Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №2, с. 86–96 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0016*

А.Н. ЧУПРУНОВ, Л.П. ТЕРЕХОВА

ВЕРСИИ ПОЧТИ НАВЕРНОЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ СУММ МУЛЬТИИНДЕКСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аннотация. В статье получена версия почти наверное предельной теоремы для случайных сумм мультииндексных случайных величин, принадлежащих области притяжения p-устойчивого закона.

Ключевые слова: предельные теоремы, случайные величины, область притяжения, случайная сумма, статистика Стьюдента.

УДК: 519.214

Abstract. In this paper we obtain an almost sure version of a limit theorem for random sums of multiindex random variables that belong to the domain of attraction of a p-stable law.

Keywords: limit theorems, random variables, domain of attraction, random sums, Student statistic.

1. Введение

Предположим, что $0 < p \leq 2$. Далее символом $\xrightarrow{d}$ будем обозначать сходимость по распределению, $\xrightarrow{w}$ — слабую сходимость мер, μ_ζ — распределение случайной величины ζ, $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел и $\mathbf{R}_+$ — действительную полупрямую $[0,\infty)$, $\mathbf{R}_+^d = (\mathbf{R}_+)^d$, $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Будем предполагать, что $\sum\limits_{i\in\emptyset} a_i = 0$ и $\prod\limits_{i\in\emptyset} a_i = 1$.

Пусть ζ_n, $n \in \mathbf{N}$, — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Рассмотрим меры

$$Q_n(\omega) = Q_n((\zeta_n))(\omega) = \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ \delta_{\zeta_k(\omega)},$$

где $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbf{N}$ и δ_x — мера единичной массы, сосредоточенной в точке x.

Классические предельные теоремы имеют дело со сходимостью по распределению случайных величин: $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$ при $n \to \infty$. Во многих случаях сходимость $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$ при $n \to \infty$ влечет слабую сходимость мер $Q_n(\omega) \xrightarrow{w} \mu_\zeta$ (при $n \to \infty$) для почти всех $\omega \in \Omega$. Такие предельные теоремы называются версиями почти наверное обычных предельных теорем. Впервые версии почти наверное предельных теорем появились в статьях G. Brosamler [1] и P. Schatte [2], где была получена версия почти наверное центральной предельной теоремы.

Поступили: первый вариант 13.06.2007, окончательный вариант 31.03.2009

Впоследствии I. Berkes в [3] и И.А. Ибрагимов в [4] обобщили эти результаты на нормированные суммы одинаково распределенных случайных величин, принадлежащих области притяжения p-устойчивого закона. В [5] I. Berkes и E. Csáki показали, что каждая слабая предельная теорема для случайных величин, удовлетворяющих некоторому условию, имеет почти наверное версию. В работе I. Fazekas и Z. Rychlik [6] получены условия, обеспечивающие версию почти наверное мультииндексной предельной теоремы.

В данной статье предполагаем, что случайные величины ξ_i, ξ, определенные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, независимы, одинаково распределены и принадлежат области притяжения p-устойчивого закона, т. е. для некоторой числовой последовательности B_n такой, что $B_n \longrightarrow \infty$ при $n \to \infty$, имеет место сходимость

$$S_n \xrightarrow{d} \gamma_p, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

где $S_n = \frac{1}{B_n} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \alpha_n)$, $\alpha_n = E\xi \cdot I_{\left|\frac{\xi}{B_n}\right| < 1}$ и γ_p — невырожденная случайная величина (p-устойчивая случайная величина).

Рассмотрим последовательность двумерных случайных векторов $V_n = (S_n, W_n)$, $n \in \mathbf{N}$, где $W_n = \frac{1}{B_n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \alpha_n)^2$. Следующая теорема является частным случаем теоремы В.М. Круглова и Г.Н. Петровской [7].

Теорема A. *Пусть $S_n \xrightarrow{d} \gamma_p$ при $n \to \infty$, где γ_p является p-устойчивой случайной величиной с характеристической функцией*

$$f(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\right) d\left(\frac{c_1}{|x|^p}\right) + \int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - it\frac{x}{1+x^2}\right) d\left(-\frac{c_2}{x^p}\right)\right\},$$

$t \in \mathbf{R}$, где $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$.

Тогда распределения случайных векторов (S_n, W_n), $n \in \mathbf{N}$, слабо сходятся к распределению с характеристической функцией

$$f(s,t) = \exp\left\{ \int_{-\infty}^{0} \left(e^{isx+itx^2} - 1 - is\frac{x}{1+x^2}\right) d\left(\frac{c_1}{|x|^p}\right) + \right.$$
$$\left. + \int_0^{\infty} \left(e^{isx+itx^2} - 1 - is\frac{x}{1+x^2}\right) d\left(-\frac{c_2}{x^p}\right)\right\}, \quad s, t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Рассмотрим суммы независимых случайных величин со случайным индексом суммирования

$$S_n^{\nu} = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{\nu_n} (\xi_i - \alpha_n) = \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{i} (\xi_k - \alpha_n)\right) \cdot I_{\{\nu_n = i\}},$$

где ν_n, $n \in \mathbf{N}$, — последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

А. Реньи [8] исследовал сходимость по распределению последовательности S_n^{ν} (см. также [9], с. 52, теорема 2.2.1).

Целью данной работы является доказательство аналога теоремы A для случайных сумм мультииндексных последовательностей независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения p-устойчивого закона, получение версии почти наверное этого результата, а также версии почти наверное мультииндексной предельной теоремы для статистики Стьюдента.

Заметим, что полученные в статье результаты являются новыми также и для случайных сумм обыкновенных (не мультииндексных) случайных величин.

2. Основные результаты

Здесь и далее $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbf{N}^d$. Отношения $\leq, +, \to \infty$, min, max определяются покоординатно. Например, выражение $\mathbf{n} \to \infty$ означает, что $n_i \to \infty$ для каждого $i = 1, \ldots, d$. Обозначим $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} = \left(\frac{n_1}{k_1}, \ldots, \frac{n_d}{k_d}\right)$, $M\mathbf{n} = (Mn_1, \ldots, Mn_d)$, где M — константа.

Пусть $\log_+ x = \log x$, если $x \geq e$, и $\log_+ x = 1$, если $x < e$. Пусть $|\mathbf{n}| = \prod_{i=1}^{d} n_i$ и $|\log \mathbf{n}| = \prod_{i=1}^{d} \log_+ n_i$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$.

Пусть $\zeta_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, — последовательность случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Рассмотрим меры

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((\zeta_{\mathbf{n}}))(\omega) = \frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)}.$$

Версия почти наверное мультииндексной предельной теоремы имеет вид

$$Q_{\mathbf{n}}((\zeta_{\mathbf{n}}))(\omega) \xrightarrow{w} \mu_\zeta \quad \text{при} \quad \mathbf{n} \to \infty$$

для почти всех $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим мультииндексную последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^d$, принадлежащих области притяжения p-устойчивого закона. Пусть $\xi_{\mathbf{k}}$ имеет такое же распределение, как и случайная величина ξ.

Теорема A остается справедливой для случая мультииндексных последовательностей $V_{\mathbf{n}} = (S_{\mathbf{n}}, W_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, где

$$S_{\mathbf{n}} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}), \quad W_{\mathbf{n}} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}^2} \sum_{\mathbf{i} \leq \mathbf{n}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2.$$

Пусть $\nu_{\mathbf{n}} = (\nu_{1\mathbf{n}}, \nu_{2\mathbf{n}}, \ldots, \nu_{d\mathbf{n}})$, где $\nu_{1\mathbf{n}}, \nu_{2\mathbf{n}}, \ldots, \nu_{d\mathbf{n}} : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbf{N}}$, — мультииндексная последовательность неотрицательных целочисленных случайных векторов. Рассмотрим мультииндексную последовательность двумерных случайных векторов $V_{\mathbf{n}}^\nu = (S_{\mathbf{n}}^\nu, W_{\mathbf{n}}^\nu)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, где

$$S_{\mathbf{n}}^\nu = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{i} \leq \nu_{\mathbf{n}}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}), \quad W_{\mathbf{n}}^\nu = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}^2} \sum_{\mathbf{i} \leq \nu_{\mathbf{n}}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2.$$

Обозначим через $\tau_{\mathbf{n}}$ и τ распределения случайных векторов $\left(\frac{\nu_{1\mathbf{n}}}{n_1}, \frac{\nu_{2\mathbf{n}}}{n_2}, ..., \frac{\nu_{d\mathbf{n}}}{n_d}\right)$ и $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_d)$ соответственно.

Справедливо следующее обобщение теоремы A на случай мультииндексных последовательностей.

Теорема 1. *Предположим, что* $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$ *при* $\mathbf{n} \to \infty$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, $S_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \gamma_p$ *при* $\mathbf{n} \to \infty$, *где* γ_p — *p-устойчивая случайная величина. Пусть семейства* $\{\nu_{\mathbf{n}}\}$ *и* $\{\xi_{\mathbf{n}}\}$ *независимы.*

Тогда $V_{\mathbf{n}}^\nu \xrightarrow{d} V^\nu$ *при* $\mathbf{n} \to \infty$, *где* V^ν — *случайный вектор с характеристической функцией*

$$f^\nu(s,t) = \int_{\mathbf{R}_+^d}^{\infty} f^{|\mathbf{u}|}(s,t) d\tau(\mathbf{u}), \quad s, t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

и $f(s,t)$ определяется формулой (2).

Приведем версию почти наверное теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $S_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \gamma_p$ при $\mathbf{n} \to \infty$, где γ_p — p-устойчивая случайная величина. Предположим, что $\nu_{\mathbf{n}}$ — независимые случайные векторы, семейства $\{\nu_{\mathbf{n}}\}$ и $\{\xi_{\mathbf{n}}\}$ независимы, $i = \overline{1,d}$, и $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$ при $\mathbf{n} \to \infty$.*

Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ имеет место сходимость

$$Q_{\mathbf{n}}((V_{\mathbf{n}}^{\nu}))(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{V^{\nu}} \quad \textit{при} \quad \mathbf{n} \to \infty.$$

Переходя к проекциям случайного вектора $V_{\mathbf{n}}^{v}$ на каждую координату, из теоремы 2 получаем

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2.

(a) Пусть $Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((S_{\mathbf{n}}^{\nu}))(\omega)$. Тогда

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{V_1} \quad \text{при} \quad \mathbf{n} \to \infty \quad \text{для почти всех } \omega \in \Omega.$$

(b) Пусть $Q_{\mathbf{n}}(\omega) = Q_{\mathbf{n}}((W_{\mathbf{n}}^{\nu}))(\omega)$. Тогда

$$Q_{\mathbf{n}}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{V_2} \quad \text{при } \mathbf{n} \to \infty \text{ для почти всех } \omega \in \Omega.$$

Здесь V_1 и V_2 — координаты случайного вектора V^{ν} из теоремы 2, распределения которых определяются проекциями характеристической функции (3) на первую и вторую координаты соответственно, т. е. характеристическими функциями $f(s,0)$ и $f(0,t)$.

Следующим результатом является версия почти наверное мультииндексной предельной теоремы для статистики Стьюдента.

Пусть функция $h : \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{+} \longrightarrow \mathbf{R}$ определяется следующим образом: $h(x,y) = x/\sqrt{y}$, если $y \neq 0$, и $h(x,y) = 0$, если $y = 0$. Рассмотрим последовательность случайных самонормированных сумм $T_{\mathbf{n}}^{\nu} = h(S_{\mathbf{n}}^{\nu}, W_{\mathbf{n}}^{\nu})$.

Теорема 3. *Пусть $P\{\omega : \nu(\omega) = 0\} = 0$. Тогда при выполнении условий теоремы* 2 *для почти всех $\omega \in \Omega$ имеем*

$$Q_{\mathbf{n}}((T_{\mathbf{n}}^{\nu}))(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{T^{\nu}} \quad \textit{при} \quad \mathbf{n} \to \infty,$$

где $\mu_{T^{\nu}}$ — образ меры $\mu_{V^{\nu}}$ при отображении h.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Пусть $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ и $\varphi_{\mathbf{n}}(s,t)$ — характеристическая функция случайного вектора $\left(\frac{\xi - \alpha_{|\mathbf{n}|}}{B_{|\mathbf{n}|}}, \frac{(\xi - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2}{B_{|\mathbf{n}|}^2}\right)$. Заметим, что характеристическая функция вектора $V_{\mathbf{n}}$ имеет вид

$$f_{\mathbf{n}}(s,t) = Ee^{isS_{\mathbf{n}} + itW_{\mathbf{n}}} = \prod_{\mathbf{0} \le \mathbf{i} \le \mathbf{n}} Ee^{\frac{is}{B_{|\mathbf{n}|}}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) + \frac{it}{B_{|\mathbf{n}|}^2}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2} = \varphi_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{n}|}(s,t).$$

Поэтому

$$f_{\mathbf{n}}^{\nu}(s,t) = Ee^{isS_{\mathbf{n}}^{\nu} + itW_{\mathbf{n}}^{\nu}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{k} \le \infty} \prod_{\mathbf{0} \le \mathbf{i} \le \mathbf{k}} Ee^{\frac{is}{B_{|\mathbf{n}|}}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) + \frac{it}{B_{|\mathbf{n}|}^2}(\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2} \cdot P\{\nu_{1\mathbf{n}} = k_1,\ \nu_{2\mathbf{n}} = k_2, \ldots, \nu_{d\mathbf{n}} = k_d\} =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+^d} \varphi_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{R}_+^d} f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}).$$

Из условия $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$ при $\mathbf{n} \to \infty$ следует

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \left| \int_{\mathbf{R}_+^d} f_{\mathbf{l}}^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) - \int_{\mathbf{R}_+^d} f_{\mathbf{l}}^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau(\mathbf{u}) \right| \longrightarrow 0$$

для любого $\mathbf{l} \in \mathbf{N}^d$.

Так как $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$ при $\mathbf{n} \to \infty$, то семейство $\tau_{\mathbf{n}}$ плотно, и можно выбрать $0 < \theta < \infty$ такое, что

$$\int_{u>\overline{\theta}} d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) < \varepsilon/6$$

для любого $\mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, где $\overline{\theta} = (\theta, \dots, \theta)$.

Так как $f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t) \to f^{|\mathbf{u}|}(s,t)$ при $\mathbf{n} \to \infty$, то существует такое $\mathbf{n}_1 \in \mathbf{N}^d$, что для любого $\mathbf{n} > \mathbf{n}_1$

$$\max_{0\le u\le\overline{\theta}} \left| f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t) - f^{|\mathbf{u}|}(s,t) \right| < \varepsilon/3, \quad s,t \in \mathbf{R}.$$

Тогда для любого $\mathbf{n} > \mathbf{n}_1$

$$\int_{0\le u\le\overline{\theta}} \left| f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t) - f^{|\mathbf{u}|}(s,t) \right| d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) < \varepsilon/3.$$

Так как $\tau_{\mathbf{n}} \xrightarrow{d} \tau$ при $\mathbf{n} \to \infty$, то существует $\mathbf{n}_2 \in \mathbf{N}^d$ такое, что для любого $\mathbf{n} > \mathbf{n}_2$

$$\left| \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) - \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau(\mathbf{u}) \right| < \varepsilon/3.$$

Обозначим $\mathbf{n}_0 = \max(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$. Тогда для любого $\mathbf{n} > \mathbf{n}_0$

$$\left| \int_{\mathbf{R}_+^d} f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) - \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau(\mathbf{u}) \right| \le$$

$$\le \int_{\mathbf{R}_+^d} \left| f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t) - f^{|\mathbf{u}|}(s,t) \right| d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) + \left| \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) - \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau(\mathbf{u}) \right| \le$$

$$\le \int_{0\le u\le\overline{\theta}} \left| f_{\mathbf{n}}^{|\mathbf{u}|}(s,t) - f^{|\mathbf{u}|}(s,t) \right| d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) + 2\int_{u>\overline{\theta}} d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) +$$

$$+ \left| \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) - \int_{\mathbf{R}_+^d} f^{|\mathbf{u}|}(s,t)\,d\tau(\mathbf{u}) \right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $M > 0$. Сначала докажем теорему 2 при дополнительном предположении $\frac{\nu_{1\mathbf{n}}}{n_1} \le M$, $\frac{\nu_{2\mathbf{n}}}{n_2} \le M, \dots, \frac{\nu_{d\mathbf{n}}}{n_d} \le M$. Тогда $V_{\mathbf{n}}^{\nu} = V_{\mathbf{n}}^{\nu,M} = (S_{\mathbf{n}}^{\nu}, W_{\mathbf{n}}^{\nu})$ имеет следующие координаты:

$$S_{\mathbf{n}}^{\nu} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le\infty} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}}=\mathbf{k}\}} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}}=\mathbf{k}\}},$$

$$W_{\mathbf{n}}^{\nu} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}^2} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le\infty} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}}=\mathbf{k}\}} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}^2} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}}=\mathbf{k}\}}.$$

Обозначим через $V^{\nu,M} = (\gamma_p^{\nu,M,1}, \gamma_p^{\nu,M,2})$ предельный вектор для $V_{\mathbf{n}}^{\nu,M}$.

Рассмотрим случайные векторы $(S^{\nu}_{\mathbf{ln}}, W^{\nu}_{\mathbf{ln}})$, $\mathbf{l} < \mathbf{n}$, $\mathbf{l}, \mathbf{n} \in \mathbf{N}^d$, где

$$S^{\nu}_{\mathbf{ln}} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \nu_{\mathbf{n}} \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} > M\mathbf{l}\}}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{M\mathbf{l}+\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}},$$

$$W^{\nu}_{\mathbf{ln}} = \frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \nu_{\mathbf{n}} \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} > M\mathbf{l}\}}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 = \frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}} \sum_{M\mathbf{l}+\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}}.$$

Заметим, что случайные величины $S^{\nu}_{\mathbf{ln}}$ и $S^{\nu}_{\mathbf{l}}$, а также $W^{\nu}_{\mathbf{ln}}$ и $W^{\nu}_{\mathbf{l}}$ независимы. Возьмем случайные суммы

$$S_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} = S^{\nu}_{\mathbf{n}} - S^{\nu}_{\mathbf{ln}} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}},$$

$$W_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} = W^{\nu}_{\mathbf{n}} - W^{\nu}_{\mathbf{ln}} = \frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}}.$$

Разобьем случайные величины $\xi_{\mathbf{i}}$ на сумму двух случайных величин: $\xi_{\mathbf{i}} = \xi'_{\mathbf{i}} + \xi''_{\mathbf{i}}$, где $\xi'_{\mathbf{i}} = \xi_{\mathbf{i}} \cdot I_{\left|\frac{\xi_{\mathbf{i}}}{B_{|\mathbf{n}|}}\right| < 1}$ и $\xi''_{\mathbf{i}} = \xi_{\mathbf{i}} - \xi'_{\mathbf{i}} = \xi_{\mathbf{i}} \cdot I_{\left|\frac{\xi_{\mathbf{i}}}{B_{|\mathbf{n}|}}\right| \geq 1}$. Тогда

$$S_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} = \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\xi'_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|}) \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}} + \frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} \xi''_{\mathbf{i}} \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}} = S'_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} + S''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})},$$

$$W_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} = \frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} (\xi'_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2 \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}} + \frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq M\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k}} \left((\xi''_{\mathbf{i}})^2 - 2\alpha_{|\mathbf{n}|}\xi''_{\mathbf{i}}\right) \cdot I_{\{\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}\}} = W'_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} + W''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}.$$

Будем рассматривать метрику $\rho(x, y) = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{1+(x-y)^2}}$, $x, y \in \mathbf{R}$. Имеем

$$E\rho(S^{\nu}_{\mathbf{n}}, S^{\nu}_{\mathbf{ln}}) = E\sqrt{\frac{S^2_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}}{1 + S^2_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}}} \leq \sqrt{E\frac{\left(S'_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} + S''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}\right)^2}{1 + \left(S'_{\mathbf{n}(\mathbf{l})} + S''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}\right)^2}} \leq$$
$$\leq \sqrt{2}\sqrt{E\frac{\left(S'_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}\right)^2}{1 + \left(S'_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}\right)^2} + E\frac{\left(S''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}\right)^2}{1 + \left(S''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})}\right)^2}}.$$

Оценим слагаемые в подкоренном выражении отдельно. Для этого приведем два полезных неравенства ([10], с. 117). Существуют такие константы C_1 и C_2, что

$$\sup_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{n}|\, E(\xi'_{\mathbf{i}} - \alpha_{|\mathbf{n}|})^2}{B^2_{|\mathbf{n}|}} = C_1 < \infty \tag{4}$$

и

$$\sup_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}| P(|\xi_{\mathbf{i}}| > B_{|\mathbf{n}|}) \leq C_2 < \infty. \tag{5}$$

Пусть $P(\nu_{\mathbf{n}} = \mathbf{k}) = p_{\mathbf{nk}}$. Тогда

$$E\frac{\left(S'_{\mathbf{n(l)}}\right)^2}{1+\left(S'_{\mathbf{n(l)}}\right)^2} = \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} E\frac{\left(\frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}-\alpha_{|\mathbf{n}|})\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|<B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}-\alpha_{|\mathbf{n}|})\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|<B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}\, p_{\mathbf{nk}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} \frac{|\mathbf{k}|}{B^2_{|\mathbf{n}|}} E\big(\xi\cdot I_{\{|\xi|<B_{|\mathbf{n}|}\}}-\alpha_{|\mathbf{n}|}\big)^2 p_{\mathbf{nk}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}\left(|\mathbf{n}|\,\frac{E\big(\xi\cdot I_{\{|\xi|<B_{|\mathbf{n}|}\}}-\alpha_{|\mathbf{n}|}\big)^2}{B^2_{|\mathbf{n}|}}\right)p_{\mathbf{nk}} \le C_1 M^d\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}$$

и

$$E\frac{\left(S''_{\mathbf{n(l)}}\right)^2}{1+\left(S''_{\mathbf{n(l)}}\right)^2} = \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} E\frac{\left(\frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{i}}\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|>B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{B_{|\mathbf{n}|}}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{i}}\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|>B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}\, p_{\mathbf{nk}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}}\ \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}} P(|\xi_{\mathbf{i}}|>B_{|\mathbf{n}|})\cdot\ p_{\mathbf{nk}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} |\mathbf{k}| P(|\xi|>B_{|\mathbf{n}|})\, p_{\mathbf{nk}} \le |\mathbf{n}|\, P(|\xi|>B_{|\mathbf{n}|}) M^d\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|} \le C_2 M^d\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Следовательно,

$$E\rho(S^{\nu}_{\mathbf{n}}, S^{\nu}_{\mathbf{ln}}) \le \sqrt{2}\sqrt{C_1 M^d\,\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|} + C_2 M^d\,\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}} = C\left(\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}\right)^{1/2},$$

где $C = \sqrt{2M^d(C_1+C_2)}$.

Для оценки $E\rho(W^{\nu}_{\mathbf{n}}, W^{\nu}_{\mathbf{ln}})$ используем неравенство $\frac{(a+b)^2}{1+(a+b)^2} \le 2\big(\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}\big)$.

Получаем

$$E\rho(W^{\nu}_{\mathbf{n}}, W^{\nu}_{\mathbf{ln}}) \le \sqrt{2}\sqrt{E\frac{(W'_{\mathbf{n(l)}})^2}{1+(W'_{\mathbf{n(l)}})^2} + E\frac{(W''_{\mathbf{n(l)}})^2}{1+(W''_{\mathbf{n(l)}})^2}}. \tag{6}$$

Для того чтобы оценить слагаемые в (6), воспользуемся неравенствами (4) и (5). Имеем

$$E\frac{(W'_{\mathbf{n(l)}})^2}{1+(W'_{\mathbf{n(l)}})^2} = \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} E\frac{\left(\frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}-\alpha_{|\mathbf{n}|})^2\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|<B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}-\alpha_{|\mathbf{n}|})^2\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|<B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}\, p_{\mathbf{nk}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} E\left(\frac{1}{B^2_{|\mathbf{n}|}}\sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}-\alpha_{|\mathbf{n}|})^2\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|<B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)p_{\mathbf{nk}} =$$

$$= \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}|}\left(|\mathbf{n}|\,\frac{E(\xi\cdot I_{\{|\xi|<B_{|\mathbf{n}|}\}}-\alpha_{|\mathbf{n}|})^2}{B^2_{|\mathbf{n}|}}\right)\cdot p_{\mathbf{nk}} \le C_1 M^d\,\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}$$

и

$$E\frac{(W''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})})^2}{1+(W''_{\mathbf{n}(\mathbf{l})})^2} = \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} E\frac{\left(\frac{1}{B_{\mathbf{n}}^2}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}^2-2\alpha_{|\mathbf{n}|}\xi_{\mathbf{i}})\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|>B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{B_{\mathbf{n}}^2}\sum\limits_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}}(\xi_{\mathbf{i}}^2-2\alpha_{|\mathbf{n}|}\xi_{\mathbf{i}})\cdot I_{\{|\xi_{\mathbf{i}}|>B_{|\mathbf{n}|}\}}\right)^2}\cdot p_{\mathbf{nk}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}}\ \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{i}\le\mathbf{k}} P(|\xi_{\mathbf{i}}|>B_{|\mathbf{n}|})\cdot p_{\mathbf{nk}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{0}\le\mathbf{k}\le M\mathbf{l}} |\mathbf{k}|P(|\xi|>B_{|\mathbf{n}|})\cdot p_{\mathbf{nk}} \le |\mathbf{n}|\,P(|\xi|>B_{|\mathbf{n}|})\cdot M^d\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|} \le C_2M^d\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}.$$

Поэтому

$$E\rho(W_{\mathbf{n}}^{\nu},W_{\mathbf{ln}}^{\nu}) \le \sqrt{2}\sqrt{C_1M^d\,\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}+C_2M^d\,\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}} = D\left(\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}\right)^{1/2},$$

где $D=\sqrt{2M^d(C_1+C_2)}$.

В двумерном случае в качестве метрики для векторов $\overline{x}=(x_1,x_2)$, $\overline{y}=(y_1,y_2)$ выберем $\rho(\overline{x},\overline{y})=\sqrt{\frac{(x_1-y_1)^2}{1+(x_1-y_1)^2}}+\sqrt{\frac{(x_2-y_2)^2}{1+(x_2-y_2)^2}}$.

Тогда

$$E\rho\big((S_{\mathbf{n}}^{\nu},W_{\mathbf{n}}^{\nu}),(S_{\mathbf{ln}}^{\nu},W_{\mathbf{ln}}^{\nu})\big) \le E\rho\big((S_{\mathbf{n}}^{\nu},0),(S_{\mathbf{ln}}^{\nu},0)\big)+E\rho\big((0,W_{\mathbf{n}}^{\nu}),(0,W_{\mathbf{ln}}^{\nu})\big) \le$$

$$\le C\left(\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}\right)^{1/2}+D\left(\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}\right)^{1/2} = K\left(\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{n}|}\right)^{1/2},$$

где $K=C+D$.

Условия теоремы 2.1 (I. Fazekas, Z. Rychlik [6]) выполнены. Следовательно, для почти всех $\omega\in\Omega$

$$\frac{1}{|\log\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\delta_{V_{\mathbf{k}}^{\nu,M}(\omega)} \xrightarrow{w} \mu_{V^{\nu,M}} \quad \text{при} \quad \mathbf{n}\to\infty.$$

Теперь обратимся к доказательству общего случая.

Пусть $BL(\mathbf{R}^2)$ — пространство липшицевых ограниченных функций $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ с нормой $\|g\|_{BL}=\|g\|_\infty+\|g\|_L<\infty$, где $\|g\|_\infty$ — супремум-норма, а

$$\|g\|_L=\sup_{\overline{x}\ne\overline{y}}\frac{|g(\overline{x})-g(\overline{y})|}{\rho(\overline{x},\overline{y})}.$$

Пусть $L\subset BL(\mathbf{R}^2)$ — счетное, всюду плотное множество. Далее предположим, что $g\in L$. Так как для некоторых констант $C,A<\infty$ выполняются соотношения

$$|g(\overline{x})-g(\overline{y})|\le C|\overline{x}-\overline{y}|,\quad \overline{x},\overline{y}\in\mathbf{R}^2,$$

и

$$|g(\overline{x})-g(\overline{y})|\le 2\sup_{\overline{x}\in\mathbf{R}^2}g(x)=2A,$$

то

$$|g(\overline{x})-g(\overline{y})|\le G\min(|\overline{x}-\overline{y}|,1),\quad \overline{x},\overline{y}\in\mathbf{R}^2,$$

где $G\ge\max(2A,C)$. Будем считать, что $G\ge1$.

Рассмотрим последовательность $M_m\longrightarrow\infty$, $m\to\infty$, такую, что M_m является точкой непрерывности функции распределения случайного вектора ν для любого $m\in\mathbf{N}$. Обозначим $\overline{M_m}=(M_m,\dots,M_m)$, $\overline{\nu}=(\nu,\dots,\nu)$.

Покажем, что для почти всех $\omega \in \Omega$ имеет место сходимость

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>\overline{M_m}\right\}}(\omega)\longrightarrow P(\overline{\nu}>\overline{M_m})$$

при $\mathbf{n}\to\infty$, $m\in\mathbf{N}$.

Обозначим $p_{\mathbf{k}m}=P\big(\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>\overline{M_m}\big)$, $\mathbf{k}\in\mathbf{N}^d$, $m\in\mathbf{N}$. Тогда

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>\overline{M_m}\right\}}(\omega)=$$

$$=\left(\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\big(I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>\overline{M_m}\right\}}(\omega)-p_{\mathbf{k}m}\big)\right)+\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}p_{\mathbf{k}m}.$$

Пусть $\eta_{\mathbf{k}}=I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>\overline{M_m}\right\}}(\omega)-p_{\mathbf{k}m}$. Так как случайные величины $\eta_{\mathbf{k}}$ и $\eta_{\mathbf{l}}$, $\mathbf{k}\ne\mathbf{l}$, независимы, то

$$E\eta_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{l}}=E\big(I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>\overline{M_m}\right\}}(\omega)-p_{\mathbf{k}m}\big)\big(I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{l}}}{\mathbf{l}}>\overline{M_m}\right\}}(\omega)-p_{\mathbf{l}m}\big)=0<\left(\frac{|\mathbf{l}|}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/2},\quad \mathbf{l}<\mathbf{k}.$$

Таким образом, согласно мультииндексному закону больших чисел [6] получаем

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\eta_{\mathbf{k}}\longrightarrow 0\ \text{ почти наверное при } \mathbf{n}\to\infty.$$

Из сходимости $\frac{\nu_{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}}\xrightarrow{d}\overline{\nu}$ при $\mathbf{n}\to\infty$ следует сходимость

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}p_{\mathbf{k}m}\longrightarrow P(\overline{\nu}>\overline{M_m})$$

для почти всех $\omega\in\Omega$ при $\mathbf{n}\to\infty$.

Выберем $\Omega'\in\Omega$ такие, что

1) $P(\Omega')=1$,
2) $\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum\limits_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}g(V_{\mathbf{k}}^{\nu,M_m}(\omega))\longrightarrow Eg(V^{\nu,M_m})$ при $\mathbf{n}\to\infty$ для всех $\omega\in\Omega'$, $m\in\mathbf{N}$,
3) $\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum\limits_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}I_{\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}}>M_m\right\}}(\omega)\longrightarrow P(\overline{\nu}>\overline{M}_m)$ при $\mathbf{n}\to\infty$ для всех $\omega\in\Omega'$, $m\in\mathbf{N}$.

Пусть $\omega\in\Omega$, $\varepsilon>0$. Рассмотрим

$$\left|\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}g(V_{\mathbf{k}}^{\nu}(\omega))-Eg(V^{\nu})\right|\le$$

$$\le\left|\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}g(V_{\mathbf{k}}^{\nu,M_m}(\omega))-Eg(V^{\nu,M_m})\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}(g(V_{\mathbf{k}}^{\nu}(\omega))-g(V_{\mathbf{k}}^{\nu,M_m}(\omega)))\right|+\left|Eg(V^{\nu,M_m})-Eg(V^{\nu})\right|=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3. \quad (7)$$

В соответствии с условием 2) существует номер $\mathbf{n}_1$ такой, что

$$\Sigma_1=\left|\frac{1}{|\log \mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}g(V_{\mathbf{k}}^{\nu,M_m}(\omega))-Eg(V^{\nu,M_m})\right|<\varepsilon/3$$

для всех $\mathbf{n}>\mathbf{n}_1$.

Оценим вторую сумму в выражении (7). Имеем

$$\Sigma_2 = \left| \frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \big(g(V_{\mathbf{k}}^{\nu}(\omega)) - g(V_{\mathbf{k}}^{\nu, M_m}(\omega)) \big) \right| \le$$
$$\le \frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} G \min \big(|V_{\mathbf{k}}^{\nu}(\omega) - V_{\mathbf{k}}^{\nu, M_m}(\omega)|, 1 \big) \le \frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} G I_{\left\{ \frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}} > \overline{M_m} \right\}}(\omega).$$

Используя условие 3), получаем

$$\overline{\lim_{\mathbf{n} \to \infty}} \Sigma_2 \le G P(\overline{\nu} > \overline{M_m}). \tag{8}$$

В силу (8) найдется $m \in \mathbf{N}$ такой, что

$$P(\overline{\nu} > \overline{M_m}) < \varepsilon / 3G.$$

Существует $\mathbf{n}_2 \in \mathbf{N}^d$ такой, что

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} I_{\left\{ \frac{\nu_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}} > \overline{M_m} \right\}} < \varepsilon / 3$$

для любого $\mathbf{n} > \mathbf{n}_2$.

Так как $V^{\nu, M_m} \xrightarrow{d} V^{\nu}$ при $M_m \to \infty$, то существует такой $\mathbf{n}_3$, что

$$\Sigma_3 = |Eg(V^{\nu, M_m}) - Eg(V^{\nu})| < \varepsilon / 3$$

для всех $\mathbf{n} > \mathbf{n}_3$.

Пусть $\mathbf{n}_0 = \max(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$. Тогда

$$\left| \frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} g(V_{\mathbf{k}}^{\nu}(\omega)) - Eg(V^{\nu}) \right| < \varepsilon$$

при $\mathbf{n} > \mathbf{n}_0$. □

Доказательство следствия теоремы 2. Пусть $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная непрерывная функция.

Заметим, что $S_{\mathbf{n}}^{\nu}$ является проекцией случайного вектора $V_{\mathbf{n}}^{\nu}$ на первую координату, а $W_{\mathbf{n}}^{\nu}$ — на вторую координату. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ сходимость $Q_{\mathbf{n}}((V_{\mathbf{n}}^{\nu}))(\omega) \xrightarrow{w} \mu_{V^{\nu}}$ при $\mathbf{n} \to \infty$ влечет сходимость

$$\lim_{\mathbf{n} \to \infty} \int g(x)\, dQ_{\mathbf{n}}(S_{\mathbf{n}}^{\nu})(\omega)(x) = Eg(V_1),$$

а также сходимость

$$\lim_{\mathbf{n} \to \infty} \int g(x)\, dQ_{\mathbf{n}}(W_{\mathbf{n}}^{\nu})(\omega)(x) = Eg(V_2). \qquad \square$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $D = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, y = 0\}$. Из условия $P\{\omega : \nu(\omega) = 0\} = 0$ следует, что мера множества точек разрыва функции $h(x, y)$ равна нулю (т. е. $P(\nu \in D) = 0$). Тогда по теореме 5.1 ([11], с. 49) имеем

$$\lim_{\mathbf{n} \to \infty} \int g(x)\, dQ_{\mathbf{n}}(T_{\mathbf{n}}^{\nu})(\omega)(x) = \lim_{\mathbf{n} \to \infty} \int g(x)\, dQ_{\mathbf{n}}(h(V_{\mathbf{n}}^{\nu}))(\omega)(x) =$$
$$= \lim_{\mathbf{n} \to \infty} \int g(h(z))\, dQ_{\mathbf{n}}(V_{\mathbf{n}}^{\nu})(\omega)(z) = Eg(h(V^{\nu})) = Eg(T^{\nu}). \qquad \square$$

Литература

[1] Brosamler G. *An almost everywhere central limit theorem* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1988. – V. 104. – P. 561–574.
[2] Schatte P. *On strong versions of the central limit theorem* // Math. Nachr. – 1988. – V. 137. – P. 249–256.
[3] Berkes I. *On the almost sure central limit theorem and domains of attraction* // Probab. Theory Related Fields. – 1995. – V. 102. – P. 1–18.
[4] Ибрагимов И.А. *О почти всюду версиях предельных теорем* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350. – С. 301–303.
[5] Berkes I., Csáki E. *A universal result in almost sure central limit theory* // Stoch. Proc. Appl. – 2001. – V. 94. – P. 105–134.
[6] Fazekas I., Rychlik Z. *Almost sure central limit theorems for random fields* // Math. Nachr. – 2003. – V. 259. – P. 12–18.
[7] Kruglov V.M., Petrovskaya G.N. *Weak convergence of self-normalized random poligonal lines* // J. of Math. Sci. – 2002. – V. 112. – P. 4145–4154.
[8] Rényi A. *On the theory of order statistics* // Acts Math. Acad. Sci. Hung. – 1953. – V. 4. – P. 191–231.
[9] Круглов В.М., Королев В.Ю. *Предельные теоремы для случайных сумм.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 269 с.
[10] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 264 с.
[11] Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер.* – М.: Наука, 1977. – 352 с.

А.Н. Чупрунов

ведущий научный сотрудник,
НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. профессора Нужина, д. 1/37,

`e-mail:` achuprunov@mail.ru

Л.П. Терехова

аспирант, НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. профессора Нужина, д. 1/37,

`e-mail:` t-lidia@yandex.ru

A.N. Chuprunov

Leading Researcher,
Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan State University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` achuprunov@mail.ru

L.P. Terekhova

Postgraduate, Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan State University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` t-lidia@yandex.ru