

УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГО-ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Е.А. Микишанина, А.Г. Терентьев

*Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова,
г. Чебоксары, 428015, Россия*

Аннотация

Исследована модель упругой пористой сплошной среды для моделирования процесса проникания жидкости или газа в упругое пористое тело. Подобные процессы могут возникать при воздействии жидкости под высоким давлением, например, на пласты каменного угля или на глубокопогруженное твердое тело типа бетон, стекло и др. В предположении об упругом теле как пучка капилляров установлена линейная связь между коэффициентом фильтрации и первым инвариантом тензора напряжений. Поэтому проблема фильтрации через деформируемую упругую среду сведена к двум задачам: определение тензора напряжений и решение задачи фильтрации с найденным коэффициентом фильтрации. В общем случае обе задачи являются сложными для аналитического исследования, но могут быть решены численно, например, с помощью метода конечных элементов. Проблема значительно упрощается для бесконечно длинных цилиндрических тел. В настоящей работе в рамках одновременного выполнения закона Гука и закона Дарси с постоянным коэффициентом фильтрации рассмотрена простейшая математическая модель плоского упругого напряженного состояния в поперечном поле весомости. В этом случае упругая деформация описывается бигармонической функцией Эри, фильтрация – гармонической функцией. На основе интегральной формулы Грина для определения искомых функций составлены интегральные соотношения, которые объединены в одну систему. Для численного решения использован метод граничных элементов, благодаря которому задача сведена к системе линейных уравнений. На примере круглой трубы проведен сравнительный анализ численного и аналитического решений. Получены также численные значения искомых параметров для трубы эллиптической формы.

Ключевые слова: упруго-пористая среда, фильтрация, напряжения, давление, гармоническое уравнение, бигармоническое уравнение, численные методы

Введение

При разработке угольных пластов для добычи попутного газа – метана – применяют закачку под давлением воды с последующей быстрой откачкой. Это позволяет извлекать из щелей (кливажей) и микротрещин метан [1]. Однако при закачке воды в скважину прочностные свойства угля могут измениться, в результате уголь может разрушиться и закупорить кливажи, затрудняя извлечение газа из угольных пластов. С другой стороны, разрушение каменноугольных пластов под воздействием внутренних напряжений может облегчить добычу угля. Поэтому проблема исследования напряженного состояния среды при ее водонасыщении довольно актуальна.

Подобная проблема возникает также при эксплуатации глубинных построек [2] или глубинных аппаратов. Экспериментальные исследования П. Бриджмена [3] показали, что при больших давлениях вода может проникать даже в твердые тела,

например в стекло. В результате прочностные свойства среды могут измениться. Такие среды с одновременными упругими и пористыми характеристиками имеет смысл квалифицировать как упруго-пористые среды.

К настоящему времени фильтрация жидкости достаточно хорошо и всесторонне исследована в статьях и монографиях М. Био [4], К. Терцаги [5], П.Я. Полубариновой-Кочиной [6], Г.В. Голубева и Г.Г. Тумашева [7], Л.М. Котляра и Э.В. Скворцова [8], а также в современных работах [9–12]. Следует отметить, что учет пористости и водонасыщения сред при определении их напряженно-деформированного состояния другими авторами включал в себя исследование, как правило, дисперсионных тел типа грунт, для которых кроме закономерностей деформируемости сплошной среды учитывалось изменение объема пор при сжатии и явление фильтрационной консолидации.

Настоящая работа посвящена математическому исследованию упругих, слабопористых сред с постоянным коэффициентом фильтрации.

1. Одномерная фильтрация жидкости через пористую среду

Для выяснения некоторых особенностей течения в пористой среде рассмотрим одномерную фильтрацию.

Будем считать, что фильтрующаяся жидкость следует закону Дарси [13]

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\rho g} \nabla (p + \rho g z),$$

где \mathbf{v} – скорость фильтрации, k – коэффициент фильтрации, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, p – давление жидкости.

В реальных средах поры имеют малые линейные размеры и соединены между собой еще меньшими каналами и порами, которые образуют некоторую трубчатую поверхность, которая не является прямой. Однако если рассматривать поры, соединенные на некотором малом отрезке, то этот отрезок можно считать прямолинейным и всю криволинейную капиллярную трубку также прямолинейной, то есть пористую среду можно рассмотреть как совокупность параллельных капилляров малого радиуса a . Фильтрация в среде сведется к течению вязкой жидкости в системе капиллярных трубок радиуса a . Поскольку средняя скорость течения u для капиллярной трубки длины l круглого сечения в соответствии с законом Пуазейля [13] есть

$$u = \frac{a^2 \Delta p}{8\mu l},$$

где μ – динамическая вязкость жидкости, то для одномерной фильтрации

$$\frac{k}{\rho g} = \frac{a^2}{8\mu}.$$

Коэффициент фильтрации определяется как

$$k = \frac{a^2 \rho g}{8\mu}.$$

Первый инвариант тензора деформаций связан с первым инвариантом тензора напряжений соотношением

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma),$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $J_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$. Первый инвариант тензора деформаций $J_1(\varepsilon)$ определяет относительное изменение малого объема, что влечет изменение радиуса или площади трубок. Поскольку количество трубок остается неизменным, относительное изменение поперечного сечения трубки определяется формулой

$$\frac{a'^2 - a^2}{a^2} = J_1(\varepsilon) = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma),$$

где a и a' – радиусы до и после деформации соответственно, откуда

$$a'^2 = a^2 \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) \right). \quad (1)$$

Изменение радиуса влечет изменение коэффициента фильтрации согласно формуле

$$k' = k \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) \right), \quad (2)$$

где k и k' – коэффициенты фильтрации среды до и после деформации соответственно.

В качестве примера рассмотрим одномерную деформацию упруго-пористой среды только вдоль оси z вследствие приложенного на границе давления p . Тогда тензоры напряжений и деформаций примут вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} -\nu\varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

причем $\varepsilon_{33} = \sigma_{33}/E$, $\sigma_{33} = -p$. Для первого инварианта тензора деформаций справедливо равенство

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) = -p \frac{1 - 2\nu}{E}.$$

Скорректированный коэффициент фильтрации для бетона В4 с пределом прочности 10 МПа ($E = 1.7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.18$, $k = 4 \cdot 10^{-11}$ м/с) при давлении $p = 0.1$ МПа в соответствии с формулой (2) равен:

$$k' = k \left(1 - \frac{1 - 2 \cdot 0.18}{1.7 \cdot 10^{10}} \cdot 10^5 \right) = k (1 - 1.634 \cdot 10^{-5}).$$

Изменение среднего радиуса капилляра в соответствии с (1) составит

$$a' = a (1 - 8.17 \cdot 10^{-6}).$$

Относительное изменение радиуса пор вследствие приложенной нагрузки незначительно и имеет порядок 10^{-6} . Таким образом, ввиду незначительного изменения коэффициента фильтрации и размеров пор при давлениях, малыми деформациями пор можно пренебречь, а коэффициент фильтрации считать постоянным.

2. Постановка задачи

Предполагается, что рассматриваемая среда характеризуется линейной упругостью, то есть выполняется обобщенный закон Гука, и линейной пористостью, а значит, выполняется закон Дарси с постоянным коэффициентом фильтрации [6].

Давление $P = p - \rho g x_2$ как тензор тотальных напряжений $P\delta_{i,k}$ можно объединить с тензором напряжений $\sigma_{i,k}$, то есть рассмотреть обобщенный тензор $\tilde{\sigma}_{i,k} = \sigma_{i,k} - P\delta_{i,k}$. В дальнейшем ограничимся плоскими задачами, когда напряжения выражаются через функцию Эри $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ по формулам

$$\tilde{\sigma}_{1,1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \tilde{\sigma}_{1,2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \tilde{\sigma}_{2,2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}. \quad (3)$$

В случае упруго-пористой изотропной среды (плоской области) с постоянным коэффициентом фильтрации функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению, а давление – уравнению Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi = 0, \\ \Delta P = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Следует отметить, что система уравнений (4) описывает простейший процесс и служит для определения напряженного состояния упруго-пористой среды в случае плоской деформации.

На границе ∂T давление должно быть заданным и направленным противоположно внешней нормали, так что касательное напряжение равно нулю. Тогда напряжения на границе удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\sigma_{i,k} n_i - \delta_{i,k} p n_i = -p n_k.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} n_1 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} n_2 &= -p|_{\partial T} n_1, \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} n_1 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} n_2 &= -p|_{\partial T} n_2, \\ P &= (p - \rho g x_2)|_{\partial T} \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку $n_1 = dx_2/ds$, $n_2 = -dx_1/ds$, то из (5) следует, что

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -p|_{\partial T} \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -p|_{\partial T} \frac{dx_1}{ds}$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -p|_{\partial T} x_1 + C_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -p|_{\partial T} x_2 + C_2.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = p|_{\partial T} \left[\frac{dx_1}{ds} x_2 - \frac{dx_2}{ds} x_1 \right] + C_1 \frac{dx_2}{ds} - C_2 \frac{dx_1}{ds}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -p|_{\partial T} \frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{2ds} + C_1 \frac{dx_1}{ds} + C_2 \frac{dx_2}{ds}. \quad (7)$$

Из (7) имеем, что

$$\Phi = -p|_{\partial T} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right) + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3. \quad (8)$$

Итак, задача определения функции Эри сводится к классической задаче определения бигармонической функции по заданному значению самой функции и нормальной производной на границе. Давление определяется путем решения краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Условия (6) и (8) содержат три константы, которые входят линейно в правую часть. Это облегчает их определение.

В случае односвязной области их можно положить равными нулю, так как напряжения определяются вторыми производными от функции Эри. В случае многосвязной области с контурами $(\partial T)_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, на одном из контуров, например на $(\partial T)_1$, эти константы можно положить равными нулю, а на других контурах они будут определяться из условий [14, 15]

$$\begin{aligned} \oint_{(\partial T)_k} [\omega(s)x'_1(s) - q(s)x'_2(s)] ds &= 0, \\ \oint_{(\partial T)_k} [q(s)x'_1(s) + \omega(s)x'_2(s)] ds &= 0, \\ \oint_{(\partial T)_k} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, n, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\omega = \Delta \Phi$, $q(s) = \int_0^s \partial \omega / \partial n ds'$.

Итак, математически задача формулируется следующим образом.

Необходимо найти в $\bar{T} = T \cup \partial T$ гармоническую и бигармоническую функции $P(x_1, x_2)$ и $\Phi(x_1, x_2)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$P|_{\partial T} = p_0(s), \quad \Phi|_{\partial T} = \Phi_0(s), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\partial T} = \Phi_n|_{\partial T} = \Psi_0(s), \quad s \in \partial T. \quad (10)$$

Сформулированная задача состоит из двух самостоятельных задач для гармонической и бигармонической функций. Аналитические решения этих задач можно получить лишь для областей специальной конфигурации, например круга, кольца, эллипса.

Нами используется численный метод решения системы уравнений (4) с граничными условиями (10) для произвольных областей с гладкой границей. Численный алгоритм, разработанный в [14, 16], позволяет получить результаты с достаточно высокой точностью.

3. Численный алгоритм расчета для произвольной области

Для построения численного алгоритма воспользуемся интегральным тождеством Грина

$$\varepsilon \Phi(z) + \oint_{\partial T} \Phi(\tau) G_n(r) ds - \oint_{\partial T} \Phi_n(\tau) G(r) ds = - \iint_T \Delta \Phi G(r) dT, \quad (11)$$

где $G(r)$ – функция Грина для плоской области, $G_n(r)$ – ее нормальная производная, r – расстояние от фиксированной точки до переменной точки интегрирования.

Последний интеграл можно также представить в виде интеграла по контуру ∂T . Для этого достаточно ввести новые гармонические функции $\Delta H(r) = G(r)$, $U = \Delta \Phi$ и снова воспользоваться тождеством Грина

$$\iint_T UG(r) dT = \iint_T (U\Delta H - \Delta UH) dT = \oint_{\partial T} UH_n ds - \oint_{\partial T} U_n H ds \quad (12)$$

Таким образом, система уравнений (4) сводится к системе трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi(z) &= \int_{\partial T} (\Psi G - \Phi J + V H - U F) ds, \\ \varepsilon U(z) &= \int_{\partial T} (V G - U J) ds, \\ \varepsilon P(z) &= \int_{\partial T} (Q G - P J) ds, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_\tau} = \Psi, \quad \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial n_\tau} = V, \quad \frac{\partial P}{\partial n_\tau} = Q, \\ G &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad H = \frac{r^2}{8\pi} \left(1 + \ln \frac{1}{r} \right), \quad J = \frac{\partial G}{\partial n_\tau}, \quad F = \frac{\partial H}{\partial n_\tau}, \\ \varepsilon &= \begin{cases} 0.5, & z \in \partial T, \\ 1, & z \in T. \end{cases} \end{aligned}$$

r – расстояние от фиксированной точки z до переменной точки на гладкой границе, $\partial/\partial n_\tau$ – производная по нормали в точке интегрирования на границе.

Ограничимся рассмотрением двусвязной области (для произвольных многосвязных областей рассуждения аналогичны). В соответствии с методом граничных элементов внутреннюю границу области аппроксимируют вписанным N_1 -угольником, а внешнюю – N_2 -угольником с вершинами (узлами) в точках (x_1^k, x_2^k) , $N_1 + N_2 = N$. Вычислим функции в граничных условиях в средних (контрольных) точках (X_1^k, X_2^k) каждой хорды. Тогда каждый интеграл может быть представлен в виде произведения значения искомой функции в контрольной точке и интеграла по хорде, например,

$$\int_{s_{j-1}}^{s_j} \Phi(X_1^k, X_2^k) G_n(s, X_1^k, X_2^k) ds = \Phi_k \int_{s_{j-1}}^{s_j} J(s, X_1^k, X_2^k) ds = \Phi_k A_{jk}.$$

Выражая все интегралы в виде аналогичных сумм, запишем систему интегральных уравнений (13) в матричной форме:

$$\begin{aligned} (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \Phi - \mathbf{G} \Psi + \mathbf{F} \mathbf{U} - \mathbf{H} \mathbf{V} &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{U} - \mathbf{G} \mathbf{V} &= 0, \\ (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{A}) \mathbf{P} - \mathbf{G} \mathbf{Q} &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где \mathbf{E} – единичная матрица.

В систему уравнений (14) можно включить линейные относительно интегральных постоянных C_1, C_2, C_3 уравнения для определения последних, в результате имеем матричное уравнение вида

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{B}.$$

Отсюда

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Для нахождения компонент $\tilde{\sigma}_{1,1}$, $\tilde{\sigma}_{1,2}$, $\tilde{\sigma}_{2,2}$ в области T нужно найти аналитическое выражение функции $\Phi = \Phi(x_1, x_2)$ из первого тождества (11) с учетом (12) при $\varepsilon = 1$, а затем определить ее вторые частные производные по правилу (3). Переход к $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{1,2}$, $\sigma_{2,2}$ осуществляется по формулам

$$\sigma_{1,1} = \tilde{\sigma}_{1,1} + P, \quad \sigma_{1,2} = \tilde{\sigma}_{1,2}, \quad \sigma_{2,2} = \tilde{\sigma}_{2,2} + P.$$

Обычно разрушение происходит при достижении модулем касательного напряжения некоторого предельного значения. Абсолютное максимальное значение равно полуразности главных напряжений

$$|\sigma_\tau|_{\max} = \frac{\sqrt{(\sigma_{1,1} - \sigma_{2,2})^2 + 4\sigma_{1,2}^2}}{2}. \quad (15)$$

Поэтому важно рассчитать максимальное касательное напряжение.

4. Анализ численных расчетов

Пример 1. Для сравнения численных и аналитических результатов рассмотрим известную задачу о сечении полого кругового цилиндра с внутренним и внешним радиусами R_1 , R_2 и давлениями на внутреннем и внешнем контуре p_1 , p_2 соответственно. В этом случае функции P и $\tilde{\sigma}_r$ удовлетворяют следующим граничным условиям

$$P|_{\partial T_1} = p_1, \quad P|_{\partial T_2} = p_2, \quad \tilde{\sigma}_r|_{\partial T_1} = -p_1, \quad \tilde{\sigma}_r|_{\partial T_2} = -p_2. \quad (16)$$

Система (4) в полярных координатах является системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \Phi &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} P &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом условия (9) нетрудно найти решение

$$\Phi(r) = \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3, \quad P(r) = D_1 \ln r + D_2.$$

Напряжения σ_r , σ_θ выражаются следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} + D_1 \ln r + D_2, \quad \sigma_\theta = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + D_1 \ln r + D_2.$$

С учетом граничных условий (16) определяются радиальное, тангенциальное и осевое напряжения, а также давление жидкости в пористой среде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \tilde{\sigma}_r + P, \quad \sigma_\theta = \tilde{\sigma}_\theta + P, \quad \sigma_z = \nu (\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\theta) + (1 + 2\nu) P, \\ P &= \frac{p_1 \ln(R_2/r) - p_2 \ln(R_1/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\sigma}_r$, $\tilde{\sigma}_\theta$ известны [13].

На рис. 1 представлены значения максимального касательного напряжения, полученные численным и аналитическим методами для заданных безразмерных величин $R_1 = 4$, $R_2 = 5$, $p_1 = 10^5$, $p_2 = 1$ (сплошной линией изображено точное аналитическое решение, точками – приближенное численное).

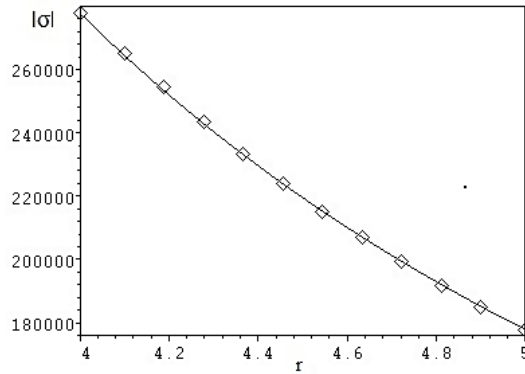


Рис. 1. Максимальное касательное напряжение (сечение кругового цилиндра)

График подтверждает высокую точность численных результатов.

Пример 2 (эллиптическое кольцо). Рассмотрим задачу нахождения нормальных и касательных напряжений для кольца эллиптической формы с внутренней и внешней границами

$$(\partial T)_1 : \begin{cases} x_1 = a_1 \cos \theta, \\ x_2 = -b_1 \sin \theta; \end{cases} \quad (\partial T)_2 : \begin{cases} x_1 = a_2 \cos \theta, \\ x_2 = b_2 \sin \theta; \end{cases}$$

$$a_2 > a_1, \quad b_2 > b_1, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

и давлениями p_1 и p_2 на внутреннем и внешнем контуре соответственно.

Как уже говорилось выше, для определения напряженного состояния решаем систему (4) с граничными условиями

$$P|_{(\partial T)_1} = p_1, \quad P|_{(\partial T)_2} = p_2,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{(\partial T)_1} = \frac{p_1 a_1 b_1 - C_1 b_1 \cos \theta - C_2 a_1 \sin \theta}{\sqrt{a_1^2 \sin^2 \theta + b_1^2 \cos^2 \theta}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{(\partial T)_2} = \frac{-p_2 a_2 b_2}{\sqrt{a_2^2 \sin^2 \theta + b_2^2 \cos^2 \theta}},$$

$$\Phi|_{(\partial T)_1} = \frac{p_1 (b_1^2 - a_1^2)}{4} \cos 2\theta + C_1 a_1 \cos \theta + C_2 b_1 \sin \theta + C_3,$$

$$\Phi|_{(\partial T)_2} = \frac{p_2 (b_2^2 - a_2^2)}{4} \cos 2\theta.$$

Численное решение отыскивалось при следующих значениях: $a_1 = 5, b_1 = 3, a_2 = 15, b_2 = 9, p_1 = 10^5, p_2 = 1$. После определения функции $\Phi(x_1, x_2)$ осуществлялся переход к $\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{2,2}$ дифференцированием по переменным, а затем вычислялось значение $|\sigma_\tau|_{\max}$ по формуле (15).

Графики максимального касательного напряжения $|\sigma_\tau|_{\max}$ (рис. 2), а также давления P (рис. 3) построены для эллипсов с полуосями $a = 5.5, b = 3.3(1), a = 6, b = 3.6(2), a = 7.5, b = 4.5(3), a = 9.5, b = 5.7(4), a = 11.5, b = 6.9(5), a = 13.5, b = 8.1(6), \theta \in [0, \pi/2]$.

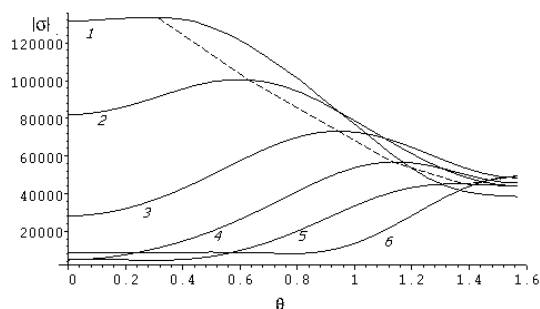


Рис. 2. Максимальное касательное напряжение (эллиптическая труба)

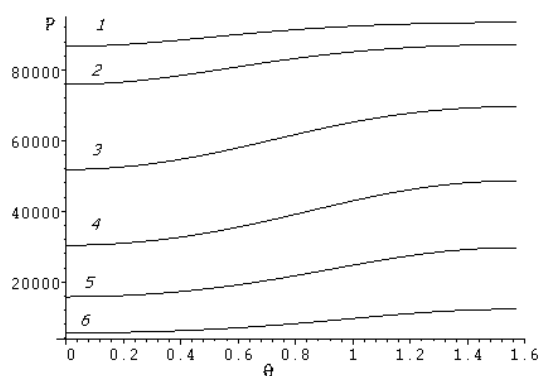


Рис. 3. Давление (эллиптическая труба)

Наибольшие значения максимального касательного напряжения изображены на рис. 2 пунктирной линией.

Ранее подобная задача решалась для плоских областей, представляющих собой многослойные полосы, с помощью аппарата почти-периодических функций [17]. Однако использование этого метода затруднительно для областей произвольной формы. Поэтому в настоящей работе особое внимание уделено численному методу решения краевой задачи для системы гармонического и бигармонического уравнений в произвольной области и применению данного подхода для определения плоского напряженного состояния. Приведены аналитическое и численное решения поставленной задачи теории упругости для осесимметричной области, представляющей собой сечение круговой трубы, и численное решение для трубы эллиптической формы. Мы ограничились демонстрационными примерами, расчеты проводились в среде Maple.

Литература

1. Аль-Джубори А., Джонстон Ш., Бойер Ч., Ламберт С.У., Бустос О.А., Пэшин Д.С., Рэй Э. Метан угольных пластов: чистая энергия для всего мира // Нефтегазовое обозр. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 4–17.
2. Terentiev A.G. Deep water technology: Problems and solutions // World Marit. Technol. Conf. – Saint-Petersburg, 2012. – P. 1–7.
3. Бриджмен П. Новейшие работы в области высоких давлений // Усп. физ. наук. – 1947. – Т. XXXI, Вып. 2. – С. 210–263.

4. *Biot M.A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials // *J. Appl. Mech.* – 1956. – V. 23, No 1. – P. 91–96.
5. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат. – 1961. – 544 с.
6. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука. – 1977. – 664 с.
7. *Голубев Г.В., Тумашев Г.Г.* Фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1972. – 195 с.
8. *Котляр Л.М., Скворцов Э.В.* О нелинейной фильтрации в области с криволинейной границей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. – № 11. – С. 90–99.
9. *Кадыров Ф.М., Костерин А.В.* Фильтрационная консолидация в пористой упругой среде с разрывными начальными условиями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 262–275.
10. *Кадыров Ф.М.* Плоская задача консолидации с разрывными начальными условиями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 3. – С. 63–70.
11. *Костерин А.В., Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В.* Численное исследование фильтрационной консолидации // Матем. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 9. – С. 63–70.
12. *Вабищевич П.Н., Григорьев А.В.* Численное моделирование фильтрации флюида в анизотропной трещиновато-пористой среде // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 61–74. – doi: 10.15372/SJNM20160105.
13. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 676 с.
14. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численные моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // Прикл. матем и механика. – 2014. – Т. 78, № 5. – С. 721–727.
15. *Демидов С.П.* Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1979. – 432 с.
16. *Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S.* The Hidrodynamics of Cavitating Flows. – USA: Backbone Publ. Comp., 2011. – 598 p.
17. *Микишанина Е.А.* Компьютерное моделирование решений плоской краевой задачи теории фильтрации // Вестн. Чуваш. ун-та. – 2016. – № 1. – С. 145–153.

Поступила в редакцию
25.11.16

Микишанина Евгения Арифжановна, старший преподаватель кафедры актуарной и финансовой математики

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова
Московский пр., д. 15., г. Чебоксары, 428015, Россия
E-mail: evaeva_84@mail.ru

Терентьев Алексей Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и теоретической механики имени С.Ф. Сайкина

Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова
Московский пр., д. 15., г. Чебоксары, 428015, Россия
E-mail: agterent@rambler.ru

On Determination of the Stress State of an Elastic-Porous Medium

*E.A. Mikishanina**, *A.G. Terentiev***

I. N. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary, 428015 Russia

E-mail: *evaeva_84@mail.ru, **agterent@rambler.ru

Received November 25, 2016

Abstract

The model of elastic porous solid medium for simulation of fluid penetration in an elastic porous body has been investigated. Similar processes can occur as a result of exposure of, for example, hard coal seams or deep solid type concrete, glass, etc. to fluid under high pressure. Assuming that an elastic body is a bundle of capillaries, a linear relationship between the filtration coefficient and the first invariant of the stress tensor has been revealed. Therefore, the problem of filtration through a deformable elastic medium has been reduced to two tasks: finding the stress tensor and solving the problem of filtration with the known filtration coefficient. In the general case, both tasks are complicated for analytical studies, but they can be solved numerically, for example, by the method of finite element analysis. The problem is significantly simplified for infinitely long cylindrical bodies. In the present work, the simplest mathematical model of plane elastic stress state in the transverse weightness field within both Hooke's law and Darcy's law with a constant filtration coefficient has been considered. In this case, the elastic deformation is described by the Airy biharmonic function, while filtration by the harmonic function. Based on Green's integral formula, integral relations combined into a single system have been found for the desired functions. The numerical solution has been performed using the method of boundary elements, with the help of which the problem has been reduced to a system of linear equations. Using a round tube, comparative analysis of the numerical and analytical solutions has been carried out. Numerical values have been obtained for the required parameters of an elliptical tube.

Keywords: elastic porous medium, filtration, strain, pressure, harmonic equation, biharmonic equation, numerical methods

Figure Captions

Fig. 1. Maximum tangential strain (circular cylinder section).

Fig. 2. Maximum tangential strain (elliptical tube).

Fig. 3. Pressure (elliptical tube).

References

1. Al-Jubori A., Johnston Sh., Boyer Ch., Lambert S.U., Bustos O.A., Peshin D.S., Ray E. Coal bed methane: Clean energy for the world.. *Neftegazovoe obozrenie*, 2009, vol. 21, no. 2, pp. 4–17. (In Russian)
2. Terentiev A.G. Deep water technology: Problems and solutions. *World Marit. Technol. Conf.*, St. Petersburg, 2012, pp. 1–7.

3. Bridgman P. Recent work in the field of high pressures. *Usp. Fiz. Nauk*, 1947, vol. XXXI, no. 2, pp. 210–263. doi: 10.3367/UFNr.0031.194701d.0053. (In Russian)
4. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous materials. *J. Appl. Mech.*, 1956, vol. 23, no. 1, pp. 91–96.
5. Tertsagi K. Soil Mechanics Theory. Moscow, Gosstroizdat, 1961. 544 p. (In Russian)
6. Polubarinova-Kochina P.Ya. Theory of Ground Water Movement. Moscow, Nauka, 1977. 664 p. (In Russian)
7. Golubev G.V., Tumashev G.G. Filtration of Incompressible Fluid in a Heterogeneous Porous Medium. Kazan, Kazan Gos. Univ., 1972. 195 p. (In Russian)
8. Kotlyar L.M., Skvortsov E.V. Nonlinear filtering in a region with curved boundary. *Trudy seminara po kraevym zadacham* [Proc. Semin. Boundary Value Problems]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1974, no. 11, pp. 90–99. (In Russian)
9. Kadyrov F.M., Kosterin A.V. The filtration consolidation of an elastic porous medium with discontinuous initial conditions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 262–275. (In Russian)
10. Kadyrov F.M. A plane consolidation problem with discontinuous initial conditions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2013, vol. 155, no. 3, pp. 63–70. (In Russian)
11. Kosterin A.V., Pavlova M.F., Shemuranova E.V. Numerical investigation of filtration consolidation. *Mat. Model.*, 2001, vol. 13, no. 9, pp. 63–70. (In Russian)
12. Vabishchevich P.N., Grigoriev A.V. Numerical modeling of fluid flow in anisotropic fractured porous media. *Numer. Anal. Appl.*, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 45–56. doi: 10.1134/S1995423916010055.
13. Loitsyanskii L.G. Fluid and Gas Mechanics. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1950. 676 p. (In Russian)
14. Kazakova A.O., Terent'ev A.G. Numerical modelling of the plane problem of the stress state of a tube immersed in a liquid. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 518–523. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2015.03.011.
15. Demidov S.P. Theory of Elasticity. Moscow, Vyssh. Shk., 1979. 432 p. (In Russian)
16. Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The Hidrodynamics of Cavitating Flows. USA, Backbone Publ. Comp., 2011. 598 p.
17. Mikishanina E.A. Computer simulation of solutions of plane boundary problems of the theory of filtration. *Vestn. Chuv. Univ.*, 2016, no. 1, pp. 145–153. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Микишанина Е.А., Терентьев А.Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 2. – С. 204–215. ⟩

⟨ **For citation:** Mikishanina E.A., Terentiev A.G. On determination of the stress state of an elastic-porous medium. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 204–215. (In Russian) ⟩