Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023
Казань, 2 апреля 2023 г.

7 класс

Вариант № 1

---

1. Уберите лишнее, чтобы получилось верное равенство:

$$1 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 2023.$$

Возможный ответ. $1 \cdot 17 \cdot 119 = 2023$.

Решение. Непосредственная проверка.

2. Все натуральные числа раскрасили в несколько цветов так, что если к любым двум числам одного цвета прибавить одно и то же число, то снова получатся числа одного цвета. Числа 1 и 5 окрашены в один цвет, а 2 и 4 – в разные. Во сколько цветов раскрашены все числа?

Ответ. Четыре.

Решение. Т.к. числа 1 и 5 окрашены в один цвет, то, прибавляя к этим числам одно и то же произвольное число, получим, что числа, находящиеся на расстоянии 4, окрашены в один цвет. Следовательно, одного цвета будут числа, дающие одинаковый остаток при делении на 4. Тем самым весь набор цветов определяется раскраской чисел от 1 до 4.

Если бы числа 1 и 2 были одного цвета, то, прибавляя к этим числам одно и то же произвольное число, получили бы, что все числа окрашены в один цвет, что неверно. Следовательно, 1 и 2 имеют разные цвета.

Числа 1 и 3 также окрашены в разные цвета, т.к. в противном случае 2 и 4 были бы одного цвета.

Наконец, числа 1 и 4 также имеют разные цвета, поскольку иначе числа 2 и 5, а значит, и числа 1 и 2, были бы одного цвета.

Таким образом, все числа от 1 до 4 имеют разные цвета.

3. Докажите, что не существует таких простых чисел a, b, c, что $a^2+b^2 = c^2$.

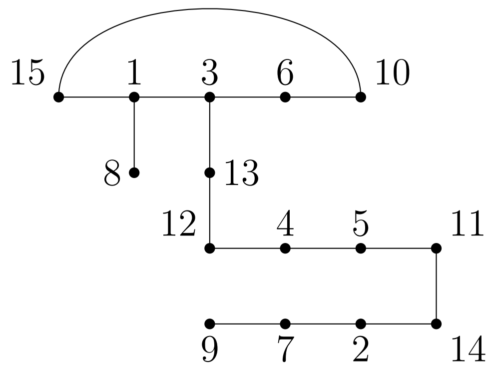
Решение. Предположим, что такие простые числа существуют. Поскольку $a, b \geqslant 2$, то $c > 2$, т.е. c нечётно, поэтому c^2 также нечётно. Нечётное число может быть получено лишь как сумма чётного и нечётного чисел, следовательно, одно из чисел a или b равно двум. Пусть для определённости

$a = 2$. Тогда $b^2 + 4 = c^2$. Расстояние между квадратами соседних натуральных чисел n и $n+1$ равно $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, т.е. растёт с ростом n. При $n = 1$ это расстояние равно 3, а при $n > 1$ оно превышает 4. Значит, расстояние между квадратами натуральных чисел не может быть равно четырём. Противоречие.

4. Миша и Дима играют в следующую игру. На карточках выписаны числа от 1 до 15. Игроки по очереди убирают одну карточку, пока не останется две. Если сумма оставшихся чисел является точным квадратом, то выигрывает Дима, иначе – Миша. Кто из игроков выиграет при правильной игре, если первым убирает карточку Миша?

Ответ. Миша.

Решение. Нарисуем граф, в котором вершины соответствуют числам от 1 до 15, а наличие ребра между вершинами означает, что сумма чисел является точным квадратом (см. рис.). Так как в течение игры должны быть убраны 13 карточек, то Миша сделает 7 ходов, а Дима – 6. Можно считать, что каждым ходом игроки убирают одну вершину и исходящие из неё рёбра. Победа Миши будет означать, что оставшиеся две вершины не соединены ребром.



Назовём набор чисел

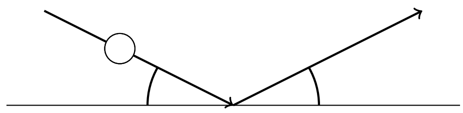
$$1, 3, 6, 8, 10, 13, 15$$

первой кучкой, а набор чисел

$$2, 4, 5, 7, 9, 11, 14$$

– второй кучкой. Заметим, что вершины, соответствующие числам из разных кучек, не соединены ребром. Первым ходом Мише нужно убрать карточку с числом 12, тем самым оставив числа из двух кучек. Далее если Дима убирает число из какой-то кучки, то Миша должен убрать какое-нибудь число из другой кучки. В таком случае в конце игры останутся два числа из разных кучек, следовательно, их сумма гарантированно не будет являться точным квадратом.

5. Бильярдный стол $ABCD$ представляет собой прямоугольник, в углах которого расположены лузы. При соударении с бортом шар продолжает движение по правилу "угол падения равен углу отражения" (см. рис.). Известно, что по шару, стоящему в точке K, можно ударить в сторону борта BC так, чтобы после трёх соударений с бортами шар вновь прошёл через точку K и закатился в лузу C. Найдите расстояние от точки K до борта AB, если $AB = 1.6$ м, $BC = 3.6$ м и точка K равноудалена от бортов BC и AD.



Ответ. 2.4 м.

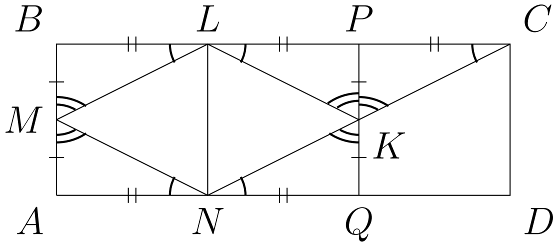
Решение. Пусть L, M, N – точки соударения шара с бортами BC, AB и AD соответственно (см. рис. ниже). Из условия следует, что

$$\angle BLM = \angle CLK,\ \angle BML = \angle AMN,\ \angle ANM = \angle KND$$

Положим $\angle BLM = \alpha$, $\angle BML = \beta$. Из прямоугольного треугольника MBL вытекает $\alpha + \beta = 90^\circ$. Углы LCK и KND равны как накрест лежащие, откуда $\angle LCK = \alpha = \angle CLK$. Следовательно, $\triangle LKC$ равнобедренный, $LK = KC$.

Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на BC и AD соответственно. По условию $KP = KQ$, поэтому прямоугольные треугольники KPC и KQN равны. Значит, $KC = KN = LK$. Т.к. $\angle LKP = \angle NKQ = \angle CKP = \beta$, то $\triangle LPK = \triangle CPK$ по двум углам и стороне между ними, поэтому $LP = PC$. Треугольник LKN – равнобедренный, значит, равны углы при его основании LN. Но тогда равны и углы при том же основании треугольника NML, т.е. $ML = MN$. Отсюда вытекает равенство треугольников MBL и MAN, следовательно, M – середина AB. Тогда $MB = KP$ и $\triangle MBL = \triangle KPL$, значит, $BL = LP = PC$.

Наконец, поскольку в прямоугольнике $ABPQ$ точки M и P являются серединами противоположных сторон, то $MBPK$ – также прямоугольник, поэтому $KM \perp AB$. Таким образом, искомое расстояние равно $KM = BP = 2/3 \cdot BC = 2.4$ м.



Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023
Казань, 2 апреля 2023 г.

7 класс

Вариант № 2

---

1. Уберите лишнее, чтобы получилось верное равенство:

$$1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1 = 2023.$$

Возможный ответ. $17 \cdot 119 \cdot 1 = 2023$.

Решение. Непосредственная проверка.

2. Все натуральные числа раскрасили в несколько цветов так, что числа, находящиеся на расстоянии 4, окрашены в один цвет. Числа 50 и 76 окрашены в один цвет, а 27 и 41 – в разные. Во сколько цветов раскрашены все числа, если числа 53 и 64 разного цвета?

Ответ. Два или три.

Решение. Т.к. числа, находящиеся на расстоянии 4, окрашены в один цвет, то одного цвета будут и числа, расстояние между которыми кратно четырём. Следовательно, числа, дающие одинаковый остаток при делении на 4, имеют один цвет. Числа 50 и 76 дают остатки 2 и 0 соответственно, значит, одного цвета будут все чётные числа. Остатки чисел 27 и 41 равны 3 и 1, значит, числа, дающие остатки 1 и 3, окрашены в разные цвета. Наконец, числа 53 и 64 дают остатки 1 и 0, значит, числа с соответствующими остатками также разного цвета.

Если числа, дающие остатки 2 и 3, окрашены в один цвет, то все числа раскрашены в два цвета. Иначе получаем, что чётные числа окрашены в один цвет, а числа, дающие остатки 1 и 3 при делении на 4 – в два других цвета.

Таким образом, все числа раскрашены в два или три цвета.

3. Докажите, что не существует таких простых чисел a, b, c, что $a^3+b^3 = c^3$.

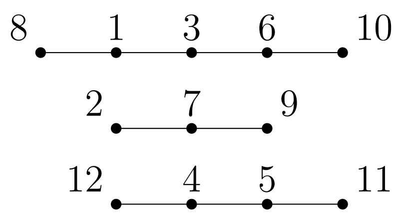
Решение. Предположим, что такие простые числа существуют. Поскольку $a, b \geqslant 2$, то $c > 2$, т.е. c нечётно, поэтому c^3 также нечётно. Нечётное число может быть получено лишь как сумма чётного и нечётного чисел, следовательно, одно из чисел a или b равно двум. Пусть для определённости $a = 2$.

Тогда $b^3+8=c^3$. Расстояние между кубами соседних натуральных чисел n и $n+1$ равно $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$, т.е. растёт с ростом n. При $n=1$ это расстояние равно 7, а при $n>1$ оно превышает 8. Значит, расстояние между кубами натуральных чисел не может быть равно восьми. Противоречие.

4. Миша и Дима играют в следующую игру. На карточках выписаны числа от 1 до 12. Игроки по очереди убирают одну карточку, пока не останется две. Если сумма оставшихся чисел является точным квадратом, то выигрывает Миша, иначе – Дима. Кто из игроков выиграет при правильной игре, если первым убирает карточку Миша?

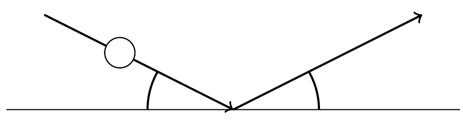
Ответ. Дима.

Решение. Нарисуем граф, в котором вершины соответствуют числам от 1 до 12, а наличие ребра между вершинами означает, что сумма чисел является точным квадратом (см. рис.). Так как в течение игры должны быть убраны 10 карточек, то каждый из игроков сделает по 5 ходов. Можно считать, что каждым ходом игроки убирают одну вершину и исходящие из неё рёбра. Победа Миши будет означать, что оставшиеся две вершины соединены ребром.



Для победы Диме достаточно убрать карточки с числами 1, 4, 5, 6, 7. Если к какому-то ходу Димы этих чисел уже нет на карточках, то Дима может убрать любую карточку. Действительно, если исключить вершины, соответствующие указанным выше числам, то оставшиеся вершины не будут соединены рёбрами, следовательно, Дима обеспечит себе победу.

5. Бильярдный стол $ABCD$ представляет собой прямоугольник, в углах которого расположены лузы. При соударении с бортом шар продолжает движение по правилу "угол падения равен углу отражения" (см. рис.). Известно, что по шару, стоящему в точке K, можно ударить в сторону борта AD так, чтобы после трёх соударений с бортами шар вновь прошёл через точку K и закатился в лузу D. Найдите расстояние от точки K до борта AB, если $AB=4.2$ м, $BC=6$ м и точка K равноудалена от бортов BC и AD.



Ответ. 4 м.

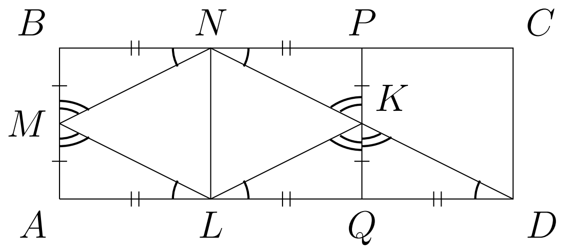
Решение. Пусть L, M, N – точки соударения шара с бортами AD, AB и BC соответственно (см. рис. ниже). Из условия следует, что

$$\angle ALM = \angle DLK,\ \angle AML = \angle BMN,\ \angle BNM = \angle CNK$$

Положим $\angle ALM = \alpha$, $\angle AML = \beta$. Из прямоугольного треугольника MAL вытекает $\alpha+\beta = 90^\circ$. Углы CNK и KDL равны как накрест лежащие, откуда $\angle KLD = \alpha = \angle KDL$. Следовательно, $\triangle LKD$ равнобедренный, $LK = KD$.

Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на BC и AD соответственно. По условию $KP = KQ$, поэтому прямоугольные треугольники KPN и KQD равны. Значит, $KD = KN = LK$. Т.к. $\angle NKP = \angle LKQ = \angle DKQ = \beta$, то $\triangle LQK = \triangle KQD$ по двум углам и стороне между ними, поэтому $LQ = QD$. Треугольник LKN – равнобедренный, значит, равны углы при его основании LN. Но тогда равны и углы при том же основании треугольника NML, т.е. $ML = MN$. Отсюда вытекает равенство треугольников MAL и MBN, следовательно, M – середина AB. Тогда $MA = KQ$ и $\triangle MAL = \triangle KQL$, значит, $AL = LQ = QD$.

Наконец, поскольку в прямоугольнике $ABPQ$ точки M и P являются серединами противоположных сторон, то $MAQK$ – также прямоугольник, поэтому $KM \perp AB$. Таким образом, искомое расстояние равно $KM = AQ = 2/3 \cdot AD = 4$ м.



Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023
Казань, 2 апреля 2023 г.

7 класс

Вариант № 3

---

1. Уберите лишнее, чтобы получилось верное равенство:

$$1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 = 2023.$$

Возможный ответ. $1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 17 = 2023$.

Решение. Непосредственная проверка.

2. Все натуральные числа раскрасили в несколько цветов так, что числа, находящиеся на расстоянии 4, окрашены в один цвет. Числа 72 и 89 окрашены в один цвет, а 35 и 66 – в разные. Во сколько цветов раскрашены все числа, если числа 10 и 45 разного цвета?

Ответ. Два или три.

Решение. Т.к. числа, находящиеся на расстоянии 4, окрашены в один цвет, то одного цвета будут и числа, расстояние между которыми кратно четырём. Следовательно, числа, дающие одинаковый остаток при делении на 4, имеют один цвет. Числа 72 и 89 дают остатки 0 и 1 соответственно, значит, числа с соответствующими остатками будут одного цвета. Остатки чисел 35 и 66 равны 3 и 2, значит, числа, дающие остатки 2 и 3, окрашены в разные цвета. Наконец, числа 10 и 45 дают остатки 2 и 1, значит, числа, имеющие такие остатки, также разного цвета.

Если числа, дающие остатки 0 и 3, окрашены в один цвет, то все числа раскрашены в два цвета. Иначе получаем, что числа, остаток которых при делении на 4 не больше 1, окрашены в один цвет, а числа, дающие остатки 2 и 3 – в два других цвета.

Таким образом, все числа раскрашены в два или три цвета.

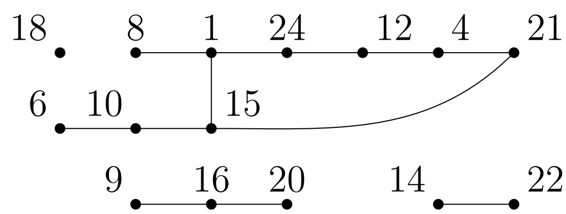
3. Докажите, что не существует таких простых чисел a, b, c, что $a^2 - b^2 = c^2$.

Решение. Предположим, что такие простые числа существуют. Перепишем равенство в виде $a^2 = b^2 + c^2$. Поскольку $b, c \geqslant 2$, то $a > 2$, т.е. a нечётно, поэтому a^2 также нечётно. Нечётное число может быть получено лишь как сумма чётного и нечётного чисел, следовательно, одно из чисел b или c равно двум. Пусть для определённости $b = 2$. Тогда $a^2 = c^2 + 4$. Расстояние между квадратами соседних натуральных чисел n и $n+1$ равно $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, т.е. растёт с ростом n. При $n = 1$ это расстояние равно 3, а при $n > 1$ оно превышает 4. Значит, расстояние между квадратами натуральных чисел не может быть равно четырём. Противоречие.

4. Миша и Дима играют в следующую игру. На карточках выписаны числа от 1 до 24, за исключением простых. Игроки по очереди убирают одну карточку, пока не останется две. Если сумма оставшихся чисел является точным квадратом, то выигрывает Миша, иначе – Дима. Кто из игроков выиграет при правильной игре, если первым убирает карту Миша?

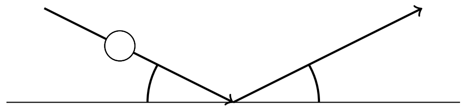
Ответ. Дима.

Решение. Нарисуем граф, в котором вершины соответствуют числам от 1 до 24, не являющимся простыми, а наличие ребра между вершинами означает, что сумма чисел является точным квадратом (см. рис.). Так как в течение игры должны быть убраны 13 карточек, то Миша сделает 7 ходов, а Дима – 6. Можно считать, что каждым ходом игроки убирают одну вершину и исходящие из неё рёбра. Победа Миши будет означать, что оставшиеся две вершины соединены ребром.



Для победы Диме достаточно убрать карточки с числами 1, 10, 12, 14, 16, 21. Если к какому-то ходу Димы этих чисел уже нет на карточках, то Дима может убрать любую карточку. Действительно, если исключить вершины, соответствующие указанным выше числам, то оставшиеся вершины не будут соединены рёбрами, следовательно, Дима обеспечит себе победу.

5. Бильярдный стол $ABCD$ представляет собой прямоугольник, в углах которого расположены лузы. При соударении с бортом шар продолжает движение по правилу "угол падения равен углу отражения" (см. рис.). Известно, что по шару, стоящему в точке K, можно ударить в сторону борта AD так, чтобы после трёх соударений с бортами шар вновь прошёл через точку K и закатился в лузу D. Найдите расстояние от точки K до борта CD, если $AB = 3.2$ м, $BC = 5.4$ м и точка K равноудалена от бортов BC и AD.



Ответ. 1.8 м.

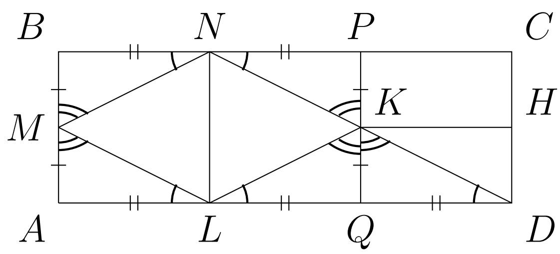
Решение. Пусть L, M, N – точки соударения шара с бортами AD, AB и BC соответственно (см. рис. ниже). Из условия следует, что

$$\angle ALM = \angle DLK,\ \angle AML = \angle BMN,\ \angle BNM = \angle CNK$$

Положим $\angle ALM = \alpha$, $\angle AML = \beta$. Из прямоугольного треугольника MAL вытекает $\alpha + \beta = 90^\circ$. Углы CNK и KDL равны как накрест лежащие, откуда $\angle KLD = \alpha = \angle KDL$. Следовательно, $\triangle LKD$ равнобедренный, $LK = KD$.

Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на BC и AD соответственно. По условию $KP = KQ$, поэтому прямоугольные треугольники KPN и KQD равны. Значит, $KD = KN = LK$. Т.к. $\angle NKP = \angle LKQ = \angle DKQ = \beta$, то $\triangle LQK = \triangle KQD$ по двум углам и стороне между ними, поэтому $LQ = QD$. Треугольник LKN – равнобедренный, значит, равны углы при его основании LN. Но тогда равны и углы при том же основании треугольника NML, т.е. $ML = MN$. Отсюда вытекает равенство треугольников MAL и MBN, следовательно, M – середина AB. Тогда $MA = KQ$ и $\triangle MAL = \triangle KQL$, значит, $AL = LQ = QD$.

Пусть H – перпендикуляр, опущенный из точки K на CD. Тогда $KQDH$ – прямоугольник, следовательно, искомое расстояние равно $KH = QD = 1/3 \cdot AD = 1.8$ м.



Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023
Казань, 2 апреля 2023 г.

7 класс

Вариант № 4

---

1. Уберите лишнее, чтобы получилось верное равенство:

$$7 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 = 2023.$$

Возможный ответ. $7 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 1 = 2023$.

Решение. Непосредственная проверка.

2. Все натуральные числа раскрасили в несколько цветов так, что если к любым двум числам одного цвета прибавить одно и то же число, то снова получатся числа одного цвета. Числа 1 и 5 окрашены в один цвет, а 3 и 5 – в разные. Во сколько цветов раскрашены все числа?

Ответ. Четыре.

Решение. Т.к. числа 1 и 5 окрашены в один цвет, то, прибавляя к этим числам одно и то же произвольное число, получим, что числа, находящиеся на расстоянии 4, окрашены в один цвет. Следовательно, одного цвета будут числа, дающие одинаковый остаток при делении на 4. Тем самым весь набор цветов определяется раскраской чисел от 1 до 4.

Если бы числа 1 и 2 были одного цвета, то, прибавляя к этим числам одно и то же произвольное число, получили бы, что все числа окрашены в один цвет, что неверно. Следовательно, 1 и 2 имеют разные цвета.

Числа 1 и 3 также окрашены в разные цвета, что непосредственно вытекает из условия.

Наконец, числа 1 и 4 также имеют разные цвета, поскольку иначе числа 2 и 5, а значит, и числа 1 и 2, были бы одного цвета.

Таким образом, все числа от 1 до 4 имеют разные цвета.

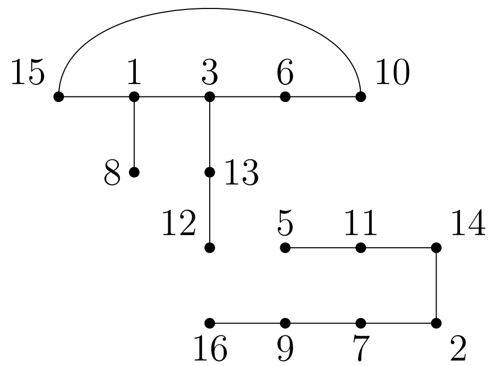
3. Докажите, что не существует таких простых чисел a, b, c, что $a^3 - b^3 = c^3$.

Решение. Предположим, что такие простые числа существуют. Перепишем равенство в виде $a^3 = b^3 + c^3$. Поскольку $b, c \geqslant 2$, то $a > 2$, т.е. a нечётно, поэтому a^3 также нечётно. Нечётное число может быть получено лишь как сумма чётного и нечётного чисел, следовательно, одно из чисел b или c равно двум. Пусть для определённости $b = 2$. Тогда $a^3 = c^3 + 8$. Расстояние между кубами соседних натуральных чисел n и $n+1$ равно $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2+3n+1$, т.е. растёт с ростом n. При $n = 1$ это расстояние равно 7, а при $n > 1$ оно превышает 8. Значит, расстояние между кубами натуральных чисел не может быть равно восьми. Противоречие.

4. Миша и Дима играют в следующую игру. На карточках выписаны числа от 1 до 16, за исключением четвёрки. Игроки по очереди убирают одну карточку, пока не останется две. Если сумма оставшихся чисел является точным квадратом, то выигрывает Дима, иначе – Миша. Кто из игроков выиграет при правильной игре, если первым убирает карточку Миша?

Ответ. Миша.

Решение. Нарисуем граф, в котором вершины соответствуют числам от 1 до 16, не считая 4, а наличие ребра между вершинами означает, что сумма чисел является точным квадратом (см. рис.). Так как в течение игры должны быть убраны 13 карточек, то Миша сделает 7 ходов, а Дима – 6. Можно считать, что каждым ходом игроки убирают одну вершину и исходящие из неё рёбра. Победа Миши будет означать, что оставшиеся две вершины не соединены ребром.



Назовём набор чисел

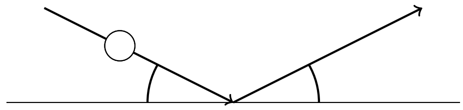
$$1, 3, 6, 8, 10, 13, 15$$

первой кучкой, а набор чисел

$$2, 5, 7, 9, 11, 14, 16$$

– второй кучкой. Заметим, что вершины, соответствующие числам из разных кучек, не соединены ребром. Первым ходом Мише нужно убрать карточку с числом 12, тем самым оставив числа из двух кучек. Далее если Дима убирает число из какой-то кучки, то Миша должен убрать какое-нибудь число из другой кучки. В таком случае в конце игры останутся два числа из разных кучек, следовательно, их сумма гарантированно не будет являться точным квадратом.

5. Бильярдный стол $ABCD$ представляет собой прямоугольник, в углах которого расположены лузы. При соударении с бортом шар продолжает движение по правилу "угол падения равен углу отражения" (см. рис.). Известно, что по шару, стоящему в точке K, можно ударить в сторону борта BC так, чтобы после трёх соударений с бортами шар вновь прошёл через точку K и закатился в лузу C. Найдите расстояние от точки K до борта CD, если $AB = 2$ м, $BC = 4.8$ м и точка K равноудалена от бортов BC и AD.



Ответ. 1.6 м.

Решение. Пусть L, M, N – точки соударения шара с бортами BC, AB и AD соответственно (см. рис. ниже). Из условия следует, что

$$\angle BLM = \angle CLK,\ \angle BML = \angle AMN,\ \angle ANM = \angle KND$$

Положим $\angle BLM = \alpha$, $\angle BML = \beta$. Из прямоугольного треугольника MBL вытекает $\alpha+\beta = 90^\circ$. Углы LCK и KND равны как накрест лежащие, откуда $\angle LCK = \alpha = \angle CLK$. Следовательно, $\triangle LKC$ равнобедренный, $LK = KC$.

Пусть P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на BC и AD соответственно. По условию $KP = KQ$, поэтому прямоугольные треугольники KPC и KQN равны. Значит, $KC = KN = LK$. Т.к. $\angle LKP = \angle NKQ = \angle CKP = \beta$, то $\triangle LPK = \triangle CPK$ по двум углам и стороне между ними, поэтому $LP = PC$. Треугольник LKN – равнобедренный, значит, равны углы при его основании LN. Но тогда равны и углы при том же основании треугольника NML, т.е. $ML = MN$. Отсюда вытекает равенство треугольников MBL и MAN, следовательно, M – середина AB. Тогда $MB = KP$ и $\triangle MBL = \triangle KPL$, значит, $BL = LP = PC$.

Пусть H – перпендикуляр, опущенный из точки K на CD. Тогда $KPCH$ – прямоугольник, следовательно, искомое расстояние равно $KH = PC = 1/3 \cdot BC = 1.6$ м.