

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.529.5

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.85-100

ВЛИЯНИЕ КОАГУЛЯЦИИ И ДРОБЛЕНИЯ КАПЕЛЬ НА ПАРАМЕТРЫ ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

Ю.В. Зуев

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), г. Москва, 125993, Россия*

Аннотация

В работе установлены условия, при которых расчет газокапельной турбулентной струи должен проводиться с учетом взаимодействия капель. Представлена математическая модель газожидкостной полидисперсной турбулентной струи, в которой учтены коагуляция и дробление капель. По результатам расчетов, выполненных по этой математической модели, определены три диапазона изменения начальной суммарной объемной концентрации капель, соответствующие различному влиянию взаимодействия капель в струе на ее параметры. Для первого диапазона характерно отсутствие влияния столкновений капель на все параметры струи, второй диапазон отличается незначительной зависимостью скоростей фаз от коагуляции капель, третий диапазон соответствует концентрации капель в начальном сечении струи, при которой происходят интенсивные процессы коагуляции и дробления капель, влияющие на все параметры струи. Сделаны следующие выводы: в первом и во втором случаях при решении многих прикладных задач уравнения математической модели струи могут быть записаны без учета межчастичного взаимодействия, в третьем случае учет коагуляции и дробления капель является обязательным.

Ключевые слова: двухфазная струя, газ, капли, коагуляция и дробление капель, математическое моделирование

Введение

В различных областях техники часто используются двухфазные турбулентные струйные течения. Обычно непрерывной фазой таких течений является газ, а дискретной фазой – твердые или жидкие частицы. Двухфазные струи с твердыми частицами находят применение, например, в различных технологических установках нанесения покрытий и абразивной обработки, а струи с жидкими частицами (каплями) – при распыливании топлива в камерах сгорания тепловых двигателей, проточных химических реакторах, поливальных сельскохозяйственных установках и во многих других случаях. Использование двухфазной газокапельной струи в установках пожаротушения [1] позволяет увеличить в 2–3 раза радиус действия этих установок и защищаемую площадь при фиксированном расходе тушащей жидкости по сравнению с установками, в которых применяются однофазные жидкостные струи. Проведенные расчеты показывают, что для достижения максимального радиуса действия установки пожаротушения на срезе ее сопла необходимо сформировать двухфазную струю с массовой расходной концентрацией жидкости (отношением массового расхода капель к массовому расходу газа), равной примерно 40.

Этому значению расходной массовой концентрации соответствует начальная объемная концентрации капель $\alpha_f \simeq 4.5 \cdot 10^{-2}$.

В газокпельных турбулентных струях при определенных условиях возможны коагуляция и дробление капель, которые могут оказывать значительное влияние на параметры струй, в частности на их дальность. Поэтому для решения широкого круга прикладных задач необходимо иметь математическую модель газокпельной струи, позволяющую рассчитывать параметры этой струи с учетом коагуляции и дробления капель. При создании такой математической модели нужно определить, какие механизмы межчастичных взаимодействий оказывают существенное влияние на распространение газокпельных струй, а при ее использовании – в каких случаях необходим учет этих взаимодействий.

В турбулентных двухфазных потоках возможны два механизма межчастичного взаимодействия: за счет различия пульсационных скоростей капель и за счет различия их осредненных скоростей. В монографии [2] дана оценка влияния турбулентных пульсаций капель на закономерности их столкновений при наличии осредненного скольжения фракций. Рассмотрен случай двухфракционного материала, турбулентность предполагается изотропной, пульсационная скорость мелких капель изменяется по гармоническому закону, а пульсационное движение крупных капель не учитывается. Эта оценка показала, что в реальных условиях возрастание частоты столкновений за счет турбулентных пульсаций незначительно, поэтому в практических расчетах следует рассматривать коагуляцию капель только вследствие разности их скоростей в осредненном движении. В монографии [3] проведено сравнение интенсивности различных механизмов взаимодействия мелких частиц, причем частота столкновений, связанных с турбулентными пульсациями, рассчитывалась по формуле Сафмена и Тэрнера [4]. Результаты этого сравнения указывают на то, что в случае достаточно крупных частиц (диаметром более 5 мкм) важнейшим фактором, определяющим частоту столкновений, становится различие осредненных скоростей частиц разных размеров, и данные результаты согласуются с оценкой, выполненной в [2]. Проведенная нами оценка порядка членов осредненных по пространству и времени уравнений Навье–Стокса применительно к двухфазному струйному течению показала, что расчет коагуляции в этом случае можно проводить в одномерной постановке и учитывать при этом различие только в осредненных скоростях капель разного размера. Это объясняется тем, что осредненные поперечные и пульсационные скорости капель в струе малы по сравнению с их осевыми осредненными скоростями.

Расчет коагуляции можно проводить методом Эйлера или Лагранжа [5]. Метод Эйлера используется при изучении эволюции количества частиц определенных размеров, а метод Лагранжа – эволюции размеров частиц рассматриваемых фракций. Часто с целью упрощения математической модели непрерывная функция плотности распределения частиц по размерам заменяется гистограммой. При этом частицы группируются так, что в каждой группе находятся частицы размером от $D_f - \Delta D/2$ до $D_f + \Delta D/2$ с характерными размерами D_f . Эти группы называются классами, или фракциями, частиц. Параметры частиц конкретного класса в настоящей работе обозначаются индексом f ($f = 1, 2, \dots, F$; F – количество классов частиц). В приведенном в монографии [5] обзоре исследований, посвященных коагуляции и дроблению частиц, отмечается, что результаты расчетов, выполненных с использованием методов Эйлера и Лагранжа, хорошо согласуются между собой, но в большинстве работ используется более простой в реализации метод Лагранжа. При этом неплохо согласуются между собой и расчеты, выполненные при разбиении функции распределения на 5, 10, 15 и 20 фракций; при меньшем их количестве погрешность расчетов становится заметной. Из этого делается вывод, что выбор

5–10 фракций частиц при проведении расчетов полидисперсных течений можно считать оптимальным.

Для оценки влияния соударений частиц на параметры двухфазного течения в опубликованных работах предлагаются разные критерии. Например, в статье [6] при создании математической модели двухфазных течений рекомендуется учитывать межчастичные взаимодействия при объемной концентрации частиц, превышающей 10^{-3} . В монографии [7] для случая гравитационного осаждения частиц в трубе получено значение “столкновительного” числа Стокса, при котором столкновения частиц начинают влиять на динамические характеристики течения. При этом предполагается, что движение частиц подчиняется закону Стокса, а число Стокса рассчитывается по плотностям материалов частиц, их диаметрам, счетным концентрациям и коэффициенту вязкости непрерывной (газовой) фазы. При гравитационном осаждении и в нисходящем течении в трубе влияние столкновений частиц на их движение начинается при “столкновительном” числе Стокса порядка 0.1.

Несмотря на большое количество публикаций, посвященных столкновениям частиц, влияние коагуляции и дробления капель на параметры газок капельных струй изучено недостаточно полно – отсутствуют количественные данные о влиянии этих явлений на скорости фаз, объемную концентрацию капель и дальность струи. Решение задачи, рассмотренной в настоящей статье, позволяет определить значения суммарной объемной концентрации капель в начальном сечении газок капельной струи, при которых необходимо использовать математические модели двухфазной струи с учетом коагуляции и дробления капель. Полученная в результате информация имеет теоретическое и практическое значение.

1. Математическая модель газок капельной полидисперсной турбулентной струи с учетом коагуляции и дробления капель

Результаты расчетов, приведенных ниже, получены с использованием разработанной нами математической модели газок капельной полидисперсной турбулентной струи, уравнения которой записаны с учетом коагуляции и дробления капель. При этом за основу взята созданная ранее и приведенная в [8] математическая модель двухфазной струи с монодисперсными частицами.

Математическая модель полидисперсной изотермической струи включает осредненные по пространству и времени уравнения баланса массы и количества движения фаз, уравнение, описывающее изменение диаметра капель в результате их взаимодействия, уравнения состояния фаз и уравнение, связывающее объемные концентрации газа и капель. Описание движения обеих фаз проводится в переменных Эйлера. Перечисленные уравнения получаются осреднением по пространству и времени мгновенных микроуравнений каждой фазы, записанных для некоторого произвольного макрообъема области течения [9]. Пространственное осреднение выполняется по методу Р.И. Нигматулина [9], а временное осреднение – по методу О. Рейнольдса [10]. На заключительном этапе вывода уравнений двухфазной струи проводится оценка порядка членов полученных осредненных уравнений с учетом особенностей струйного пограничного слоя, так же как это делается при выводе уравнений Рейнольдса однофазных турбулентных течений [10]. В связи с тем, что турбулентные струйные течения являются автомодельными и подобными, для моментов корреляции пульсационных параметров фаз, входящих в осредненные уравнения, используются алгебраические выражения [8].

С целью упрощения уравнений, описывающих движение капель, непрерывная функция распределения объемной концентрации капель по размерам заменяется

гистограммой с выделением F классов капель, параметры которых обозначаются нижним индексом f ($f = 1, 2, \dots, F$). Принимается, что капли одного класса имеют одинаковые диаметры D_f , скорости u_f , объемные концентрации α_f и плотности ρ_f . Расчет коагуляции капель проводится методом Лагранжа [5]. При этом учитывается, что различие пульсационных скоростей и поперечных осредненных скоростей капель различного размера мало по сравнению с различием их продольных осредненных скоростей. С учетом изложенного уравнения газо-капельной полидисперсной турбулентной изотермической осесимметричной струи, в которой возможны коагуляция и дробление капель, в цилиндрической системе координат записываются следующим образом:

1) уравнение баланса массы газовой фазы

$$\frac{\partial}{\partial x} \alpha u + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \alpha v = 0; \quad (1)$$

2) уравнение баланса массы капель класса f

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho_f \alpha_f u_f + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) = M_{f,c}; \quad (2)$$

3) уравнение движения газовой фазы

– в проекции на ось x (совпадает с осью струи):

$$\rho \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \alpha v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho \alpha \langle u'v' \rangle - \sum_{f=1}^F F_{cf,x}; \quad (3)$$

– в проекции на ось y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

4) уравнение движения капель класса f

– в проекции на ось x

$$\begin{aligned} \rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial u_f}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + F_{cf,x} + \sum_{j=1}^F M_{fj,c} (u_j - u_f); \end{aligned} \quad (5)$$

– в проекции на ось y

$$\begin{aligned} \rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + 2\langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial v_f}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \rho_f (\alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + u_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle) - \\ - \frac{v_f}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle v_f'^2 \rangle + F_{cf,y} + \sum_{j=1}^F M_{fj,c} (v_j - v_f); \end{aligned} \quad (6)$$

5) уравнение, описывающее изменение диаметра капель класса f вследствие их коагуляции и дробления:

$$\left(\frac{dD_f^3}{dx} \right)_c = \frac{6}{\pi u_f} \sum_{j=1}^f K_{fj} e_{fj} \Phi_{fj} \alpha_j; \quad (7)$$

6) уравнения состояния фаз

$$p = \rho RT, \quad \rho_f = \text{const}; \quad (8)$$

7) уравнение, связывающее объемные концентрации фаз:

$$\alpha + \sum_{f=1}^F \alpha_f = 1. \quad (9)$$

При записи уравнений (1)–(9) введены следующие обозначения: x, y – оси координат; u, v – проекции вектора скорости на оси координат x и y ; ρ – физическая плотность; α – объемная концентрация; $M_{f,c}$ – интенсивность изменения массы капель класса f в результате их взаимодействия с другими каплями в единице объема среды в единицу времени; $M_{fj,c}$ – интенсивность перехода массы дисперсной фазы из класса f в класс j в единице объема среды в единицу времени вследствие коагуляции и дробления; \mathbf{F}_{cf} – сила сопротивления капель класса f , отнесенная к единице объема среды; K_{fj}, e_{fj} и Φ_{fj} – константа коагуляции (ядро столкновений), коэффициент захвата (осаждения) и коэффициент эффективности соударений (параметр коагуляции и дробления) капель классов f и j [5, 7, 11]; D_f, D_j – диаметры капель классов f и j . Параметры газа индексов не имеют, параметры капель обозначены индексами f и j , пульсационные параметры фаз – штрихами сверху, моменты корреляции пульсационных величин – угловыми скобками.

Для расчета силы сопротивления капель, проекции которой входят в правые части уравнений (3), (5) и (6), используется формула $\mathbf{F}_{cf} = 3\alpha_f C_{Df} \rho (\mathbf{W} - \mathbf{W}_f) |\mathbf{W} - \mathbf{W}_f| / (4D_f)$ [11], где \mathbf{W} и \mathbf{W}_f – векторы скорости газа и капель класса f соответственно; C_{Df} – коэффициент сопротивления капель, определяемый по формуле $C_{Df} = 24/\text{Re} + 4/\sqrt{\text{Re}} + 0.4$ [11], Re – число Рейнольдса, рассчитанное по разности скоростей газа и капель.

Расчет коагуляции и дробления капель при их соударении проводится методом Лагранжа, описанным в [5]. При этом члены уравнений (2), (5) и (6), учитывающие изменение массы и количества движения капель вследствие их коагуляции и дробления, имеют вид

$$\begin{aligned} M_{f,c} &= \frac{6\rho_f \alpha_f}{\pi} \left[\frac{1}{D_f^3} \sum_{j=1}^f K_{fj} e_{fj} \Phi_{fj} \alpha_j - \sum_{j=f}^F K_{fj} e_{fj} \Phi_{fj} \frac{\alpha_j}{D_j^3} \right]; \\ \sum_{j=1}^F M_{fj,c} (u_j - u_f) &= \frac{6\rho_f \alpha_f}{\pi} \left[\frac{1}{D_f^3} \sum_{j=1}^f K_{fj} e_{fj} \alpha_j (u_j - u_f) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=f}^F K_{fj} e_{fj} \frac{\alpha_j}{D_j^3} (1 - \Phi_{fj}) (u_j - u_f) \right]; \\ \sum_{j=1}^F M_{fj,c} (v_j - v_f) &= \frac{6\rho_f \alpha_f}{\pi} \left[\frac{1}{D_f^3} \sum_{j=1}^f K_{fj} e_{fj} \alpha_j (v_j - v_f) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=f}^F K_{fj} e_{fj} \frac{\alpha_j}{D_j^3} (1 - \Phi_{fj}) (v_j - v_f) \right]. \end{aligned}$$

Моменты корреляции пульсационных параметров фаз, входящие в осредненные уравнения (1)–(9), вычисляются с помощью формул, приведенных в [8]:

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= -K_u K_v l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \langle u'_f v'_f \rangle = -K_{uf} K_{vf} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \langle v_f'^2 \rangle &= K_{vf}^2 l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad \langle \alpha'_f v'_f \rangle = -\frac{K_v K_{vf}}{\text{Sc}_\tau} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial \alpha_f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь l – путь перемешивания Прандтля, связанный с макромасштабом и интегральным масштабом турбулентности [12] и определяемый по формуле $l = \sqrt{B}[\Delta u_{\max}/(\partial u/\partial y)_{\max}]$ [13], где B – константа (для осесимметричных струй $B = 0.013$), Δu_{\max} и $(\partial u/\partial y)_{\max}$ – максимальные значения разности продольных скоростей и производной продольной скорости газа в рассматриваемом сечении струи; $K_u = u'/u'_0$; $K_v = v'/v'_0$; $K_{uf} = u'_f/u'_0$; $K_{vf} = v'_f/v'_0$; u'_0 и v'_0 – средние квадратичные пульсационные скорости газовой фазы, определяемые по параметрам газовой фазы с использованием уравнений для однофазной струи [14]; u' , v' , u'_f и v'_f – средние квадратичные пульсационные скорости фаз в двухфазном потоке, расчет которых проводится с помощью модели турбулентности, изложенной в [15]; Sc_T – турбулентное число Шмидта однофазной струи (для осесимметричной струи принимается равным 0.8) [14].

Система уравнений (1)–(9) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & u = u(y), \quad u_f = u_f(y), \quad v_f = v_f(y), \quad \alpha_f = \alpha_f(y), \\ y = \infty: \quad & u = u_e, \quad u_f = u_{fe}, \quad v_f = 0, \quad \alpha_f = \alpha_{fe}, \\ y = 0: \quad & v = 0, \quad v_f = 0, \quad \partial u/\partial y = 0, \quad \partial u_f/\partial y = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Индексом e обозначены параметры фаз на границе струи.

Аппроксимация дифференциальных уравнений с частными производными (2), (3), (5) и (6) разностными уравнениями проводится с использованием неявной шеститочечной конечно-разностной схемы, имеющей второй порядок точности (схемы Кранка–Николсона с весовым коэффициентом 1/2) и являющейся безусловно устойчивой [16]. Обыкновенное дифференциальное уравнение (7) решается методом Рунге–Кутты. Уравнение баланса массы газовой фазы (1) аппроксимируется по явной четырехточечной схеме. Подробное описание использовавшегося метода расчета двухфазной струи и результаты его валидации приведены в монографии [17]. Точность расчетов контролируется по интегралу избыточного количества движения среды в целом, который должен оставаться постоянным по длине струи.

2. Валидация разработанной математической модели газокапельной турбулентной струи

В связи с тем что экспериментальные исследования газокапельных струй малочисленны и в опубликованных работах отсутствуют все необходимые для проведения расчетов граничные условия, валидация разработанной математической модели проводится с привлечением данных экспериментального исследования газовой струи с твердыми частицами [18]. При этом учитывается, что использовавшаяся при выводе уравнений (2), (5)–(7) математическая модель взаимодействия частиц хорошо зарекомендовала себя при расчете двухфазных течений в соплах [5, 11].

Авторами [18] выполнено экспериментальное исследование турбулентной изотермической воздушной струи со стеклянными шариками плотностью $\rho_f = 2500$ кг/м³ и диаметром 105 мкм, истекающей из трубы радиусом $12.7 \cdot 10^{-3}$ м в неподвижный воздух с температурой 300 К. Массовый расход воздуха равен $2.1 \cdot 10^{-3}$ кг/с, массовый расход частиц – $0.42 \cdot 10^{-3}$ кг/с. В выходном сечении трубы температура воздуха и частиц равна 300 К, скорость воздуха и частиц на оси трубы – 4.7 и 4.4 м/с соответственно. В ходе эксперимента в ряде сечений струи с помощью доплеровского анемометра измерялись осредненные скорости фаз, объемная концентрация частиц и момент корреляции пульсационных скоростей газовой фазы $\langle u'v' \rangle$. Результаты эксперимента представлены в [18] в виде графиков,

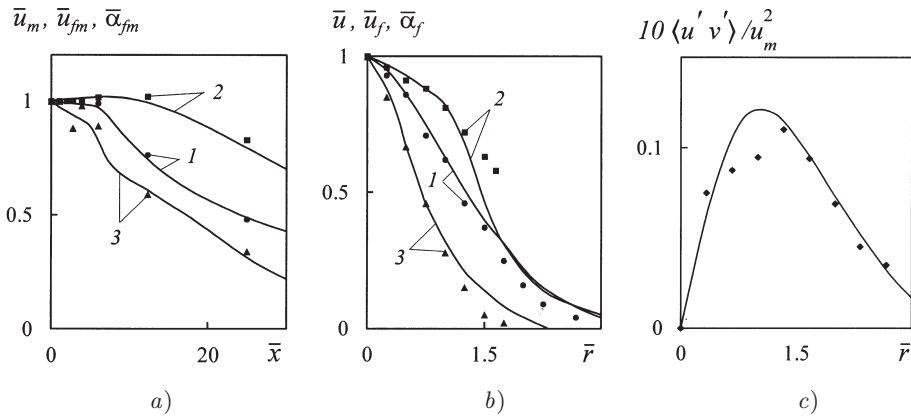


Рис. 1. Сравнение результатов расчета по модели (1)–(11) с экспериментальными данными [18]: а) изменение осредненных параметров фаз вдоль оси струи; б) поперечные поля осредненных параметров фаз в сечении $\bar{x} = 12.4$; в) поперечное поле безразмерного момента корреляции пульсационных скоростей газовой фазы в сечении $\bar{x} = 12.4$. Обозначения: 1 – скорость газа; 2 – скорость частиц; 3 – объемная концентрация частиц; линии – расчет; точки – эксперимент [18]

на которых приводится изменение параметров фаз вдоль оси и в поперечных сечениях струи. Сравнение результатов расчета с данными эксперимента приведено на рис. 1.

На этом рисунке используются следующие обозначения: $\bar{x} = x/R_0$; $\bar{r} = r/R_0$; $\bar{u}_m = u_m/u_{m0}$; $\bar{u}_{fm} = u_{fm}/u_{fm0}$; $\bar{\alpha}_{fm} = \alpha_{fm}/\alpha_{fm0}$; $\bar{u} = u/u_m$; $\bar{u}_f = u_f/u_{fm}$; $\bar{\alpha}_f = \alpha_f/\alpha_{fm}$; r, R_0 – радиусы текущего и начального сечений струи; индексом m обозначены параметры фаз на оси струи, индексом 0 – параметры фаз в ее начальном сечении.

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что приведенная выше математическая модель двухфазной струи удовлетворительно описывает изменение параметров фаз в реальной струе.

3. Результаты расчетов

Целью настоящей работы является выявление влияния коагуляции и дробления капель на результаты расчета газок капельных турбулентных струй в зависимости от граничных условий. Вследствие того что двухфазные струйные течения, так же как и однофазные течения, являются автомодельными по скоростям фаз, течение на некотором расстоянии от сопла не будет зависеть от начальных скоростей фаз, а будет определяться только начальными объемными концентрациями и размерами капель при прочих равных условиях.

Для того чтобы выявить, как влияет начальная объемная концентрация капель на изменение параметров газок капельной струи при протекании в ней процессов коагуляции и дробления капель, с использованием математической модели (1)–(11) были проведены расчеты такой струи при условии, что непрерывной фазой является воздух, а дискретной фазой – капли воды, которые объединены в пять классов с характерными диаметрами $D_f = 10, 30, 50, 70$ и 90 мкм. Количество классов капель выбрано в соответствии с целью исследования и рекомендациями, данными в [5] (при большем количестве фракций частиц точность расчетов возрастает незначительно, но появляются трудности в графическом представлении и восприятии результатов расчетов). При выборе характерных размеров классов капель

предполагалось, что истекающая из сопла газок капельная смесь получается в специальном устройстве при смешении воздуха с каплями воды, получаемыми с помощью пневматической форсунки; при этом размер капель меняется от 0 до 100 мкм и распределение их объемной концентрации по размерам подчиняется нормальному закону.

В начальном сечении струи скорости капель всех классов u_{f0} принимались равными 80 м/с, скорость газа $u_0 = 100$ м/с, температуры газа T_0 и капель $T_{f0} = 300$ К. Считалось, что струя истекает из сопла диаметром $50 \cdot 10^{-3}$ м в неподвижный воздух с температурой $T_e = 300$ К и давлением $p = 10^5$ Па. Расчеты проводились для четырех значений суммарной объемной концентрации капель в начальном сечении струи: 10^{-4} , $5 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3} и $5 \cdot 10^{-3}$. При этом соотношение между начальными объемными концентрациями капель α_{f0} выделенных пяти классов сохранялось неизменным – 1 : 2 : 4 : 2 : 1. Поперечные поля в начальном сечении струи принимались равномерными.

При анализе результатов расчетов степень влияния взаимодействия капель на параметры струи оценивалась по формуле

$$\delta f = \frac{\Delta f_{\max}}{f_0} \cdot 100\%, \quad (12)$$

где Δf_{\max} – максимальное различие в значениях некоторого параметра струи f , полученных в расчетах с учетом и без учета взаимодействия капель; f_0 – значение параметра f в начальном сечении струи.

Расчет двухфазной струи при начальной концентрации капель, равной 10^{-4} , показал, что взаимодействие капель не влияет на изменение параметров газа и капель в струе.

Результаты расчета двухфазной струи при начальной суммарной объемной концентрации капель $\alpha_{f\Sigma 0} = 5 \cdot 10^{-4}$ приведены в безразмерном виде на рис. 2. Здесь обезразмеривание продольной координаты x проводится так же, как на рис. 1. С учетом того, что поля всех параметров фаз в начальном сечении струи приняты равномерными, безразмерные параметры газа и капель выделенных классов определяются по формулам: $\bar{u}_m = u_m/u_0$; $\bar{u}_{fm} = u_{fm}/u_0$; $\bar{\alpha}_{fm} = \alpha_{fm}/\alpha_{f\Sigma 0}$; $\bar{D}_{fm} = D_{fm}/D_0$, где u_0 и $\alpha_{f\Sigma 0}$ – скорость газа и суммарная объемная концентрация капель в начальном сечении струи, $\alpha_{f\Sigma 0} = \sum_{f=1}^F \alpha_{f0}$; D_0 – масштаб диаметра капель, принятый равным 100 мкм. Для удобства сопоставления графиков скоростей капель и газа скорости капель на оси струи обезразмериваются относительно скорости газа в начальном сечении струи u_0 . Средние значения параметров капель на оси струи рассчитываются по формулам:

$$u_{f\Sigma m} = \frac{\sum_{f=1}^F (\alpha_{fm} u_{fm}^2)}{\sum_{f=1}^F (\alpha_{fm} u_{fm})};$$

$$D_{f\Sigma m} = \frac{\sum_{f=1}^F \alpha_{fm}}{\sum_{f=1}^F (\alpha_{fm}/D_{fm})};$$

$$\alpha_{f\Sigma m} = \sum_{f=1}^F \alpha_{fm}.$$

Диаметр капель $D_{f\Sigma m}$ называется средним объемно-поверхностным или заутеровским диаметром [5]. Средние параметры фаз на оси струи обезразмериваются относительно их значений в начальном сечении струи.

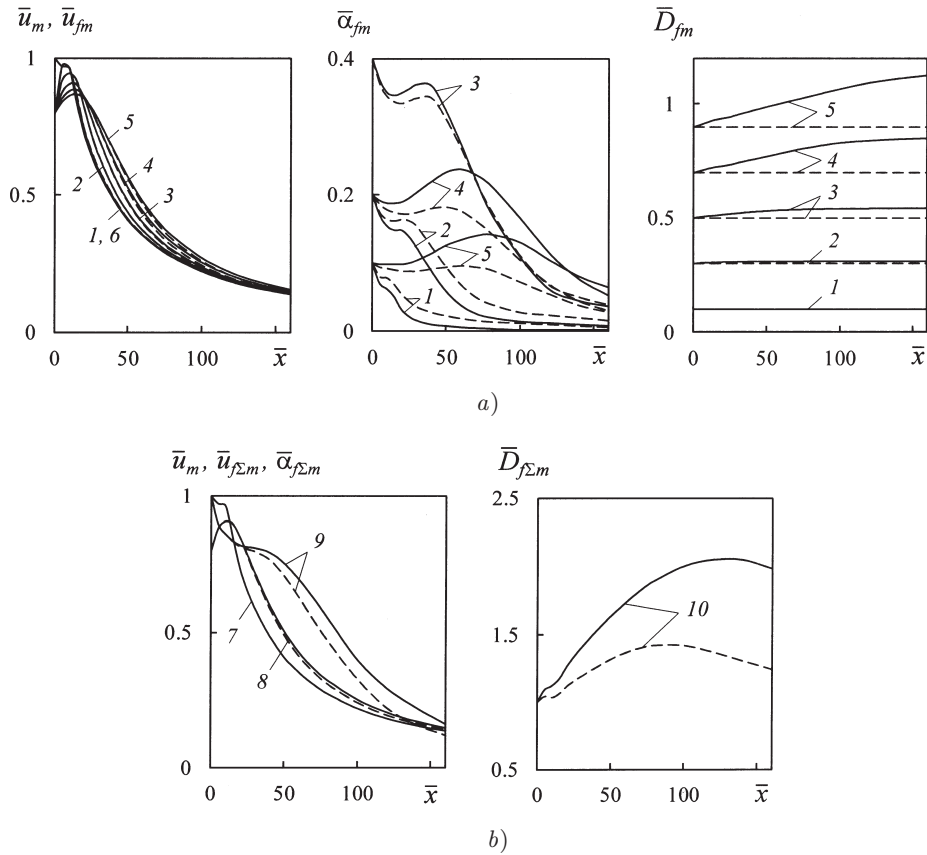


Рис. 2. Результаты расчета параметров фаз газокapельной струи при суммарной объемной концентрации капель в начальном сечении струи $5 \cdot 10^{-4}$; а) изменение скорости газа и параметров выделенных классов капель вдоль оси струи, б) изменение вдоль оси струи скорости газа и осредненных параметров капель. Обозначения: 1–5 – параметры капель пяти классов, 6, 7 – скорость газа, 8 – средняя скорость капель, 9 – суммарная объемная концентрация капель, 10 – средний диаметр капель. Сплошные линии – расчет с учетом взаимодействия капель, штриховые линии – расчет без учета взаимодействия капель

Вид зависимостей $\bar{\alpha}_{fm} = \bar{\alpha}_{fm}(\bar{x})$ и $\bar{D}_{fm} = \bar{D}_{fm}(\bar{x})$ на графиках рис. 2, а указывает на то, что в струе при взаимодействии капель протекает их коагуляция, приводящая к укрупнению капель, и интенсивность этого процесса возрастает с увеличением диаметра капель. Из графиков этого рисунка следует, что при начальной суммарной объемной концентрации капель $\alpha_{f\Sigma 0} = 5 \cdot 10^{-4}$ их коагуляция не влияет на скорость газа и скорости капель классов $f = 1-3$, а скорости капель классов $f = 4, 5$ при наличии или отсутствии коагуляции капель различаются незначительно: $\delta \bar{u}_{(f=4)m} = 1.4\%$ и $\delta \bar{u}_{(f=5)m} = 1.6\%$. Столкновения капель не влияют на характер изменения их объемной концентрации вдоль оси струи: при заданных граничных условиях расчета струи это изменение не является монотонным – вблизи оси струи существуют области, в которых наблюдается рост концентрации капель. Локальное увеличение объемной концентрации капель на оси струи (эффект “шнурования”) объясняется противоположным влиянием на изменение этой концентрации отрицательного ускорения частиц на оси струи, приводящего к увеличению концентрации капель, и конвективного потока массы и турбулентной диффузии капель в поперечном направлении, вызывающих уменьшение их концентрации на оси струи [19].

Коагуляция капель приводит к увеличению максимальных значений концентрации капель классов $f = 3-5$ на оси струи.

На рис. 2, *b* представлены графики изменения вдоль оси струи скорости газа и средних параметров капель. Из этих графиков следует, что коагуляция капель не влияет на зависимость $\bar{u}_m = \bar{u}_m(\bar{x})$, а характер зависимостей $\bar{u}_{f\Sigma m} = \bar{u}_{f\Sigma m}(\bar{x})$, $\bar{\alpha}_{f\Sigma m} = \bar{\alpha}_{f\Sigma m}(\bar{x})$ и $\bar{D}_{f\Sigma m} = \bar{D}_{f\Sigma m}(\bar{x})$ не меняется. При этом максимальные различия значений $\bar{u}_{f\Sigma m}$ и $\bar{\alpha}_{f\Sigma m}$ с учетом и без учета коагуляции составляют: $\delta\bar{u}_{f\Sigma m} = 1.8\%$ и $\delta\bar{\alpha}_{f\Sigma m} = 8.5\%$. Зависимости $\bar{D}_{f\Sigma m} = \bar{D}_{f\Sigma m}(\bar{x})$ имеют максимумы, то есть на некотором расстоянии от начального сечения струи средние размеры капель начинают уменьшаться независимо от того, есть коагуляция или нет. Это объясняется тем, что средний размер капель зависит как от физического диаметра, так и от объемной концентрации капель. И даже, несмотря на увеличение физического диаметра капель в случае их коагуляции, изменение соотношения концентраций отдельных классов капель приводит к уменьшению их среднего диаметра.

Результаты расчета двухфазной струи при начальной суммарной объемной концентрации капель $\alpha_{f\Sigma 0} = 10^{-3}$ отличаются от результатов расчетов, приведенных на рис. 2 для $\alpha_{f\Sigma 0} = 5 \cdot 10^{-4}$, только количественно: различия в скоростях капель классов $f = 4-5$ с учетом и без учета взаимодействия капель не превышают 2.9%; скорость газа и скорости капель классов $f = 1-3$ практически не зависят от того, учитывается коагуляция или нет; значения осредненных параметров капель $\bar{u}_{f\Sigma m}$ и $\bar{\alpha}_{f\Sigma m}$ в струе с коагуляцией отличаются от их значений в струе без коагуляции на 3.2% и 13% соответственно.

На рис. 3 приведены результаты расчета газокapельной струи при суммарной концентрации капель в ее начальном сечении, равной $5 \cdot 10^{-3}$. При этом значении начальной суммарной концентрации капель в случае отсутствия их взаимодействия все параметры фаз изменяются вдоль оси струи качественно так же, как и в вариантах расчетов с меньшей концентрацией. При учете взаимодействия капель отличия данного варианта от вариантов, рассмотренных выше, заключаются в следующем. В результате столкновений капель во всей расчетной области наблюдается коагуляция капель классов $f = 1-3$; соударения капель классов $f = 4-5$ с более мелкими каплями приводят к дроблению крупных капель на участке $\bar{x} = 20-80$ и их коагуляции за пределами этого участка. Такой вывод можно сделать, анализируя вид графиков $\bar{\alpha}_{f\Sigma m} = \bar{\alpha}_{f\Sigma m}(\bar{x})$ и $\bar{D}_{f\Sigma m} = \bar{D}_{f\Sigma m}(\bar{x})$: на оси струи при $\bar{x} = 20-80$ наблюдается уменьшение концентрации и диаметра капель классов $f = 4-5$. Из графиков рис. 3, *b* следует, что коагуляция и дробление капель при их начальной суммарной концентрации $5 \cdot 10^{-3}$ существенно влияют не только на изменение по длине струи осредненных параметров капель, но и на зависимость $\bar{u}_m = \bar{u}_m(\bar{x})$: $\delta\bar{u}_{f\Sigma m} = 7\%$, $\delta\bar{\alpha}_{f\Sigma m} = 20\%$, $\delta\bar{u}_{f\Sigma m} = 13\%$. Различие в скоростях капель всех выделенных классов, обусловленное учетом соударений капель или пренебрежением их соударениями при проведении расчетов струи и рассчитанное по формуле (12), составляет примерно 30%. При начальной концентрации капель $5 \cdot 10^{-3}$ учет взаимодействия капель приводит к уменьшению расчетной дальности струи (за дальность рассматриваемой затопленной струи принимается значение координаты \bar{x} , при котором скорость газа на оси струи равна половине скорости газа в ее начальном сечении): в струе с учетом взаимодействия капель дальность струи \bar{x} равна 127, а без учета этого взаимодействия – 177. Взаимодействие капель в струе существенно влияет на коэффициент скольжения фаз, равный отношению скоростей капель и газа; для оси струи: $\nu_{fg} = u_{fg}/u_m$. В расчетах без учета взаимодействия капель максимальные значения коэффициента скольжения фаз, определенные по скорости капель класса $f = 5$ и средней скорости капель на оси струи, равны 1.12 и 1.13 соответственно. При учете столкновения капель эти значения ν_{fg} возрастают до 1.24 и 1.26. Это объясняется уменьшением силы сопротивления капель при увеличении их размера

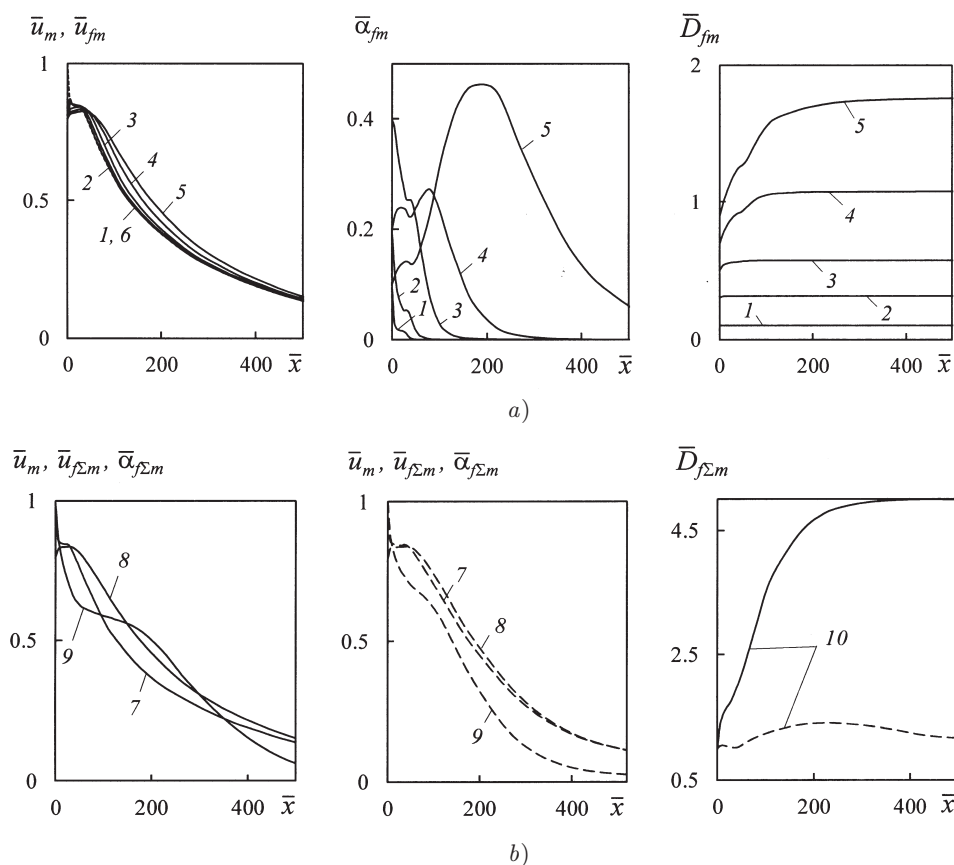


Рис. 3. Результаты расчета параметров фаз газок капельной струи при суммарной объемной концентрации капель в начальном сечении струи $5 \cdot 10^{-3}$; а) изменение скорости газа и параметров выделенных классов капель вдоль оси струи с учетом взаимодействия капель, б) изменение вдоль оси струи скорости газа и осредненных параметров капель с учетом и без учета взаимодействия капель. Обозначения см. к рис. 2

вследствие коагуляции, несмотря на некоторое увеличение концентрации капель на оси струи.

Заключение

Разработана математическая модель газок капельной полидисперсной турбулентной струи с учетом коагуляции и дробления капель. С использованием этой математической модели проведены расчеты двухфазной струи для различных значений объемной концентрации капель в ее начальном сечении $\alpha_{f\Sigma 0}$ с учетом и без учета столкновения капель. Анализ результатов расчетов позволил выделить три диапазона изменения концентрации $\alpha_{f\Sigma 0}$, в которых соударения капель различным образом влияют на параметры газок капельной струи.

При величине этой концентрации, не превышающей 10^{-4} , взаимодействие капель не влияет на параметры двухфазной струи.

В диапазоне концентрации капель $\alpha_{f\Sigma 0}$ от $5 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-3} в струе протекает коагуляция капель, приводящая к увеличению размеров капель всех выделенных классов (за исключением первого) и увеличению концентрации крупных капель

при уменьшении концентрации мелких капель. Интенсивность коагуляции капель растет при увеличении начального значения их суммарной объемной концентрации. При этом коагуляция капель не оказывает влияния на изменение скорости газа в струе \bar{u}_m и приводит к незначительному изменению скоростей капель отдельных классов \bar{u}_{fm} (до 2.9%) и их средней скорости $\bar{u}_{f\Sigma m}$ (до 3.2%).

Результаты расчета газокапельных струй при $\alpha_{f\Sigma 0} = 5 \cdot 10^{-3}$ существенно отличаются от результатов расчетов при меньших значениях начальной концентрации капель. В этом случае столкновение мелких капель заканчивается их коагуляцией, а при взаимодействии крупных капель с более мелкими возможна как коагуляция, так и дробление крупных капель. Отличие значений параметров фаз двухфазной струи при расчетах с учетом и без учета взаимодействия капель составляет: для скорости газа до 13%, для скоростей отдельных классов капель до 30%, для средней скорости капель до 7%, для суммарной объемной концентрации капель до 20%. При этом в струе с учетом столкновения капель коэффициент скольжения фаз, определенный по средней скорости капель, возрастает на 12%, а дальность струи уменьшается на 28% по сравнению со струей без учета столкновения капель.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно дать следующие рекомендации при разработке математических моделей газокапельных струй. При суммарной объемной концентрации капель в начальном сечении струи, меньшей 10^{-4} , соударение капель учитывать не нужно. В диапазоне изменения этой концентрации от $5 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-3} можно пренебречь соударениями капель, если в решаемой задаче важны динамические характеристики струи, а изменение размера и концентрации капель является второстепенным. В случае $\alpha_{f\Sigma 0} \geq 5 \cdot 10^{-3}$ математическая модель газокапельной струи должна составляться с учетом коагуляции и дробления капель. Полученные результаты уточняют приведенные в работе [6] рекомендации по выбору математических моделей двухфазных течений, адекватных реальным течениям.

Литература

1. Пат. № 2121390 РФ. Установка для пожаротушения / Ю.В. Зуев, А.В. Карпышев, И.А. Лепешинский. – № 97107903/12; заявл. 14.05.1997; опубл. 10.11.1998, Бюл. № 31. – 15 с.
2. *Бабуха Г.Л., Шрайбер А.А.* Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.
3. *Friedlander S.K.* Smoke, Dust and Haze: Fundamentals of Aerosol Behavior. – N. Y.: Wiley and Sons, 1977. – 317 p.
4. *Okuyama K., Kousaka Y., Yoshida T.* Turbulent coagulation of aerosols in a pipe flow // J. Aerosol. Sci. – 1978. – V. 9, No 5. – P. 399–410. – doi: 10.1016/0021-8502(78)90002-2.
5. *Стернин Л.Е.* Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. – М.: Машиностроение, 1974. – 212 с.
6. *Elghobashi S.* Particle-laden turbulent flows: Direct simulation and closure models // Appl. Sci. Res. – 1991. – V. 48, No 3–4. – P. 301–314. – doi: 10.1007/BF02008202.
7. *Вараксин А.Ю.* Столкновения в потоках газа с твердыми частицами. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
8. *Зуев Ю.В.* Об использовании критерия Стокса при математическом моделировании двухфазных струйных течений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 341–354. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354.
9. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 ч. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с.

10. Хинце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
11. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. – М.: Машиностроение, 1994. – 320 с.
12. Handbook of Turbulence. V. 1: Fundamentals and applications / Ed. by W. Frost, T. Moulden. – N. Y.; London: Plenum Press, 1977. – 498 p.
13. Крашенинников С.Ю. К расчету осесимметричных закрученных и незакрученных турбулентных струй // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1972. – № 3. – С. 71–80.
14. Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй / Под ред. Г.Н. Абрамовича. – М.: Наука, 1984. – 716 с.
15. Зуев Ю.В., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Истомин Е.А. Выбор критериев и определение их значений для оценки характера взаимодействия фаз в двухфазных турбулентных струях // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2012. – № 1. – С. 42–54.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
17. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газозвеси. – Киев: Наукова думка, 1987. – 240 с.
18. Mostafa A.A., Mongia H.C., McDonell V.G., Samuelsen G.S. Evolution of particle-laden jet flows: A theoretical and experimental study // AIAA J. – 1989. – V. 27, No 2. – P. 167–183. – doi: 10.2514/3.10079.
19. Зуев Ю.В. О некоторых причинах немонотонного изменения концентрации дискретной фазы в двухфазной турбулентной струе // Изв. РАН. МЖГ. – 2020. – № 2. – С. 51–60. – doi: 10.31857/S0568528120020152.

Поступила в редакцию
01.09.2021

Зуев Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Теория воздушно-реактивных двигателей»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия

E-mail: yuri_zuev@bk.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.85-100

The Impact of Coagulation and Division of Drops on the Parameters of the Gas-Drop Turbulent Jet

*Yu. V. Zuev**Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*E-mail: *yuri.zuev@bk.ru*

Received September 1, 2021

Abstract

This article is devoted to the definition of conditions under which the calculation of the gas-drop turbulent jet must be carried out with account of the interaction of drops. A mathematical model of the gas-liquid turbulent jet that considers the equations of coagulation and division of drops is presented. The relevance of the research is defined by the fact that many applied tasks in various areas of technology can be solved only by performing calculations with gas-liquid jets, the results of which may be doubtful at certain concentrations of the dispersed phase owing to the neglect of the collision of drops. As a result of the calculation by means of the obtained mathematical model of the gas-drop turbulent jet, three ranges of changes in the initial total volume concentration of drops corresponding to various impacts of the interaction of drops in the jet on its parameters are determined. The lack of influence of drops collisions on all parameters of the jet is characteristic of the first range. The second range differs by insignificant dependence of the speeds of phases on the coagulation of drops. The third range corresponds to the concentration of drops in the initial section of the jet at which there are intensive processes of coagulation and division of drops influencing all parameters of the jet. The following conclusions can be drawn from the results of the research: in the first and second cases, the equation of the mathematical model of the jet does not require to consider the interaction of drops to solve many applied problems; in the third case, it is obligatory to take account of the coagulation and crushing of drops.

Keywords: two-phase jet, gas, drops, coagulation and division of drops, mathematical modelling

Figure Captions

Fig. 1. Comparison of the results of the calculation based on the model (1)–(11) with the experimental data [18]: *a*) changes in the averaged phase parameters along the jet axis; *b*) transverse fields of the averaged phase parameters in the section $\bar{x} = 12.4$; *c*) transverse field of the dimensionless momentum of the correlation of pulsation velocities of the gas phase in the section $\bar{x} = 12.4$. Key: 1 – gas velocity; 2 – particle velocity; 3 – bulk concentration of particles; lines – calculation; dots – experiment [18].

Fig. 2. Results of the calculation of the phase parameters of the gas-drop jet at the total volume concentration of drops in the initial section of the jet $5 \cdot 10^{-4}$; *a*) changes in the gas velocity and the parameters of selected drop classes along the jet axis; *b*) changes of the gas

velocity and the averaged parameters of drops along the jet axis. Key: 1–5 – parameters of five classes of drops; 6, 7 – gas velocity; 8 – average drop velocity; 9 – total volume concentration of drops; 10 – average drop diameter. Solid lines – calculation with the interaction of drops taken into account; dashed lines – calculation neglecting the interaction of drops.

Fig. 3. Results of the calculation of the phase parameters of the gas-drop jet at the total volume concentration of drops in the initial section of the jet $5 \cdot 10^{-3}$; a) changes in the gas velocity and the parameters of selected drop classes along the jet axis with account of the interaction of drops; b) changes of the gas velocity and the averaged parameters of drops along the jet axis with and without account of the interaction of drops. See Fig 2. for the legend key.

References

1. Zuev Yu.V., Karpyshev A.V., Lepeshinskii I.A. Fire-extinguishing installation. Patent RF. 2121390. *Byull. Izobret.*, 1998, no. 31. 15 p. (In Russian)
2. Babukha G.L., Schreiber A.A. *Vzaimodeistvie chastits polidispersnogo materiala v dvukhfaznykh potokakh* [Interaction between Particles of a Polydisperse Material in Two-Phase Flows]. Kyiv, Nauk. Dumka, 1972. 175 p. (In Russian)
3. Friedlander S.K. *Smoke, Dust and Haze: Fundamentals of Aerosol Behavior*. New York, Wiley and Sons, 1977. 317 p.
4. Okuyama K., Kousaka Y., Yoshida T. Turbulent coagulation of aerosols in a pipe flow. *J. Aerosol. Sci.*, 1978, vol. 9, no. 5, pp. 399–410. doi: 10.1016/0021-8502(78)90002-2.
5. Sternin L.E. *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techenii v soplakh* [Fundamentals of Gas Dynamics of Two-Phase Flows in Nozzles]. Moscow, Mashinostroenie, 1974. 212 p. (In Russian)
6. Elghobashi S. Particle-laden turbulent flows: Direct simulation and closure models. *Appl. Sci. Res.*, 1991, vol. 48, nos. 3–4, pp. 301–314. doi: 10.1007/BF02008202.
7. Varaksin A.Yu. *Stolknoveniya v potokakh gaza s tverdymi chastitsami* [Collisions in Gas Flows with Solid Particles]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 312 p. (In Russian)
8. Zuev Yu.V. About the use of the Stokes number for mathematical modeling of two-phase jet flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 341–354. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354. (In Russian)
9. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of Multiphase Media]. Pt. 1. Moscow, Nauka, 1987. 464 p. (In Russian)
10. Hinze J.O. *Turbulentnost', ee mekhanizm i teoriya* [Turbulence: An Introduction to Its Mechanisms and Theory]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 680 p. (In Russian)
11. Sternin L.E., Schreiber A.A. *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase Flows of Gas with Particles]. Moscow, Mashinostroenie, 1994. 320 p. (In Russian)
12. *Handbook of Turbulence*. Vol. 1: Fundamentals and applications. Frost W., Moulden T. (Eds.). New York, London, Plenum Press, 1977. 498 p.
13. Krashenninnikov S.Yu. Calculation of axisymmetric swirling and non-swirling turbulent jets. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. MZhG*, 1972, no. 3, pp. 71–80. (In Russian)
14. Abramovich G.N., Girshovich T.A., Krashenninnikov S.Yu., Sekundov A.N., Smirnova I.P. *Teoriya turbulentnykh strui* [Theory of Turbulent Jets]. Abramovich G.N. (Ed.). Moscow, Nauka, 1984. 716 p. (In Russian)
15. Zuev Yu.V., Lepeshinskii I.A., Reshetnikov V.A., Istomin E.A. Selection of criteria and determination of their values for estimating the phase interaction behavior in two-phase turbulent jets. *Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostr.*, 2012, no. 1, pp. 42–54. (In Russian)

16. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1989. 616 p. (In Russian)
17. Schreiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. *Turbulentnye techeniya gazo-vzvesi* [Turbulent Flows of a Gas Suspension]. Kyiv, Nauk. Dumka, 1987. 240 p. (In Russian)
18. Mostafa A.A., Mongia H.C., McDonell V.G., Samuelsen G.S. Evolution of particle-laden jet flows: A theoretical and experimental study. *AIAA J.*, 1989, vol. 27, no. 2, pp. 167–183. doi: 10.2514/3.10079.
19. Zuev Yu.V. Some reasons for nonmonotonic variation of discrete-phase concentration in a turbulent two-phase jet. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 2, pp. 194–203. doi: 10.1134/S0015462820020147.

⟨ **Для цитирования:** Зув Ю.В. Влияние коагуляции и дробления капель на параметры газокapельной турбулентной струи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 1. – С. 85–100. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.85-100. ⟩

⟨ **For citation:** Zuev Yu.V. The impact of coagulation and division of drops on the parameters of the gas-drop turbulent jet. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 1, pp. 85–100. doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.85-100. (In Russian) ⟩