0 = \mathrm{const} > 0 \ \ \forall z_1, z_2 \in M.$$

Доказательство. Из нормальной разрешимости оператора $F'(\overline{z})$ с нулевым ядром следует существование константы $\overline{\mu} > 0$ такой, что для любых $z_1, z_2 \in Z$

$$\left\|F'(\overline{z})(z_2 - z_1)\right\| \ge \overline{\mu}\,\|z_2 - z_1\|. \quad (10)$$

Из непрерывности производной $F'(z)$ в точке $\overline{z}$ вытекает существование такого шара $B_{r_1}(\overline{z})$ с радиусом r_1, $0 < r_1 < r$, в котором для любого элемента z выполнено неравенство

$$\left\|F'(z) - F'(\overline{z})\right\| < \overline{\mu}/2. \quad (11)$$

Будем теперь считать, что z_1, z_2 — это произвольные элементы из шара $B_{r_1}(\overline{z})$, так что для них выполнены соотношения (10) и (11). Из (10) следует

$$\left\|F(z_2) - F(z_1) - F'(\overline{z})(z_2 - z_1)\right\| \ge \left\|F'(\overline{z})(z_2 - z_1)\right\| - \|F(z_2) - F(z_1)\| \ge \\ \ge \overline{\mu}\,\|z_2 - z_1\| - \|F(z_2) - F(z_1)\|. \quad (12)$$

С другой стороны, применяя интегральную формулу Лагранжа

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_0^1 F'(z_t)dt(z_2 - z_1), \quad z_t = z_1 + t(z_2 - z_1) \in B_{r_1}(\overline{z}),$$

получим

$$\left\|F(z_2) - F(z_1) - F'(\overline{z})(z_2 - z_1)\right\| = \left\|\int_0^1 F'(z_t)dt(z_2 - z_1) - \int_0^1 F'(\overline{z})dt(z_2 - z_1)\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^1 \left[F'(z_t) - F'(\overline{z})\right] dt(z_2 - z_1)\right\| \leq \int_0^1 \left\|F'(z_t) - F'(\overline{z})\right\| dt \left\|z_2 - z_1\right\|.$$

Отсюда с учетом выполнения для элементов $z_t \in B_{r_1}(\overline{z})$ неравенства (11) имеем

$$\left\|F(z_2) - F(z_1) - F'(\overline{z})(z_2 - z_1)\right\| \leq \overline{\mu}/2 \left\|z_2 - z_1\right\|. \tag{13}$$

Тогда из (12) и (13) следует доказываемая оценка

$$\|F(z_2) - F(z_1)\| \geq \mu_0 \|z_2 - z_1\| \quad \forall z_1, z_2 \in B_{r_1}(\overline{z}); \quad \mu_0 = \overline{\mu}/2 > 0. \qquad \square$$

Теоремы 2, 3 позволяют утверждать, что обратная задача $F(z) = u$ может быть решена с помощью метода квазирешений с линейной точностью $\Delta_M(\eta) \leq 2(1+k)^2\delta/\mu_0$, если элементы z_η вида (6) существуют на множестве $M = B_{r_1}(\overline{z})$. Другие регуляризующие алгоритмы, имеющие линейную оценку точности, изучались для задач с нормально разрешимой производной в [15].

2. Алгоритм получения линейной оценки при известном δ

Если известен уровень погрешности данных δ, то в предположении $h \leq k\delta$ его можно использовать для решения обратной задачи с помощью *метода невязки на множестве корректности* (МНМК). В этом методе в качестве приближенного решения принимается любой элемент $z_\eta \in M$, для которого выполнено неравенство

$$\|F_h(z_\eta) - u_\delta\| \leq d(1+k)\delta, \quad d = \text{const} > 1. \tag{14}$$

Элемент z_η существует, так как множество $\mathcal{Z}_\eta = \{z \in M : \|F_h(z) - u_\delta\| \leq d(1+k)\delta\}$, содержащее согласно неравенству (7) элемент $\overline{z}$, не пусто.

Метод невязки на множестве корректности позволяет получить также линейную оценку точности приближенного решения. Для этого заметим, что по теореме 1 необходимым условием выполнения линейной оценки (4) является неравенство (5). Оно справедливо с $2C = \nu^{-1}$, если выполнено неравенство

$$\nu = \inf\left\{\frac{\|F(z_1) - F(z_2)\|}{\|z_1 - z_2\|} : z_{1,2} \in M,\ z_1 \neq z_2\right\} > 0. \tag{15}$$

Теорема 4. *Пусть $\nu > 0$. Тогда для приближенного решения $z_\eta \in M$, полученного с помощью МНМК, справедлива линейная оценка точности*

$$\|z_\delta - \overline{z}\| \leq \frac{(1+d)(1+k)}{\nu}\delta. \tag{16}$$

Доказательство. Действительно, используя соотношение (14) и условия (3), из (8) получим

$$\|F(z_\eta) - F(\overline{z})\| \leq (1+d)(1+k)\delta.$$

Это, а также вытекающее из (15) соотношение

$$\|z_\eta - \overline{z}\| \leq \nu^{-1} \|F(z_\eta) - F(\overline{z})\|, \quad z_\eta, \overline{z} \in M,$$

приводят к доказываемому неравенству (16). $\square$

Численная реализация алгоритма МНМК основана на следующем утверждении.

Теорема 5. *Предположим, что уравнение $F(z) = u$ имеет для правой части $\overline{u} \in U$ решение $\overline{z} \in M$ и $h \le k\delta$ для любого δ, $0 < \delta \le \delta_0$. Пусть $\{z_n\} \subset M$ — произвольная минимизирующая последовательность для невязки $\|F_h(z) - u_\delta\|$ на множестве M:*

$$\lim_{n\to\infty} \|F_h(z_n) - u_\delta\| = \inf\{\|F_h(z) - u_\delta\| : z \in M\} \equiv \rho_\eta. \tag{17}$$

Тогда найдется такой номер $n(\eta)$, что для $z_\eta = z_{n(\eta)}$ выполнено неравенство (14).

Доказательство. Предположим, что это не так, и для всякого номера n при любых допустимых $\eta = (\delta, h)$ выполнено неравенство $\|F_h(z_n) - u_\delta\| > d(1+k)\delta$. Отсюда и из (17) следует $\rho_\eta \ge d(1+k)\delta$. Кроме того, из (17) и условий аппроксимации (3) получим

$$\rho_\eta \le \|F_h(\overline{z}) - u_\delta\| \le \delta + h \le (1+k)\delta.$$

Таким образом, $d(1+k)\delta \le (1+k)\delta$. Но это противоречит требованию $d > 1$. $\square$

Теорема 5 показывает, что элемент $z_\delta = z_{n(\delta)}$ можно принять как приближенное решение в МНМК. Это приближение имеет линейную оценку точности (16).

Пример решения практической обратной задачи с линейной оценкой точности по методу МНМК приведен в [16].

Литература

[1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1979).

[2] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения* (Наука, М., 1978).

[3] Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах* (Наука, М., 1986).

[4] Танана В.П. *Методы решения операторных уравнений* (Наука, М., 1981).

[5] Танана В.П., Рекант М.А., Янченко С.И. *Оптимизация методов решения операторных уравнений* (Изд-во Уральск. ун-та, Свердловск, 1987).

[6] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1989).

[7] Engl H.W., Hanke M., and Neubauer A. *Regularization of inverse problems* (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1996).

[8] Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами* (Едиториал УРСС, М., 2002).

[9] Bakushinsky A.B. and Kokurin M.Yu. *Iterative methods for approximate solution of inverse problems* (Springer, Dordrecht, 2004).

[10] Морозов В.А. *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач* (Наука, М., 1987).

[11] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа* (Наука, М., 1967).

[12] Тихонов А.Н. *Об устойчивости обратных задач*, ДАН СССР **39** (5), 195–198 (1943).

[13] Леонов А.С. *Может ли априорная оценка точности приближенного решения некорректной задачи быть сравнимой с ошибкой данных*? Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **54** (4), 562–568 (2014).

[14] Кокурин М.Ю. *Об условно-корректных и обобщенно-корректных задачах*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **53** (6), 857–866 (2013).

[15] Кокурин М.Ю. *Итеративно регуляризованные методы для нерегулярных нелинейных операторных уравнений с нормально разрешимой производной в решении*, Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тез. докл. Всероссийск. конф., посвященной памяти В.К. Иванова. 47–48 (2014).

[16] Леонов А.С., Сорокин В.Н. *О точности определения параметров голосового источника*, Акуст. журн. **60** (6), 656–662 (2014).

А.С. Леонов

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”,
Каширское шоссе, д. 31, Москва, 115409, Россия,

e-mail: asleonov@mephi.ru

A.S. Leonov

On possibility of obtaining linear accuracy evaluation of approximate solutions to inverse problems

Abstract. We consider a concept of linear a priori estimate of the accuracy for approximate solutions to inverse problems with perturbed data. We establish that if the linear estimate is valid for a method of solving the inverse problem, then the inverse problem is well-posed according to Tikhonov. We also find conditions, which ensure the converse for the method of solving the inverse problem independent on the error levels of data. This method is well-known method of quasi-solutions by V.K. Ivanov. It provides for well-posed (according to Tikhonov) inverse problems the existence of linear estimates. If the error levels of data are known, a method of solving well-posed according to Tikhonov inverse problems is proposed. This method called the residual method on the correctness set (RMCS) ensures linear estimates for approximate solutions. We give an algorithm for finding linear estimates in the RMCS.

Keywords: inverse problems, linear a priori estimate of the accuracy, well-posedness according to Tikhonov.

A.S. Leonov

National Research Nuclear University “MEPhI”,
31 Kashirskoe Highway, Moscow, 115409, Russia,

e-mail: asleonov@mephi.ru