УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 2
С. 180–193

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 512.667+517.5

О СТРУКТУРЕ C^*-АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ИНВЕРСНОЙ ПОЛУГРУППЫ

С.А. Григорян, Е.В. Липачева

Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия

Аннотация

В работе определен класс C^*-алгебр, порожденных элементарной инверсной полугруппой и являющихся в некотором смысле деформацией алгебры Теплица. Изучены свойства этих C^*-алгебр, описаны все их неприводимые представления и группы автоморфизмов. Доказано, что эти алгебры являются $\mathbb{Z}$-градуированными C^*-алгебрами. На некотором классе алгебр из изучаемого семейства построена структура компактной квантовой полугруппы.

Ключевые слова: C^*-алгебра, алгебра Теплица, неприводимое представление, инверсная полугруппа, группа автоморфизмов, компактная квантовая полугруппа

Введение

В настоящей статье исследована категория $\mathcal{T}_{N^\infty}$ C^*-алгебр $\mathcal{T}_{\overline{n}}$, порожденных представлениями элементарной инверсной полугруппы. Каждую из этих C^*-алгебр можно рассматривать как деформацию алгебры Теплица $\mathcal{T}$. Изучены свойства этих алгебр. Описаны все неприводимые представления C^*-алгебр $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Показано, что в категории $\mathcal{T}_{N^\infty}$ возникают объекты, на которых можно задать копроизведения.

Задача построения копроизведения на C^*-алгебре восходит к попыткам распространения теоремы двойственности Понтрягина на некоммутативный случай. Первые работы, посвященные обобщению теоремы Понтрягина, полностью не отразили основные требования к понятию двойственности. С возникновением квантовой группы В.Г. Дринфельда в начале 80-х годов XX в. теория двойственности приобретает новый смысл. С.А. Воронович предложил использовать C^*-алгебраический подход к квантовым группам В.Г. Дринфельда [1, 2]. В работе [3] им было дано определение компактной квантовой группы. Позднее А. Ван Даль, обобщив этот объект, стал изучать компактные квантовые полугруппы [4].

Нами ранее уже строились примеры компактных квантовых полугрупп. В работах [5, 6] на алгебре Теплица $\mathcal{T}$ была построена структура компактной квантовой полугруппы. В работе [7] структуры компактных квантовых полугрупп были построены на полугрупповых C^*-алгебрах, порожденных «деформацией» алгебр непрерывных функций на компактных абелевых группах. В настоящей работе на бесконечной совокупности объектов категории $\mathcal{T}_{N^\infty}$ построены структуры конечномерных компактных квантовых полугрупп и структура бесконечномерной компактной квантовой полугруппы.

1. C^*-алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$

Пусть N^∞ – множество бесконечных последовательностей натуральных чисел, не содержащих единиц, то есть $\inf\limits_k n_k \geq 2$. Зафиксируем одну из последовательностей $\overline{n} = \{n_k\}_{k=1}^\infty$ из N^∞, где $n_k \in \mathbb{N}$.

Пусть $l^2(\mathbb{N})$ – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, где $e_n(m) = \delta_{n,m}$. Представим множество $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ в виде объединения счетного числа непересекающихся подмножеств: $\{e_n\}_{n=1}^\infty = \bigcup\limits_{k=1}^\infty E_k$ так, что $\operatorname{card} E_k = n_k$. Пусть H_k – конечномерные подпространства пространства $l^2(\mathbb{N})$, порожденные линейными комбинациями элементов множества E_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Таким образом, $l^2(\mathbb{N}) = \bigoplus\limits_{k=1}^\infty H_k$ и $\dim H_k = n_k$, а множество E_k является базисом в H_k. В дальнейшем будем обозначать базис E_k через $\{f_j^{(n_k)}\}_{j=1}^{n_k}$.

Пусть $B(l^2(\mathbb{N}))$ и $B(H_k)$ – алгебры ограниченных линейных операторов на гильбертовых пространствах $l^2(\mathbb{N})$ и H_k соответственно. Очевидно, $\bigoplus\limits_{k=1}^\infty B(H_k)$ – подалгебра алгебры $B(l^2(\mathbb{N}))$. Определим отображение $\Phi : B(l^2(\mathbb{N})) \to \bigoplus\limits_{k=1}^\infty B(H_k)$ по формуле: $\Phi(A) = \bigoplus\limits_{k=1}^\infty P_k A P_k$, где $P_k : l^2(\mathbb{N}) \to H_k$ – ортопроектор.

Отметим, что $\Phi(CAB) = C\Phi(A)B$ для любых $C, B \in \bigoplus\limits_{k=1}^\infty B(H_k)$ и $\Phi = \sum\limits_{k=1}^\infty \Phi_k$, где $\Phi_k : B(l^2(\mathbb{N})) \to B(H_k)$. Таким образом, Φ является *условным ожиданием* на $\bigoplus\limits_{k=1}^\infty B(H_k)$.

Обозначим через $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ оператор правостороннего сдвига, то есть $Te_n = e_{n+1}$. Равномерно замкнутая подалгебра алгебры $B(l^2(\mathbb{N}))$, порожденная изометрическим оператором T и его сопряженным T^*, называется *алгеброй Теплица* и обозначается $\mathcal{T}$.

Определим оператор $T_{\overline{n}} = \Phi(T) = \bigoplus\limits_{k=1}^\infty P_k T P_k$. Очевидно,

$$T_{\overline{n}} f_j^{(n_k)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j = n_k; \\ f_{j+1}^{(n_k)}, & \text{если } j < n_k. \end{cases}$$

Оператор $T_{\overline{n}}$ является оператором частичной изометрии.

Через $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ обозначим C^*-подалгебру алгебры $\bigoplus\limits_{i=1}^\infty B(H_i)$, порожденную операторами $T_{\overline{n}}$ и $T_{\overline{n}}^*$. Таким образом, каждой последовательности $\overline{n}$ из N^∞ ставится в соответствие C^*-алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Это семейство C^*-алгебр по своей структуре тесно связано с C^*-алгебрами, рассмотренными в работах [8–10].

Теорема 1. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ является унитальной C^*-алгеброй.*

Доказательство. Операторы $T_{\overline{n}}$ и $T_{\overline{n}}^*$ являются соответственно операторами правостороннего и левостороннего сдвигов относительно фиксированного базиса в H_k. Очевидно, операторы $T_{\overline{n}} T_{\overline{n}}^*$ и $T_{\overline{n}}^* T_{\overline{n}}$ являются ортопроекторами и имеют вид диагональных операторов:

$$T_{\overline{n}} T_{\overline{n}}^* f_j^{(n_k)} = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 1; \\ f_j^{(n_k)}, & \text{если } 1 < j \leq n_k; \end{cases}$$

$$T_{\overline{n}}^* T_{\overline{n}} f_j^{(n_k)} = \begin{cases} f_j^{(n_k)}, & \text{если } 1 \leq i \leq n_k - 1; \\ 0, & \text{если } j = n_k. \end{cases}$$

Поэтому $T_{\overline{n}}^* T_{\overline{n}} + T_{\overline{n}} T_{\overline{n}}^*$ – диагональный оператор с собственными значениями 1 и 2. Следовательно, этот оператор обратим в алгебре $\mathcal{T}_{\overline{n}}$, а значит, алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ содержит единицу. Предложение доказано. $\square$

Будем обозначать единицу алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ символом I.

Теорема 2. *Пусть* $\sup\limits_k n_k < \infty$ *для последовательности* $\overline{n} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Тогда* $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ *– конечномерная* C^**-алгебра.*

Доказательство. Из условия $\sup\limits_k n_k < \infty$ следует, что среди натуральных чисел $\overline{n} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует не более чем конечное число попарно различных. Выделим в последовательности $\overline{n}$ конечную подпоследовательность всевозможных попарно различных чисел $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{m}$. Обозначим через ν_j кратность соответствующего числа n_{k_j}, (ν_j могут равняться ∞). Тогда оператор $T_{\overline{n}}$ можно представить в виде $T_{\overline{n}} = \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{m} \nu_j P_{k_j} T P_{k_j}$. Очевидно, алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ изоморфна конечномерной алгебре $\mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{m} M_{n_{k_j}}(\mathbb{C})$, где $M_{n_{k_j}}(\mathbb{C})$ – полная матричная алгебра размерности $n_{k_j} \times n_{k_j}$. Предложение доказано. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $\overline{n}$ *– такая последовательность из* N^{∞}, *что* $\sup\limits_k n_k = \infty$. *Тогда существует строго возрастающая последовательность* $\overline{m}$ *в* N^{∞}, *для которой алгебры* $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ *и* $\mathcal{T}_{\overline{m}}$ *изоморфны.*

Доказательство. Из доказательства предложения 2 следует, что оператор $T_{\overline{n}}$ можно представить в виде $T_{\overline{n}} = \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j P_{k_j} T P_{k_j}$, где $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ – подпоследовательность последовательности $\overline{n}$, состоящая из всех попарно различных чисел, и ν_j – кратности соответствующих чисел. Пусть $\overline{m} = \{n_{k'_j}\}_{j=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность, получающаяся из $\{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ перестановкой элементов в возрастающем порядке. Сопоставляя оператору $T_{\overline{n}} = \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j P_{k_j} T P_{k_j} = \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{\infty} \nu'_j P_{k'_j} T P_{k'_j}$ оператор $T_{\overline{m}} = \mathop{\oplus}\limits_{j=1}^{\infty} P_{k'_j} T P_{k'_j}$, получим изоморфизм между алгебрами $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ и $\mathcal{T}_{\overline{m}}$. Предложение доказано. $\square$

Замечание 1. Везде в дальнейшем, кроме параграфов 7 и 8, предполагаем, что $\sup\limits_k n_k = \infty$ и что $\overline{n}$ является строго возрастающей последовательностью.

2. Элементарная инверсная полугруппа

Пусть S – некоторая инволютивная полугруппа (*-полугруппа). Инволютивная полугруппа S называется *инверсной полугруппой*, если для любого элемента $s \in S$ существует единственный *инверсный* элемент s^*, для которого справедливо равенство $ss^*s = s$. *Элементарной инверсной полугруппой* называется инверсная полугруппа, порожденная одним элементом s и сопряженным к нему s^*.

Назовем операторы $T_{\overline{n}}$ и $T_{\overline{n}}^*$ в алгебре $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ *элементарными мономами*, а любое конечное произведение элементарных мономов в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ назовем *мономом*. Понятно, что произведение двух мономов в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ снова будет мономом. Множество всех мономов образует полугруппу относительно произведения в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Обозначим через $\mathrm{mon}_{\overline{n}}$ полугруппу с единичным элементом I, состоящую из единицы алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ и всех мономов. Образующими этой полугруппы являются единица и элементарные мономы $T_{\overline{n}}$ и $T_{\overline{n}}^*$. Поскольку $T_{\overline{n}}$ является оператором частичной изометрии, справедливо следующее предложение.

Теорема 4. *Полугруппа* $\operatorname{mon}_{\overline{n}}$ *является элементарной инверсной полугруппой с единицей.*

Лемма 1. *Существует полугрупповой гомоморфизм* $\operatorname{ind}_{\overline{n}} : \operatorname{mon}_{\overline{n}} \to \mathbb{Z}$ *такой, что* $\operatorname{ind}_{\overline{n}}(T_{\overline{n}}) = 1$ *и* $\operatorname{ind}_{\overline{n}}(T^*_{\overline{n}}) = -1$.

Доказательство. Из определения операторов $T_{\overline{n}}$ и $T^*_{\overline{n}}$ следует, что на каждом инвариантном пространстве H_k эти операторы являются соответственно операторами правостороннего и левостороннего сдвигов:

$$T_{\overline{n}} f_j^{(n_k)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ j = n_k; \\ f_{j+1}^{(n_k)}, & \text{если} \ \ 1 \le j < n_k; \end{cases}$$

$$T^*_{\overline{n}} f_j^{(n_k)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ j = 1; \\ f_{j-1}^{(n_k)}, & \text{если} \ \ 1 < j \le n_k. \end{cases}$$

Если в представлении монома W в виде произведений элементарных мономов участвуют i экземпляров оператора $T_{\overline{n}}$ и l экземпляров $T^*_{\overline{n}}$ и $W f_j^{(n_k)} \neq 0$, то

$$W f_j^{(n_k)} = f_{j+m}^{(n_k)}, \quad \text{где} \ \ m = i - l.$$

Отметим, что число m не зависит от представления монома W в виде произведения элементарных мономов, а зависит только от их количества.

Положим $\operatorname{ind}_{\overline{n}} W = m$. Заметим также, что число m не зависит от выбора $f_j^{(n_k)}$, и, поскольку $\sup\limits_k n_k = \infty$, для любого монома W найдется такой базисный элемент $f_j^{(n_k)}$ в H_k, что $W f_j^{(n_k)} \neq 0$.

Покажем, что $\operatorname{ind}_{\overline{n}}(W_1 \cdot W_2) = \operatorname{ind}_{\overline{n}} W_1 + \operatorname{ind}_{\overline{n}} W_2$, для любых мономов W_1 и W_2. Пусть $\operatorname{ind}_{\overline{n}} W_1 = i_1 - l_1$ и $\operatorname{ind}_{\overline{n}} W_2 = i_2 - l_2$, где i_1, i_2 – количество операторов $T_{\overline{n}}$, а l_1, l_2 – количество операторов $T^*_{\overline{n}}$ в представлении мономов W_1 и W_2 соответственно. Тогда

$$\operatorname{ind}_{\overline{n}}(W_1 \cdot W_2) = (i_1 + i_2) - (l_1 + l_2) = (i_1 - l_1) + (i_2 - l_2) = \operatorname{ind}_{\overline{n}} W_1 + \operatorname{ind}_{\overline{n}} W_2.$$

Лемма доказана. □

Число $\operatorname{ind}_{\overline{n}} W$ назовем *индексом* монома W.

Заметим, что $\operatorname{ind}_{\overline{n}} W = 0$ тогда и только тогда, когда моном W есть проектор. Любые два монома индекса 0 коммутируют.

3. Представления алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$

Под представлением инверсной полугруппы S подразумевают сохраняющий инволюцию полугрупповой гомоморфизм $\pi : S \to B(H_\pi)$ полугруппы S в алгебру ограниченных линейных операторов гильбертова пространства H_π. В работе [11] В. Арзуманян дал полное описание неприводимых представлений элементарной инверсной полугруппы.

В данном параграфе опишем представления алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Напомним, что у алгебры Теплица $\mathcal{T}$ существуют одно бесконечномерное неприводимое представление и серия одномерных представлений, параметризованных окружностью S_1.

Укажем сначала на некоторые свойства операторов $T^l_{\overline{n}}$ и $T^{*l}_{\overline{n}}$. Очевидно, $T^l_{\overline{n}}$ и $T^{*l}_{\overline{n}}$ – операторы правостороннего и левостороннего, соответственно, сдвигов относительно фиксированного базиса в H_i на l шагов. Следовательно, $T^l_{\overline{n}}$ и $T^{*l}_{\overline{n}}$

равны нулю в $B(H_j)$, если $\dim H_j \le l$, и отличны от нуля, если $l < \dim H_j = n_j$. Поэтому проектор $T_{\overline{n}}^{*l}T_{\overline{n}}^{l}$ является диагональным относительно фиксированного базиса $\{f_i^{(n_j)}\}_{i=1}^{n_j}$ в H_j при $l < n_j$ и

$$T_{\overline{n}}^{*l}T_{\overline{n}}^{l}f_i^{(n_j)} = \begin{cases} f_i^{(n_j)}, & \text{если } \ 1 \le i \le n_j - l; \\ 0, & \text{если } \ n_j - l < i \le n_j. \end{cases}$$

Аналогичное утверждение верно и для проектора $T_{\overline{n}}^{l}T_{\overline{n}}^{*l}$:

$$T_{\overline{n}}^{l}T_{\overline{n}}^{*l}f_i^{(n_j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ 1 \le i \le l; \\ f_i^{(n_j)}, & \text{если } \ l < i \le n_j. \end{cases}$$

Оператор $T_{\overline{n}}^{*l}T_{\overline{n}}^{l}+T_{\overline{n}}^{l}T_{\overline{n}}^{*l}$ является диагональным оператором с собственными значениями 0, 1 и 2. На пространствах H_j, $\dim H_j \ge 2l$, этот оператор имеет собственные значения только 1 и 2, а на H_j, $\dim H_j \le l$, он равен 0. Поэтому по теореме о спектральном разложении в алгебре $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ существует проектор P такой, что

$$P|_{H_j} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ \dim H_j \le l; \\ \mathrm{Id}, & \text{если } \ \dim H_j \ge 2l. \end{cases}$$

Положим $Q = \mathrm{Id} - P$. Тогда Q – оператор конечного ранга; $Q|_{H_j} = \mathrm{Id}$, если $\dim H_j \le l$, и $Q|_{H_j} = 0$, если $\dim H_j \ge 2l$.

Лемма 2. *Пусть K – C^*-алгебра компактных операторов в $B(l^2(\mathbb{N}))$. Тогда $K_{\overline{n}} = \Phi(K)$ – идеал в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$.*

Доказательство. Пусть $L_j = \overset{j}{\underset{i=1}{\oplus}} H_i \subset l^2(\mathbb{N})$, $B(L_j) = \{A \in B(l^2(\mathbb{N})) | A|_{L_j}^{\perp} = 0\}$. Очевидно, что алгебра $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B(L_j)$ плотна в K и $\Phi(B(L_j)) = \overset{j}{\underset{i=1}{\oplus}} B(H_i)$. Поэтому $K_{\overline{n}} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(B(L_j))$. Покажем, что алгебра $\overset{j}{\underset{i=1}{\oplus}} B(H_i)$ содержится в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Из свойства введенного выше проектора Q следует, что идеал I_Q алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$, порожденный операторами QA и AQ, $A \in \mathcal{T}_{\overline{n}}$, конечномерен и $I_Q|_{H_i} = B(H_i)$, если $\dim H_i \le l$. Следовательно, по лемме Шура $I_Q = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} B(H_i)$ для некоторого m, и I_Q содержит алгебру $\overset{j}{\underset{i=1}{\oplus}} B(H_i)$, если $\dim H_j \le l$. Устремляя $l \to \infty$, получим $K_{\overline{n}} = \Phi(K)$. Лемма доказана. □

Следствие. *Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ существует проектор Q_m в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ такой, что $Q_m \cdot \mathcal{T}_{\overline{n}} = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} B(H_i)$.*

Пусть I_1 и I_2 – два идеала в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$, порожденные проекторами $P_1 = I - T_{\overline{n}}^{*}T_{\overline{n}}$ и $P_2 = I - T_{\overline{n}}T_{\overline{n}}^{*}$ соответственно. Легко проверить, что сужения этих проекторов на пространства H_j являются проекторами ранга 1 и $P_1 f_{n_j}^{(n_j)} = f_{n_j}^{(n_j)}$, $P_2 f_1^{(n_j)} = f_1^{(n_j)}$.

Лемма 3. *Справедливо равенство $I_1 \cdot I_2 = K_{\overline{n}}$.*

Доказательство. Операторы P_1 и P_2 являются проекторами на пространства, порожденные базисными векторами $\{f_{n_j}^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{f_1^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ соответственно. Покажем, что для любого монома W оператор $P_1 W P_2$ есть оператор конечного ранга, равный нулю на пространствах H_j, если $\dim H_j > \operatorname{ind}_{\overline{n}} W + 1$. Действительно, пусть $Wf_1^{(n_j)} \neq 0$. Тогда $Wf_1^{(n_j)} = f_{m+1}^{(n_j)}$, где $m = \operatorname{ind}_{\overline{n}} W$. Поэтому $P_1 W P_2 f_1^{(n_j)} = P_1 f_{m+1}^{(n_j)} = 0$, если $n_j > m+1$. В случае, если $W = T_{\overline{n}}^m$ и $n_j = m+1$, имеем $P_1 W P_2 f_1^{(n_j)} = f_{n_j}^{(n_j)}$.

Поскольку в I_j плотны конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_k c_k V_k P_j W_k$, $j = 1, 2$, где $V_k, W_k \in \operatorname{mon}_{\overline{n}}$, в произведении $I_1 \cdot I_2$ плотны конечные линейные комбинации операторов конечного ранга. Поэтому $I_1 \cdot I_2 \subseteq K_{\overline{n}}$. Обратное включение следует из следствия 3. Лемма доказана. □

Пусть $\mathcal{T}_0$ – равномерно замкнутая подалгебра в прямой сумме алгебр Теплица $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}$, порожденная элементами $T \oplus T^*$, $T^* \oplus T$ и единицей $I \oplus I$.

Лемма 4. *Существуют короткие точные последовательности:*

1) $0 \to I_i \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{T} \to 0$, $i = 1, 2$;

2) $0 \to K_{\overline{n}} \xrightarrow{id} I_2 \xrightarrow{\pi_1} K \to 0$, $0 \to K_{\overline{n}} \xrightarrow{id} I_1 \xrightarrow{\pi_2} K \to 0$;

3) $0 \to I_1 + I_2 \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi} C(S^1) \to 0$;

4) $0 \to K_{\overline{n}} \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi_1 \oplus \pi_2} \mathcal{T}_0 \to 0$;

где id – вложение, π, π_i – фактор-отображения.

Доказательство. 1) Класс смежности $[T_{\overline{n}}] = T_{\overline{n}} + I_1$ является изометрией, порождающей фактор-алгебру $\mathcal{T}_{\overline{n}}/I_1$. Согласно лемме 3 проектор $P_2 = I - T_{\overline{n}} T_{\overline{n}}^*$ не принадлежит идеалу I_1, поэтому $[T_{\overline{n}}]$ – неунитарная изометрия. По теореме Кобурна [12] C^*-алгебра, порожденная неунитарной изометрией, изоморфна алгебре Теплица. Следовательно, короткая последовательность $0 \to I_1 \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{T} \to 0$ точна. Аналогично, точна и последовательность $0 \to I_2 \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{T} \to 0$. Отметим, что $\pi_1(T_{\overline{n}}) = T$, а $\pi_2(T_{\overline{n}}) = T^*$.

2) Образ $\pi_1(I_2)$ идеала I_2 в короткой точной последовательности $0 \to I_1 \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{T} \to 0$ порождается минимальным проектором $\pi_1(P_2)$. Поэтому $\pi_1(I_2)$ совпадает с K – идеалом компактных операторов в $\mathcal{T}$. Очевидно, $\ker \pi_1 = I_1 \bigcap I_2$, следовательно, последовательность $0 \to I_1 \bigcap I_2 \xrightarrow{id} I_2 \xrightarrow{\pi_1} K \to 0$ точна. Осталось заметить, что $I_1 \bigcap I_2 = I_1 \cdot I_2 = K_{\overline{n}}$. Вторая последовательность в утверждении 2) доказывается аналогично.

3) Справедливость утверждения вытекает из 1), 2) и того, что $\mathcal{T}/K = C(S^1)$.

4) Определим гомоморфизм $\pi_1 \oplus \pi_2 : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}$, полагая $(\pi_1 \oplus \pi_2)(A) = \pi_1(A) \oplus \pi_2(A)$, где $(\pi_1 \oplus \pi_2)(T_{\overline{n}}) = T \oplus T^*$. Ядро этого гомоморфизма совпадает с $I_1 \bigcap I_2 = K_{\overline{n}}$. Поэтому последовательность $0 \to K_{\overline{n}} \xrightarrow{id} \mathcal{T}_{\overline{n}} \xrightarrow{\pi_1 \oplus \pi_2} \mathcal{T}_0 \to 0$ точна.

Лемма доказана. □

Следующая теорема, которая является следствием леммы 4, описывает все неприводимые представления алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$.

Теорема 5. *Алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ имеет следующие неприводимые представления:*

1) *конечномерные представления размерностей $n_i \times n_i$, где $n_i \in \overline{n}$;*

2) *одно с точностью до унитарной эквивалентности неприводимое бесконечномерное представление;*

3) *серия одномерных представлений, параметризованных группой S^1.*

4. $\mathbb{Z}$-градуировка C^*-алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$

Пусть $\mathcal{M}_l$ – множество всех конечных линейный комбинаций мономов индекса l. Оператор A из $\mathcal{M}_l$ представляется в виде $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i W_i$, $\operatorname{ind} W_i = l$, и $Af_j^{(n_k)} = \alpha f_{j+l}^{(n_k)}$, где комплексное число α может, в частности, принять значение $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$.

Очевидно, $\mathcal{M}_l \cdot \mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{l+k}$ и $\mathcal{M}_0$ – коммутативная инволютивная алгебра. Поэтому $\mathcal{M}_{\overline{n}} = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_k$ – $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра, порожденная конечными суммами, всюду плотная в C^*-алгебре $\mathcal{T}_{\overline{n}}$.

Обозначим через $\mathcal{A}_l$ замыкание $\mathcal{M}_l$ в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Из свойств пространства $\mathcal{M}_l$ следует, что для любого A из $\mathcal{A}_l$ справедливо равенство $Af_j^{(n_k)} = \alpha f_{j+l}^{(n_k)}$.

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения:*
1) $\mathcal{A}_0$ *– коммутативная* C^**-алгебра;*
2) $\mathcal{A}_l \cdot \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{l+k}$*;*
3) $\mathcal{A}_k \bigcap \mathcal{A}_l = \{0\}$*, если* $k \neq l$*;*
4) $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_0 T_{\overline{n}}^k$ *для* $k \geq 0$*;*
5) $\|A\| = \sup\limits_{\substack{1\leq j\leq n_k\\ k\in\mathbb{N}}} \|Af_j^{(n_k)}\|$ *для* $A \in \mathcal{A}_l$.

Доказательство. Утверждения 1), 2) и 3) непосредственно следуют из рассуждений, приведенных перед леммой.

Докажем утверждение 4). Каждый элемент A из $\mathcal{A}_k$ аппроксимируется линейными комбинациями мономов индекса k. Поэтому оператор $AT_{\overline{n}}^{*k}$ аппроксимируется операторами индекса 0 и принадлежит алгебре $\mathcal{A}_0$. Покажем, что $A = (AT_{\overline{n}}^{*k})T_{\overline{n}}^k$.

Пусть $Af_j^{(n_i)} = 0$. Тогда $(T_{\overline{n}}^{*k}T_{\overline{n}}^k)f_j^{(n_i)}$ равен либо нулю, либо $f_j^{(n_i)}$. В обоих случаях
$$(AT_{\overline{n}}^{*k}T_{\overline{n}}^k)f_j^{(n_i)} = 0.$$

Пусть $Af_j^{(n_i)} \neq 0$, то есть $Af_j^{(n_i)} = \alpha f_{j+k}^{(n_i)}$, $\alpha \neq 0$. Тогда $T_{\overline{n}}^k f_j^{(n_i)} = f_{j+k}^{(n_i)}$, а значит
$$(AT_{\overline{n}}^{*k}T_{\overline{n}}^k)f_j^{(n_i)} = Af_j^{(n_i)} = \alpha f_{j+k}^{(n_i)}.$$

Докажем утверждение 5). Имеем, что $\mathcal{A}_0$ есть C^*-алгебра диагональных операторов относительно базиса $\{f_j^{(n_k)}\}_{j=1}^{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому для любого $A \in \mathcal{A}_0$ выполняется равенство
$$\|A\| = \sup_{\substack{1\leq j\leq n_k\\ k\in\mathbb{N}}} \|Af_j^{(n_k)}\|.$$

Отсюда для $A \in \mathcal{A}_l$ справедливо соотношение
$$\|A\|^2 = \sup_{\|h\|=1} (Ah, Ah) = \sup_{\|h\|=1} (A^*Ah, h) = \sup_{\substack{1\leq j\leq n_k\\ k\in\mathbb{N}}} \|Af_j^{(n_k)}\|.$$

Лемма доказана. □

Теорема 6. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ есть $\mathbb{Z}$-градуированный $\mathcal{A}_0$-бимодуль. Каждый элемент A из $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ однозначно представляется в виде формального ряда*
$$A \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k,$$
где $A_k \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Каждый элемент $A \in \mathcal{M}_{\overline{n}}$ однозначно представляется в виде

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i,$$

где $A_i \in \mathcal{A}_{k_i}$ и $k_i \neq k_l$ при $1 \le i \neq l \le m$. Так как $A_i f_j^{(n_k)} = \alpha f_{j+k_i}^{(n_k)}$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, то справедливы равенства

$$(A_i f_j^{(n_k)}, A_l f_j^{(n_k)}) = 0, \quad i \neq l.$$

Следовательно,

$$\|A\|^2 \ge \sup_{\substack{1\le j\le n_k\\ k\in\mathbb{N}}} (A f_j^{(n_k)}, A f_j^{(n_k)}) \ge \sup_{\substack{1\le j\le n_k\\ k\in\mathbb{N}}} (A_i f_j^{(n_k)}, A_i f_j^{(n_k)}) = \|A_i\|.$$

Поэтому отображение

$$\psi_{k_i} : \mathcal{M}_{\overline{n}} \to \mathcal{A}_{k_i}, \ \psi_{k_i}(A) = A_i$$

является сжимающим.

Из плотности $\mathcal{M}_{\overline{n}}$ в $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ следует, что это отображение можно расширить до сжимающего отображения $\psi_k : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{A}_k$. Поэтому каждый оператор A из $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ можно однозначно представить в виде формального ряда $A \simeq \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$, где $A_k = \psi_k(A)$. Теорема доказана. □

Заметим, что каждое отображение $\psi_k : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, является $\mathcal{A}_0$-билинейным.

Следствие. Линейное отображение $\psi_0 : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{A}_0$ есть условное ожидание.

5. Автоморфизмы алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$

В данном параграфе исследуются две основные группы автоморфизмов алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$.

Ковариантной системой называется тройка $(G, \mathcal{A}, \alpha)$, состоящая из C^*-алгебры $\mathcal{A}$, локально компактной группы G и гомоморфизма α из G в $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$, который непрерывен в поточечной топологии [13].

Пусть $C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}})$ – C^*-алгебра всех непрерывных отображений из единичной окружности S^1 в C^*-алгебру $\mathcal{T}_{\overline{n}}$, наделенная равномерной нормой. Операторы сдвига α_τ, $0 \le \tau < 2\pi$, $(\alpha_\tau f)(e^{i\theta}) = f(e^{i(\tau+\theta)})$ порождают вложение $\alpha : S^1 \to \operatorname{Aut} C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}})$ группы S^1 в группу автоморфизмов алгебры $C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}})$, то есть $(S^1, C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}}), \alpha)$ – ковариантная система.

Каждая функция f из $C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}})$ разлагается в формальный ряд Фурье:

$$f \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^f e^{in\theta}$$

с коэффициентами Фурье

$$A_n^f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}$ – замкнутая подалгебра алгебры $C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}})$ порожденная $\widetilde{T_{\overline{n}}}$ и $\widetilde{T_{\overline{n}}}^*$, где $\widetilde{T_{\overline{n}}}(e^{in\theta}) = e^{i\theta} T_{\overline{n}}$ и $\widetilde{T_{\overline{n}}}^*(e^{in\theta}) = e^{-i\theta} T_{\overline{n}}^*$.

Теорема 7. *Справедливы следующие утверждения* 1) *Сужение ковариантной системы* $(S^1, C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}}), \alpha)$ *на алгебру* $\widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}$ *порождает ковариантную систему* $(S^1, \widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}, \alpha)$

2) C^**-алгебры* $\widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}$ *и* $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ – $*$*-изоморфны.*

Доказательство. 1) Поскольку

$$(\alpha_\tau \widetilde{T_{\overline{n}}})(e^{in\theta}) = e^{i\tau} \widetilde{T_{\overline{n}}}(e^{in\theta}),$$

то C^*-алгебра $\widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}$ инвариантна относительно сдвигов элементарной группы S^1.

Следовательно, $(S^1, \widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}, \alpha)$ – ковариантная система.

2) Отображение $f \to f(1)$ есть инволютивный гомоморфизм из C^*-алгебры $(C(S^1, \mathcal{T}_{\overline{n}})$ на алгебру $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Покажем, что этот гомоморфизм есть $*$-изоморфизм.

Пусть f из $\widetilde{\mathcal{T}_{\overline{n}}}$ раскладывается в формальный ряд

$$f(e^{i\theta}) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^f e^{in\theta}.$$

Тогда формальный ряд $f(1)$ в градуированной алгебре $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ имеет вид

$$f(1) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^f.$$

и согласно теореме 6

$$\|A_n^f\| \le \|f(1)\|.$$

Следовательно, если $f(1) = 0$, то $\mathcal{T}_{\overline{n}}$-значная функция f равна 0. Теорема доказана. □

Пусть $\mathbb{Z}_2$ – группа целых чисел по модулю 2.

Теорема 8. *Существует нетривиальная ковариантная система* $(\mathbb{Z}_2, \mathcal{T}_{\overline{n}}, \tau)$.

Доказательство. Возрастающая последовательность $\overline{n} = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ из N^∞ разбивает пространство $l^2(N)$ в прямую сумму

$$l^2(N) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k,$$

где $\dim H_k = n_k$ с базисом $\{f_i^{(n_k)}\}_{i=1}^{n_k}$ в H_k (см.§ 1.)

На каждом H_k определим унитарный оператор $U_k : H_k \to H_k$ такой, что $U_k f_i^{(n_k)} = f_{n_k - i}^{(n_k)}$, $1 \le i \le n_k$. Унитарный оператор $U = \bigoplus_{k=1}^{\infty} U_k$ на $l^2(N)$ удовлетворяет условиям

$$U^2 = I, \quad UT_{\overline{n}}U = T_{\overline{n}}^*.$$

Так как алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ порождается операторами $T_{\overline{n}}$ и $T_{\overline{n}}^*$, этот унитарный оператор порождает автоморфизм $\tau : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{T}_{\overline{n}},\ A \mapsto U_n A U_n^*$, удовлетворяющий равенству $\tau^2 = I$. Поэтому тройка $(\mathbb{Z}_2, \mathcal{T}_{\overline{n}}, \tau)$ образует ковариантную систему. Теорема доказана.

□

Следствие. C^**-алгебра* $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ *есть супералгебра.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_{0,\overline{n}} = \{A \in \mathcal{T}_{\overline{n}} : UAU = A\}$ и $\mathcal{T}_{1,\overline{n}} = \{A \in \mathcal{T}_{\overline{n}} : UAU = -A\}$. Для $B \in \mathcal{T}_{\overline{n}}$ операторы $(B + UBU)/2$ и $(B - UBU)/2$ принадлежат алгебре $\mathcal{T}_{0,\overline{n}}$ и пространству $\mathcal{T}_{1,\overline{n}}$ соответственно. Поэтому $\mathcal{T}_{\overline{n}} = \mathcal{T}_{0,\overline{n}} \oplus \mathcal{T}_{1,\overline{n}}$ и $\mathcal{T}_{0,\overline{n}} \cdot \mathcal{T}_{1,\overline{n}} = \mathcal{T}_{1,\overline{n}}$. Следствие доказано. □

6. Категория $\mathcal{T}_{N^\infty}$

Определим категорию $\mathcal{T}_{N^\infty}$, объектами которой являются C^*-алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$, $\overline{n} \in N^\infty$, а морфизмами – сохраняющие единицу *-гомоморфизмы соответствующих C^*-алгебр. В данном параграфе найдем условие существования морфизма из $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ в $\mathcal{T}_{\overline{m}}$.

Обозначим через $\hom(\mathcal{T}_{\overline{n}};\mathcal{T}_{\overline{m}})$ множество всех сохраняющих единицу *-гомоморфизмов из C^*-алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ в C^*-алгебру $\mathcal{T}_{\overline{m}}$.

Лемма 6. *Для того чтобы* $\hom(\mathcal{T}_{\overline{n}};\mathcal{T}_{\overline{m}})$ *было не пусто, необходимо, чтобы каждое* $m_i \in \overline{m}$ *представлялось в виде конечной линейной комбинации некоторых элементов из* $\overline{n}$ *над* $\mathbb{Z}_+$, *то есть* $m_i \in \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_+ n_k$, $n_k \in \overline{n}$.

Доказательство. Пусть $\phi : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{T}_{\overline{m}}$ – сохраняющий единицу *-гомоморфизм. Пусть $\pi_i : \mathcal{T}_{\overline{m}} \to B(H_i) = M_{m_i}(\mathbb{C})$ – проекция на m_i-ю координату. Тогда $\pi_i \circ \phi : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to M_{m_i}(\mathbb{C})$ будет *-гомоморфизмом, сохраняющим единицу, из $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ в $M_{m_i}(\mathbb{C})$. Поэтому $M_{m_i}(\mathbb{C}) = M_{n'_1}(\mathbb{C}) \oplus ... \oplus M_{n'_k}(\mathbb{C})$, где $n'_1 + \dots + n'_k = m_i$ и сужение $\pi_i \circ \phi$ на каждую полную матричную алгебру $M_{n'_j}(\mathbb{C})$ есть неприводимое представление алгебры $\mathcal{T}_{\overline{n}}$. Согласно теореме 5 $n'_j \in \overline{n}$ для всех $1 \le j \le k$. Лемма доказана. □

Замечание 2. Условие, сформулированное в лемме 6, не является достаточным. Например, для $\overline{n} = \{2,2,2,\ldots\}$ и $\overline{m} = \{2,4,6,8,\ldots\}$ необходимое условие леммы 6 выполняется, но $\hom(\mathcal{T}_{\overline{n}};\mathcal{T}_{\overline{m}}) = \emptyset$

Лемма 7. *Для того чтобы* $\hom(\mathcal{T}_{\overline{n}};\mathcal{T}_{\overline{m}}) \neq \emptyset$ *было не пусто, достаточно, чтобы каждое* $m_i \in \overline{m}$ *входило также в* $\overline{n}$.

Доказательство. Из предложения 3 следует, что существует строго возрастающая последовательность $\overline{m}\,' \in N^\infty$ такая, что $\mathcal{T}_{\overline{m}\,'} \cong \mathcal{T}_{\overline{m}}$. Поскольку $\overline{m}\,' \subset \overline{n}$, то $\overline{m}\,' = \{n_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}, n_{k_i} \in \overline{n}$. Зададим *-гомоморфизм $\phi : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to \mathcal{T}_{\overline{m}\,'}$ так, что бы $\phi = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \pi_{k_i}$, где $\pi_{k_i} : \mathcal{T}_{\overline{n}} \to M_{n_{k_i}}(\mathbb{C})$ – проекция на n_{k_i}-ю координату. Лемма доказана. □

Следствие. *Пусть* $N = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *– последовательность из* N^∞. *В категории* $\mathcal{T}_{N^\infty}$ *алгебра* $\mathcal{T}_N$ *является универсальным отталкивающим объектом, то есть* $\hom(\mathcal{T}_N;\mathcal{T}_{\overline{m}}) \neq \emptyset$ *для любой последовательности* $\overline{m} \in N^\infty$.

7. Компактные квантовые полугруппы

Пусть $\mathfrak{A}$ – C^*-алгебра, $\Delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes_{\min} \mathfrak{A}$ – *-гомоморфизм. Этот гомоморфизм называется *копроизведением* на $\mathfrak{A}$, если выполняется равенство

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta.$$

Пара $(\mathfrak{A}, \Delta)$ называется *компактной квантовой полугруппой.*

Если $\mathfrak{A}$ – унитальная C^*-алгебра с единицей I, то отображения $\Delta_l : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes_{\min} \mathfrak{A}$, $\Delta_l(A) = A \otimes I$, и $\Delta_r : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \otimes_{\min} \mathfrak{A}$, $\Delta_r(A) = I \otimes A$, являются копроизведениями на $\mathfrak{A}$. Эти копроизведения называются *тривиальными.* Одна из задач теории компактных квантовых полугрупп состоит в отыскании нетривиальных копроизведений на данной C^*-алгебре. В данном параграфе строятся примеры конечномерных C^*-алгебр и пример бесконечномерной C^*-алгебры, на которых можно задать нетривиальные копроизведения.

Пусть $\overline{n}$ – последовательность натуральных чисел такая, что $\sup\limits_i n_i = n$, и любое натуральное число k, $2 \le k \le n$, содержится в $\overline{n}$. Тогда согласно предложению 2 алгебра $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ конечномерна и изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_n = \bigoplus\limits_{k=2}^{n} M_k(\mathbb{C})$. Эту алгебру можно рассматривать, как алгебру операторов конечномерного гильбертова пространства $H = \bigoplus\limits_{k=2}^{n} H_k$, $\dim H_k = k$, с ортонормированным базисом $\{f_i^{(k)} | 1 \le i \le k,$ $2 \le k \le n\}$, где каждое семейство $\{f_i^{(k)}\}_{i=1}^{k}$ есть базис в H_k, $2 \le k \le n$. Оператор $T_{\overline{n}}$ при изоморфизме $\mathcal{T}_{\overline{n}}$ с $\mathfrak{A}_n$ перейдет в оператор $T_n = \bigoplus\limits_{k=2}^{n} P_k T P_k$ и полугруппа $Mon_{\overline{n}}$ перейдет в полугруппу S, порожденную операторами T_n и T_n^*.

Лемма 8. **-гомоморфизм $\Delta : S \to S \otimes S$, заданный равенством $\Delta(W) = W \otimes W$, $W \in S$, расширяется до вложения $\widetilde{\Delta} : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_n \otimes \mathfrak{A}_n$.*

Доказательство. Разобьем ортонормированный базис $\{f_i^{(k)} \otimes f_j^{(l)} | 1 \le i \le k,$ $1 \le j \le l, 2 \le k, l \le n\}$ пространства $H \otimes H$ на классы эквивалентности $f_i^{(k)} \otimes f_j^{(l)} \sim f_p^{(c)} \otimes f_q^{(d)}$, если $(W \otimes W)(f_i^{(k)} \otimes f_j^{(l)}) = f_p^{(c)} \otimes f_q^{(d)}$ для некоторого монома $W \in S$. Отметим, что оператор $T_n \otimes T_n$ действует на элементах базиса следующим образом:

$$(T_n \otimes T_n)(f_i^{(k)} \otimes f_j^{(l)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k \text{ или } j = l; \\ f_{i+1}^{(k)} \otimes f_{j+1}^{(l)}, & \text{если } i < k \text{ и } j < l. \end{cases}$$

На каждом классе эквивалентности оператор $T_n \otimes T_n$ является оператором сдвига, причем среди классов эквивалентности найдутся классы любой мощности от 1 до n. Например, одномерным классом является класс $\{f_1^{(k)} \otimes f_l^{(l)}\}$, двумерным – класс $\{f_1^{(k)} \otimes f_{l-1}^{(l)}, f_2^{(k)} \otimes f_l^{(l)}\}$, и т.д., n-мерным – класс $\{f_i^{(n)} \otimes f_i^{(n)} | 1 \le i \le n\}$. Поэтому пространство $H \otimes H$ можно представить в виде $H \otimes H = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} m_k H_k^\circ$, где m_k – кратность пространства H_k° и $\dim H_k^\circ = k$. Оператор $T_n \otimes T_n$ при этом будет иметь представление $T_n \otimes T_n = \bigoplus\limits_{k=2}^{n} m_k P_k^\circ T P_k^\circ$. Следовательно, C^*-алгебра, порожденная операторами $T_n \otimes T_n$ и $T_n^* \otimes T_n^*$, изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_n$ б и поэтому гомоморфизм $\Delta : S \to S \otimes S$, заданный равенством $\Delta(W) = W \otimes W$, $W \in S$, можно расширить до вложения $\widetilde{\Delta} : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_n \otimes \mathfrak{A}_n$. Лемма доказана. □

Теорема 9. *Пусть $\overline{n}$ – последовательность натуральных чисел такая, что $\sup\limits_i n_i = n$, и любое натуральное число k, $2 \le k \le n$, содержится в $\overline{n}$. Тогда $(\mathcal{T}_{\overline{n}}, \widetilde{\Delta})$ – компактная квантовая полугруппа.*

Доказательство. В лемме 8 было показано, что отображение $\widetilde{\Delta} : \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_n \otimes \mathfrak{A}_n$ является *-гомоморфизмом. Для доказательства того, что отображение $\widetilde{\Delta}$ является копроизведением, достаточно установить равенство $(\mathrm{Id} \otimes \widetilde{\Delta})\widetilde{\Delta} = (\widetilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id})\widetilde{\Delta}$. Очевидно, это равенство выполняется на полугруппе S, а так как C^*-алгебра $\mathfrak{A}_n$ состоит из конечных линейных комбинаций элементов из S, это равенство выполняется для всех элементов из $\mathfrak{A}_n$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что $\mathcal{T}_{\overline{n}} \cong \mathfrak{A}_n$. Теорема доказана. □

Замечание 3. Компактная квантовая полугруппа $(\mathcal{T}_{\overline{n}}, \widetilde{\Delta})$ не является компактной квантовой группой, поскольку $\widetilde{\Delta}(I)$ есть проектор из $H \otimes H$ на $\bigoplus\limits_{k=2}^{n} m_k H_k^\circ$. При этом $\widetilde{\Delta}(I)$ является единицей в образе $\widetilde{\Delta}(\mathcal{T}_{\overline{n}})$

Проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве леммы 8, можно показать, что на универсальной отталкивающей бесконечномерной C^*-алгебре $\mathcal{T}_N$, $N = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, также можно задать структуру компактной квантовой полугруппы.

Теорема 10. *Существует* **-гомоморфизм* $\Delta : \mathcal{T}_N \to \mathcal{T}_N \otimes \mathcal{T}_N$ *такой, что пара* $(\mathcal{T}_N, \Delta)$ *является компактной квантовой полугруппой.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

Литература

1. *Woronowicz S.L.* Twisted SU(2) group. An example of non-commutative differential calculus // Publ. RIMS. – 1987. – V. 23, No 1. – P. 117–181. – doi: 10.2977/prims/1195176848.
2. *Woronowicz S.L.* Compact matrix pseudogroups // Commun. Math. Phys. – 1987. – V. 111, No 4. – P. 613–665. – doi: 10.1007/BF01219077.
3. *Woronowicz S.L.* Compact quantum groups // Symmetries quantiques – North-Holland, Amsterdam, 1998. – P. 845–884.
4. *Maes A., Van Daele A.* Notes on compact quantum groups // Nieuw Arch. Wisk. – 1998. – V. 4, No 16. – P. 73–112.
5. *Аухадиев М.А., Григорян С.А., Липачева Е.В.* Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 10. – P. 89–93.
6. *Aukhadiev M.A., Grigoryan S.A., Lipacheva E.V.* Infinite-dimensional compact quantum semigroup // Lobachevskii J. Math. – 2011. – V. 32, No 4. – P. 304–316. – doi: 10.1134/S199508021104007X.
7. *Аухадиев М.А., Григорян С.А., Липачева Е.В.* Операторный подход к квантованию полугрупп // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, № 3. – P. 15–40. – doi: 10.4213/sm8199.
8. *Aukhadiev M.A., Tepoyan V.H.* Isometric representations of totally ordered semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2012. – V. 33, No 3. – P. 239–243. – doi: 10.1134/S1995080212030031.
9. *Grigoryan S.A., Tepoyan V.H.* On isometric representations of the perforated semigroup // Lobachevskii J. Math. – 2013. – V. 34, No 1. – P. 85–88. – doi: 10.1134/S1995080213010046.
10. *Tepoyan V.H.* On Isometric representations of the semigroup $\mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}$ // J. Contemp. Math. Anal. – 2013. – V. 48, No 2. – P. 51–57. – doi: 10.3103/S1068362313020040.
11. *Arzumanyan V.A.* Irreducible realizations of isometric // Differential Equations and Functional Analysis (in Memory of Prof. R. Alexandrian). – Yerevan: Yerevan State Univ., 1993. – P. 227–231.
12. *Coburn L.A.* The C^*-algebra generated by an isometry // Bull. Am. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 722–726.
13. *Blackadar B.* Operator Algebras. Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 548 p.

Поступила в редакцию
11.01.16

Григорян Сурен Аршакович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *gsuren@inbox.ru*

Липачева Екатерина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: *elipacheva@gmail.com*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 2, pp. 180–193

On the Structure of C^*-Algebras Generated by Representations of the Elementary Inverse Semigroup

S.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva***

Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia
E-mail: **gsuren@inbox.ru*, ***elipacheva@gmail.com*

Received January 11, 2016

Abstract

The class of C^*-algebras generated by the elementary inverse semigroup and being deformations of the Toeplitz algebra has been introduced and studied. The properties of these algebras have been investigated. All their irreducible representations and automorphism groups have been described. These algebras have been proved to be $\mathbb{Z}$-graded C^*-algebras. For a certain class of algebras in the family under consideration the compact quantum semigroup structure has been constructed.

Keywords: C^*-algebra, Toeplitz algebra, irreducible representation, inverse semigroup, automorphism group, compact quantum semigroup

References

1. Woronowicz S.L. Twisted SU(2) group. An example of non-commutative differential calculus. *Publ. RIMS.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 117–181. doi: 10.2977/prims/ 1195176848.
2. Woronowicz S.L. Compact matrix pseudogroups. *Commun. Math. Phys.*, 1987, vol. 111, no. 4, pp. 613–665. doi: 10.1007/BF01219077.
3. Woronowicz S.L. Compact quantum groups. *Symmetries Qantiques.* North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 845–884.
4. Maes A., Van Daele A. Notes on compact quantum groups. *Nieuw Arch. Wisk.*, 1998, vol. 4, no. 16, pp. 73–112.
5. Aukhadiev M.A., Grigoryan S.A., Lipacheva E.V. A compact quantum semigroup generated by an isometry. *Russ. Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 10, pp. 78–81.
6. Aukhadiev M.A., Grigoryan S.A., Lipacheva E.V. Infinite-dimensional compact quantum semigroup. *Lobachevskii J. Math.*, 2011, vol. 32, no. 4, pp. 304–316. doi: 10.1134/S199508021104007X.
7. Aukhadiev M.A., Grigoryan S.A., Lipacheva E.V. Operator approach to quantization of semigroups. *Sb.: Math.*, 2014, vol. 205, no. 3, pp. 319–342. doi: 10.4213/sm8199.
8. Aukhadiev M.A., Tepoyan V.H. Isometric representations of totally ordered semigroups. *Lobachevskii J. Math.*, 2012, vol. 33, no. 3, pp. 239–243. doi: 10.1134/S1995080212030031.
9. Grigoryan S.A., Tepoyan V.H. On isometric representations of the perforated semigroup. *Lobachevskii J. Math.*, 2013, vol. 34, no. 1, pp. 85–88. doi: 10.1134/S1995080213010046.

10. Tepoyan V.H. On isometric representations of the semigroup $\mathbb{Z}_+\backslash\{1\}$. *J. Contemp. Math. Anal.*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 51–57. doi: 10.3103/S1068362313020040.

11. Arzumanyan V.A. Irreducible realizations of isometric. *Differential Equations and Functional Analysis (in Memory of Prof. R. Alexandrian)*. Yerevan, Yerevan State Univ., 1993. pp. 227–231.

12. Coburn L.A. The C^*-algebra generated by an isometry. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, pp. 722–726.

13. Blackadar B. Operator Algebras. Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2006. 548 p.

⟨ ***Для цитирования*:** *Григорян С.А., Липачева Е.В.* О структуре C^*-алгебр, порожденных представлениями элементарной инверсной полугруппы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 180–193. ⟩

⟨ ***For citation*:** Grigoryan S.A., Lipacheva E.V. On the structure of C^*-algebras generated by representations of the elementary inverse semigroup. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 180–193. (In Russian) ⟩