Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2017

УДК 517
ББК 22.161
В18

Печатается по решению
заседания кафедры вычислительной математики
Казанского (Приволжского) федерального университета
Протокол № 4 от 14 ноября 2016 года

Составитель
доктор физико-математических наук С.И. Соловьёв

В18 Вариационные задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве: Учебно-методическое пособие/составитель С.И.Соловьёв. – Казань: Издательство Казанского университета, 2017. – 36 с.

Излагается теория вариационных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области применения методов решения задач математической физики.

УДК 517
ББК 22.161

Содержание

Введение

Задачи на собственные значения имеют важные приложения в науке и технике. Поэтому разработка и обоснование методов решения задач на собственные значения является фундаментальным разделом вычислительной математики. В настоящем учебно-методическом пособии изучаются вариационные задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве. В параграфах 1–8 описываются хорошо известные результаты теории гильбертовых пространств, содержащиеся, например, в книгах [1–5, 12]. Эти результаты применяются далее при исследовании задач на собственные значения. В § 9 формулируется задача на собственные значения положительно определённой ограниченной симметричной билинейной формы относительно вполне непрерывной положительной симметричной билинейной формы в гильбертовом пространстве. В § 10 устанавливается существование неубывающей последовательности положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой в бесконечности, которым соответствует полная ортонормированная система собственных элементов. В § 11 выводятся минимаксные принципы собственных значений и собственных элементов и доказывается теорема сравнения. Изложение результатов проводится последовательно в терминах билинейных форм, участвующих в формулировке задачи. В литературе большее распространение получили исследования в терминах операторов задачи [2–5, 12]. Близкие результаты в вариационной форме содержатся в книгах [1, 6, 7, 10]. Изложенные теоретические результаты могут применяться при исследовании конкретных дифференциальных задач на собственные значения математической физики и механики [1, 5–8, 10, 11].

§ 1. Линейные пространства

Обозначим через $\mathbb{R}$ числовую прямую, то есть совокупность всех вещественных чисел.

Линейным пространством называется множество V, для элементов $u, v, w, \ldots$ которого определены операции сложения и умножения на число, не выводящие из V, то есть

1) каждым двум элементам $u, v \in V$ поставлен в соответствие элемент $u + v \in V$, называемый *суммой* элементов u и v;

2) каждому элементу $u \in V$ и каждому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие элемент $\alpha u \in V$, называемый *произведением* элемента u на число α.

Операции сложения и умножения удовлетворяют следующим свойствам:

а) $u + v = v + u$,

б) $(u + v) + w = u + (v + w)$,

в) существует элемент $\theta \in V$ такой, что $0 \cdot v = \theta$ для любого $v \in V$,

г) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,

д) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

е) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$,

ж) $1 \cdot v = v$

для любых элементов u, v, $w \in V$ и любых чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Как обычно, *нулевой элемент* θ будем обозначать просто 0.

Подмножество U линейного пространства V, являющееся линейным пространством, называется *подпространством* пространства V.

Пусть V есть линейное пространство, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ есть множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $u_i \in V$, $i \in I$, $I \in \{\mathbb{N}_k, \mathbb{N}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Множество

$$\left\{ u : u = \sum_{i \in I} c_i u_i, c_i \in \mathbb{R}, i \in I \right\}$$

является линейным подпространством пространства V, называется *линейной оболочкой* элементов u_i, $i \in I$, и обозначается $\operatorname{span}\{u_i, i \in I\}$.

Элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ из V называются *линейно независимыми*, если равенство $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, в противном случае элементы $u_1, u_2, \ldots, u_n$ называются *линейно зависимыми*. Бесконечное множество элементов u_i, $i = 1, 2, \ldots$ из V называется *линейно независимым*, если любое его конечное подмножество линейно независимо.

Линейное пространство называется *n-мерным* (*конечномерным*), если в нём существует n линейно независимых элементов, а совокупность любых его $n+1$ элементов линейно зависима. Число n называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$.

Линейное подпространство, являющееся линейной оболочкой линейно независимых элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$ из V, имеет размерность, равную n.

Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если в нём можно найти бесконечное линейно независимое подмножество элементов.

§ 2. Линейные нормированные пространства

Линейное пространство V называется *нормированным*, если каждому элементу $v \in V$ поставлено в соответствие вещественное число $\|v\| = \|v\|_V$, и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$,

б) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$,

в) $\|v\| \geqslant 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

где $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. Число $\|v\|$ называется *нормой* элемента v.

Последовательность $v_n, n = 1, 2, \ldots$ элементов из V называется *сходящейся* к элементу $v \in V$, если $\|v_n - v\| \to 0$ при $n \to \infty$. Для сходящейся последовательности используется обозначение: $v_n \to v$ в V при $n \to \infty$.

Последовательность $v_n, n = 1, 2, \ldots$ элементов из V называется *фундаментальной*, если $\|v_n - v_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Для фундаментальной последовательности используется обозначение: $v_n - v_m \to 0$ в V при $n, m \to \infty$.

Линейное нормированное пространство называется *полным*, если для любой фундаментальной последовательности его элементов найдётся элемент этого пространства, к которому она сходится.

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым*.

Множество элементов из V называется *ограниченным*, если существует постоянная $c > 0$ такая, что для каждого элемента v из этого множества имеет место неравенство $\|v\| \leqslant c$.

Множество элементов из V называется *компактным*, если любая последовательность его элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.

Пусть V и W есть линейные нормированные пространства. *Линейным оператором*, действующим из V в W, называется отображение $A : V \to W$, ставящее в соответствие элементу $v \in V$ элемент $w = Av \in W$ и удовлетворяющее условию

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in V$. Оператор $A : V \to W$ называется *непрерывным*, если $Av_n \to Av$ в W при $n \to \infty$ для $v_n \to v$ в V при $n \to \infty$, v_n, $v \in V$. Оператор $A : V \to W$ называется *ограниченным*, если существует такая постоянная C, что для любого элемента $v \in V$ выполняется неравенство ограниченности $\|Av\| \leqslant C\|v\|$. Наименьшая постоянная C из неравенства ограниченности называется *нормой оператора* A и обозначается $\|A\|$. Для любого ограниченного оператора $A : V \to V$ имеют место соотношения

$$\|A\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in V,\, \|v\| = 1} \|Av\| = \sup_{v \in V,\, \|v\| \leqslant 1} \|Av\|.$$

Заметим, что для линейного оператора, действующего из нормированного пространства в нормированное пространство, свойство ограниченности эквивалентно свойству непрерывности.

Справедлив следующий *принцип равномерной ограниченности*. Пусть $A_n : V \to W$, $n = 1, 2, \ldots$ есть последовательность линейных ограниченных операторов, V – банахово пространство, W – линейное нормированное пространство. Если последовательность $A_n v$, $n = 1, 2, \ldots$ ограничена при каждом фиксированном $v \in V$, то последовательность $\|A_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$ ограничена.

Пусть V – подпространство пространства W. Отображение $J : V \to W$, определяемое равенством $Jv = v$ для любого $v \in V$, называется *оператором вложения.* При этом говорят, что пространство V вложено в пространство W. Таким образом, оператор вложения элементу $v \in V$ ставит в соответствие тот же элемент, но рассматриваемый уже как элемент пространства W.

Пусть V и W нормированные пространства. Пространство V *непрерывно вложено* в W, если оператор вложения является непрерывным (ограниченным), то есть существует постоянная $c > 0$ такая, что $\|Jv\|_W \leqslant c\,\|v\|_V$ для любого $v \in V$ или $\|v\|_W \leqslant c\,\|v\|_V$ для любого $v \in V$.

Непрерывное вложение V в W называется *компактным*, если оператор вложения является компактным, то есть любое ограниченное множество элементов в V является компактным множеством в W.

Пространство V *всюду плотно* в W, если для любого элемента $w \in W$ существует последовательность элементов $v_n, n = 1, 2, \ldots$ из V, сходящаяся к w, то есть $\|v_n - w\|_W \to 0$ при $n \to \infty$.

Множество U элементов из V называется *замкнутым*, если любая сходящаяся в V последовательность элементов из U имеет пределом элемент, принадлежащий множеству U.

Замыканием подпространства U нормированного пространства V называется пространство, состоящее из элементов пространства U и пределов всех сходящихся последовательностей из U.

Нормированное пространство V называется *сепарабельным*, если в нём существует счётное множество U, плотное в V. Другими словами, для любого элемента $v \in V$ существует последовательность элементов v_n, $n = 1, 2, \ldots$ из U, сходящаяся к v.

Пусть u_n, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность элементов из V. Обозначим через U замыкание множества всевозможных конечных линейных комбинаций элементов последовательности u_n,

$n = 1, 2, \ldots$, то есть U – замыкание линейной оболочки элементов u_n, $n = 1, 2, \ldots$ ($\operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots\}$). Нетрудно убедиться, что U – сепарабельное пространство. Чтобы это проверить, заметим, что множество всевозможных комбинаций $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, где α_i, $n = 1, 2, \ldots, n$ – рациональные числа, n – любое натуральное число, образует счётное множество, плотное в U.

§ 3. Линейные пространства со скалярным произведением

Линейное пространство V называется *пространством со скалярным произведением*, если любым двум элементам u, $v \in V$ поставлено в соответствие число (u, v), и это соответствие обладает следующими свойствами:

а) $(u, v) = (v, u)$,

б) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,

в) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$,

г) $(v, v) \geqslant 0$, $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,

где $u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$. Число (u, v) называется *скалярным произведением* элементов u и v.

Скалярное произведение порождает в пространстве V норму $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ для любого $v \in V$. При этом справедливо *неравенство Коши–Буняковского*

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \, \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

В пространстве V со скалярным произведением справедливо *равенство параллелограмма*:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \forall u, v \in V.$$

Геометрическая интерпретация этого равенства для $V = \mathbb{R}^2$ состоит в том, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

Линейное пространство со скалярным произведением, полное в норме, порождаемой этим скалярным произведением, называется *гильбертовым* пространством.

Элементы v_1 и v_2 из V называются *ортогональными*, если $(v_1, v_2) = 0$. Элемент v называется ортогональным множеству U элементов из V, если $(v, u) = 0$ для любого $u \in U$. Два множества U_1 и U_2 из V называются ортогональными, если $(u_1, u_2) = 0$ для любых $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.

Элемент $v \in V$ называется *нормированным*, если $\|v\| = 1$. Система элементов из V называется *ортонормированной системой*, если её элементы нормированы и попарно ортогональны.

Линейно независимую систему элементов $v_i, i \in I$ можно преобразовать в ортонормированную систему элементов $u_i, i \in I$, применяя *метод ортогонализации Грамма–Шмидта*:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},\ u_2 = \frac{v_2 - (v_2, u_1)u_1}{\|v_2 - (v_2, u_1)u_1\|}, \ldots,$$

$$u_n = \frac{v_n - (v_n, u_1)u_1 - \ldots - (v_n, u_{n-1})u_{n-1}}{\|v_n - (v_n, u_1)u_1 - \ldots - (v_n, u_{n-1})u_{n-1}\|}, \quad n \in I \setminus \mathbb{N}_1.$$

Заметим, что $v_n - (v_n, u_1)u_1 - \ldots - (v_n, u_{n-1})u_{n-1} \neq 0$ при любом $n \in I \setminus \mathbb{N}_1$, поскольку система $v_i, i \in I$ линейно независима.

§ 4. Проекция в гильбертовом пространстве

Пусть V_1 – подпространство пространства V со скалярным произведением. Совокупность V_2 всех элементов из V, ортогональных подпространству V_1, называется *ортогональным дополнением* подпространства V_1 в V и обозначается $V_2 = V_1^{\perp}$.

Пусть $V_2 = V_1^{\perp}$, тогда $V_1 = V_2^{\perp}$. Поэтому имеем $V_{3-i} = V_i^{\perp}$, $i = 1, 2$. Расстояние $\rho(v, V_i)$ от элемента $v \in V$ до подпространства V_i из V определяется по правилу

$$\rho(v, V_i) = \inf_{w \in V_i} \|v - w\|.$$

Элемент $v_i \in V_i$ реализует расстояние от элемента v до подпространства V_i, если

$$\|v - v_i\| = \rho(v, V_i).$$

Лемма 1. *Пусть V_i – подпространство пространства V, $i = 1, 2$. Если $v \in V_i$, то $\rho(v, V_i) = 0$. Если $v \notin V_i$ и V_i замкнуто, то $\rho(v, V_i) > 0$.*

Доказательство. Для $v \in V_i$, $w = v$, имеем $\|v-w\| = 0$, откуда выводим $\rho(v, V_i) = 0$. Пусть V_i есть замкнутое подпространство и $v \notin V_i$. Предположим, что $\rho(v, V_i) = 0$. По определению точной нижней грани для любого натурального числа n найдётся элемент $w_n \in V_i$ такой, что $\|v - w_n\| < 1/n$. Поэтому имеем $w_n \to v$ в V при $n \to \infty$. В силу замкнутости подпространства V_i получим противоречие $v \in V_i$. Значит, предположение $\rho(v, V_i) = 0$ неверно и, следовательно, $\rho(v, V_i) > 0$. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть V_i – замкнутое подпространство гильбертова пространства V, $v \in V$. Тогда существует единственный элемент v_i, такой, что*

$$\|v - v_i\| = \rho(v, V_i).$$

Доказательство. По лемме 1 имеем $\rho(v, V_i) = 0$ при $v \in V_i$. Откуда $v_i = v$. Предположим, что $v \notin V_i$. Тогда, согласно лемме 1, получим $d = \rho(v, V_i) > 0$. По определению точной нижней грани для любого натурального n найдётся элемент $u_n \in V_i$ такой, что

$$d \leqslant \|v - u_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Отсюда получим последовательность u_n, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\|v - u_n\| \to d$ при $n \to \infty$.

Согласно равенству параллелограмма имеем

$$2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 = \|u_m - u_n\|^2 + \|2v - u_n - u_m\|^2.$$

Поскольку V_i есть линейное пространство, то $(u_n + u_m)/2 \in V_i$ и

$$\|2v - u_n - u_m\|^2 = 4\left\|v - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4\,d^2.$$

Теперь выводим

$$\|u_m - u_n\|^2 = 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - \|2v - u_n - u_m\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\|v - u_n\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2 \to 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

при $n \to \infty$.

Из последнего соотношения вытекает фундаментальность последовательности u_n, $n = 1, 2, \ldots$ Так как V_i замкнуто, то

u_n сходится к некоторому элементу $v_i \in V_i$. Из соотношений $\|v - u_n\| \to d$ при $n \to \infty$ и $\|v - u_n\| \to \|v - v_i\|$ при $n \to \infty$ в силу единственности предела получим $\|v - v_i\| = d$, так как

$$| \, \|v - u_n\| - \|v - v_i\| \, | \leqslant \|u_n - v_i\| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Докажем, что элемент v_i, на котором достигается точная нижняя грань, единствен. Предположим, что существует элемент $w_i \in V_i$ и $\|v - w_i\| = d$. Тогда по равенству параллелограмма

$$4d^2 = 2\|v - v_i\|^2 + 2\|v - w_i\|^2 =$$

$$= \|v_i - w_i\|^2 + 4\left\|v - \frac{v_i + w_i}{2}\right\|^2 \geqslant \|v_i - w_i\|^2 + 4d^2.$$

Откуда получим $\|v_i - w_i\| = 0$ и $w_i = v_i$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть V_1 – замкнутое подпространство гильбертова пространства V. Тогда любой элемент $v \in V$ можно единственным образом представить в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2 = V_1^\perp$. При этом справедливы соотношения*

$$\|v - v_i\| = \rho(v, V_i), \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Если $v \in V_1$, то положим $v_1 = v$, $v_2 = 0$. Пусть $v \notin V_1$. Тогда по теореме 1 существует единственный элемент $v_1 \in V_1$, реализующий расстояние от v до V_1, то есть $d = \|v - v_1\| = \rho(v, V_1) > 0$.

Представим элемент v в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_2 = v - v_1$. Покажем, что $v_2 \in V_2 = V_1^\perp$. Для любых $w \in V_1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем $v_1 + \alpha w \in V_1$ и поэтому

$$d^2 \leqslant \|v - v_1 - \alpha w\|^2 = (v_2 - \alpha w, v_2 - \alpha w) =$$

$$= \|v_2\|^2 - 2\alpha(v_2, w) + \alpha^2\|w\|^2.$$

Так как $\|v_2\| = d$, то $-2\alpha(v_2, w) + \alpha^2\|w\|^2 \geqslant 0$. Имеем $A\alpha^2 + B\alpha + C \geqslant 0$ при $A = \|w\|^2$, $B = -2(v_2, w)$, $C = 0$, значит, $D^2 = B^2 - 4AC \leqslant 0$. Отсюда выводим $(v_2, w)^2 \leqslant 0$. Следовательно, $(v_2, w) = 0$ для любого $w \in V_1$, то есть $v_2 \in V_1^\perp$. Теорема доказана. □

Пусть $v \in V$, V_i – замкнутое подпространство пространства V, $V_i = V_{3-i}^{\perp}$, v_i – элемент , реализующий расстояние от элемента v до V_i, то есть $\|v - v_i\| = \rho(v, V_i)$, $i = 1, 2$. Элемент v_i называется *ортогональной проекцией* элемента v на подпространство V_i, $i = 1, 2$. Определим оператор *ортогонального проектирования* (*ортопроектор*) P_i, действующий из V на V_i, по правилу $P_i v = v_i$, $i = 1, 2$. Точнее, оператор P_i элементу $v \in V$ ставит в соответствие проекцию $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$. Заметим, что P_i есть линейный оператор и справедливы соотношения $P_i^2 = P_i$, $\|P_i\| = 1$, $(P_i u, v) = (u, P_i v)$ для любых $u, v \in V$.

Теорема 3. *Пусть $P_i : V \to V_i$ – ортопроектор на замкнутое подпространство V_i гильбертова пространства V. Тогда оператор P_i однозначно определяется одним из следующих условий:*

а) $\|v - P_i v\| \leqslant \|v - w\| \quad \forall w \in V_i$,

б) $(v - P_i v, w) = 0 \quad \forall w \in V_i$.

Доказательство. Условие а) вытекает из теоремы 1. Условие б) следует из теоремы 2. □

§ 5. Линейные пространства с линейной формой

Пусть V – гильбертово пространство.

Отображение $f : V \to \mathbb{R}$ называется *линейным функционалом* (*линейной формой*), если любому элементу $v \in V$ оно ставит в соответствие число $f(v) \in \mathbb{R}$, и это отображение обладает следующими свойствами:

а) $f(u + v) = f(u) + f(v)$,

б) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$,

где $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Линейный функционал $f : V \to \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$|f(v)| \leqslant \beta \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Минимальная постоянная β в неравенстве ограниченности называется *нормой* функционала f и обозначается $\|f\|$. Норма функционала определяется по формуле

$$\|f\| = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \sup_{v\in V, \|v\|\leqslant 1} |f(v)| = \sup_{v\in V, \|v\|=1} |f(v)|.$$

Теорема 4. *Для линейного ограниченного функционала f на гильбертовом пространстве V существует единственный элемент $u \in V$ такой, что $f(v) = (v, u)$ для любого $v \in V$, при этом $\|f\| = \|u\|$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N} = \{v : v \in V, f(v) = 0\}$ есть нуль-пространство (ядро) функционала f. Если $\mathcal{N} = V$, то требуемое представление справедливо при $f = 0$, $u = 0$. Предположим, что $\mathcal{N} \neq V$. Тогда, поскольку $\mathcal{N}$ есть замкнутое подпространство пространства V, то по теореме 2 существует такой элемент $w \in V$, $w \neq 0$, что $(v, w) = 0$ для любого $v \in \mathcal{N}$, то есть $w \in \mathcal{N}^\perp \setminus \{0\}$. Следовательно, $f(w) \neq 0$, и, кроме того, для любого $v \in V$ имеет место соотношение

$$f\left(v - \frac{f(v)}{f(w)}w\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(w)}f(w) = 0.$$

Поэтому элемент $v - \dfrac{f(v)}{f(w)}w$ принадлежит $\mathcal{N}$ и выполняется равенство $\left(v - \dfrac{f(v)}{f(w)}w, w\right) = 0$, то есть $(v, w) = \dfrac{f(v)}{f(w)}\|w\|^2$, откуда $f(v) = (v, u)$, где $u = \dfrac{wf(w)}{\|w\|^2}$. Нетрудно убедиться в единственности элемента u. Равенство $\|u\| = \|f\|$ вытекает из соотношений

$$\|f\| = \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{|(u, v)|}{\|v\|} \leqslant \sup_{v\in V, v\neq 0} \frac{\|u\|\,\|v\|}{\|v\|} = \|u\|,$$

$$\|u\|^2 = (u, u) = f(u) \leqslant \|f\|\,\|u\|.$$

Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть V – гильбертово пространство, V_0 – плотное подпространство пространства V, $f : V_0 \to \mathbb{R}$ – линейный ограниченный функционал. Тогда существует линейный* *ограниченный функционал* $F : V \to \mathbb{R}$ *такой, что* $F(v) = f(v)$ *для любого* $v \in V_0$*, при этом* $\|F\| = \|f\|$.

Доказательство. Положим $F(v) = f(v)$ для любого $v \in V_0$. Пусть $v \in V$, но $v \notin V_0$. Вследствие плотности V_0 в V найдётся последовательность v_n, $n = 1, 2, \ldots$ из V_0, сходящаяся к v. Определим

$$F(v) = \lim_{n\to\infty} f(v_n).$$

Покажем, что данное определение корректно, то есть указанный предел существует и не зависит от выбора последовательности v_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходящейся к v. Для этого заметим $|f(v_n) - f(v_m)| \leqslant \|f\|\,\|v_n - v_m\|$, откуда следует, что последовательность $f(v_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ является фундаментальной последовательностью, а, следовательно, сходящейся.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n)$ существует. Пусть теперь еще и $w_n \to v$ в V при $n \to \infty$, где $w_n \in V_0$. Полагая

$$a = \lim_{n\to\infty} f(v_n), \quad b = \lim_{n\to\infty} f(w_n),$$

получим

$$|a - b| \leqslant |a - f(v_n)| + |f(v_n) - f(w_n)| + |f(w_n) - b| \to 0,$$

поскольку

$$|f(v_n) - f(w_n)| \leqslant \|f\|\,\|v_n - w_n\| \leqslant \|f\|\,(\|v_n - v\| + \|v - w_n\|) \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит, $a = b$.

Далее, имеем $|f(v_n)| \leqslant \|f\|\,\|v_n\|$, $\|v_n\| \to \|v\|$ при $n \to \infty$, откуда при $n \to \infty$ получим $|F(v)| \leqslant \|f\|\,\|v\|$, то есть $\|F\| \leqslant \|f\|$. С другой стороны, выводим

$$\|F\| = \sup_{v\in V, \|v\|\leqslant 1} |F(v)| \geqslant \sup_{v\in V_0, \|v\|\leqslant 1} |F(v)| = \sup_{v\in V_0, \|v\|\leqslant 1} |f(v)| = \|f\|,$$

так как точная верхняя грань на более широком множестве может лишь увеличиться. Итак, $\|F\| = \|f\|$.

Линейность F вытекает из линейности f и свойства линейности предела. Теорема доказана. $\square$

Описанная при доказательстве теоремы 5 процедура продолжения линейного ограниченного функционала называется *продолжением функционала по непрерывности.*

§ 6. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве

Последовательность элементов v_n, $n = 1, 2, \dots$ из V называется *слабо сходящейся* к элементу $v \in V$, если $(v_n, w) \to (v, w)$ при $n \to \infty$ для любого элемента $w \in V$. Для слабо сходящейся последовательности используется обозначение: $v_n \rightharpoonup v$ в V при $n \to 0$. Заметим, что если $v_n \to v$ в V при $n \to 0$, то $v_n \rightharpoonup v$ в V при $n \to 0$

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ есть множество натуральных чисел. Через I' и I_k, $k = 0, 1, \dots$, будем обозначать бесконечные подмножества множества $\mathbb{N}$.

Теорема 6. *Любая ограниченная последовательность элементов гильбертова пространства содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. 1) Пусть последовательность v_n, $n \in \mathbb{N}$ элементов из гильбертова пространства V удовлетворяет условию $\|v_n\| \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через V_0 замыкание линейной оболочки последовательности v_n, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что V_0 является сепарабельным подпространством пространства V (см. § 2).

2) Пусть $W = \{w_k, k \in \mathbb{N}\}$ есть плотное подмножество в V_0, $I_0 = \mathbb{N}$. Числовая последовательность (v_n, w_1), $n \in I_0$ ограничена, так как $|(v_n, w_1)| \leqslant \|v_n\| \, \|w_1\| \leqslant c \, \|w_1\|$, $n \in I_0$. Поэтому из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (v_n, w_1), $n \in I_1$, $I_1 \subset I_0$. Числовая последовательность (v_n, w_2), $n \in I_1$, ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность (v_n, w_2), $n \in I_2$, $I_2 \subset I_1$. Повторяя эти рассуждения выводим, что числовая последовательность (v_n, w_k), $n \in I_{k-1}$, ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность (v_n, w_k), $n \in I_k$, $I_k \subset I_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

3) Построим последовательность v_n, $n \in I'$, k-ый элемент которой равен k-ому элементу последовательности $v_n, n \in I_k$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность (v_n, w_k), $n \in I'$, сходится, так как, исключая первые $k - 1$ элементов из этой последовательности, получим подпоследовательность сходящейся последовательности (v_n, w_k), $n \in I_k$, $k \in \mathbb{N}$.

4) Доказано, что из последовательности v_n, $n \in \mathbb{N}$ можно вы-

делить подпоследовательность $v_n, n \in I'$ такую, что $(v_n, w_k) \to \alpha_k$ при $n \to \infty$, $n \in I'$, $k \in \mathbb{N}$. Определим отображение $f : W \to \mathbb{R}$, с помощью равенства $f(w_k) = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем $(v_n, w_k) \to f(w_k)$ при $n \to \infty$, $n \in I'$, $k \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 5 построим продолжение функционала $f : W \to \mathbb{R}$ по непрерывности. Получим функционал $F : V_0 \to \mathbb{R}$. По теореме 4 существует элемент $v \in V_0$, такой, что $F(w) = (v, w)$ для любого $w \in V_0$. Тогда имеем $(v_n, w) \to F(w) = (v, w)$ при $n \to \infty$, $n \in I'$, для любого $w \in V_0$.

5) Согласно теореме 2, для произвольного $w \in V$ имеем разложение $w = w_0 + w_1$, где $w_0 \in V_0$, $w_1 \in V_1 = V_0^\perp$. Следовательно, $(v_n, w) = (v_n, w_0 + w_1) = (v_n, w_0) \to (v, w_0) = (v, w_0 + w_1) = (v, w)$ для любого $w \in V$ при $n \to \infty$, $n \in I'$, так как $v_n \in V_0$. Поэтому последовательность v_n, $n \in I'$, слабо сходится к элементу v в V. Теорема доказана. □

Теорема 7. *Если все слабо сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности v_n, $n = 1, 2, \ldots$ в гильбертовом пространстве V слабо сходятся к одному и тому же элементу $v \in V$, то v является слабым пределом всей последовательности.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда найдутся $w \in V$, $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность v_n, $n \in I_1$, $I_1 \subset \mathbb{N}$, последовательности v_n, $n \in \mathbb{N}$, такие, что для $n \in I_1$ выполняются неравенства

$$|(v_n, w) - (v, w)| > \varepsilon.$$

По теореме 6 последовательность v_n, $n \in I_1$, обладает слабо сходящейся подпоследовательностью v_n, $n \in I_2$, $I_2 \subset I_1$, причем $v_n \rightharpoonup v$ в V при $n \to \infty$, $n \in I_2$, то есть $(v_n, w) \to (v, w)$ при $n \to \infty$, $n \in I_2$. Но это противоречит приведённому ранее неравенству. Теорема доказана. □

Теорема 8. *В гильбертовом пространстве любая слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность v_n, $n = 1, 2, \ldots$ слабо сходится. Определим последовательность линейных ограниченных функционалов f_n, $n = 1, 2, \ldots$ по правилу $f_n(v) =$

(v_n, v) для любого $v \in V$. Тогда числовая последовательность $f_n(v)$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится и, следовательно, ограничена при каждом фиксированном $v \in V$. Согласно принципу равномерной ограниченности последовательность $\|f_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$ ограничена и так как $\|f_n\| = \|v_n\|$ по теореме 4, то получим требуемое утверждение. Теорема доказана. □

§ 7. Линейные пространства с билинейной формой

Пусть V – линейное пространство.

Отображение $a : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *симметричной билинейной формой*, если любой паре элементов $u, v \in V$ оно ставит в соответствие число $a(u, v)$, и это отображение обладает следующими свойствами:

а) $a(u, v) = a(v, u)\ \forall u, v \in V$,

б) $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$,

в) $a(\alpha u, v) = \alpha\, a(u, v)$,

где $u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Симметричная билинейная форма называется *неотрицательной*, если

г′) $a(v, v) \geqslant 0 \quad \forall v \in V$.

Симметричная билинейная форма называется *невырожденной*, если

г′′) $v \in V$, $a(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Неотрицательная невырожденная симметричная билинейная форма задает скалярное произведение в пространстве V:

$$(u, v)_a = a(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Соответствующая этому скалярному произведению норма определяется равенством

$$\|v\|_a = \sqrt{(v, v)_a} \quad \forall v \in V.$$

Через V_a будем обозначать линейное пространство V со скалярным произведением $(.,.)_a$.

Для неотрицательной симметричной билинейной формы $a : V \times V \to \mathbb{R}$ справедливо *обобщенное неравенство Коши–Буняковского*

$$|(u, v)_a| \leqslant \|u\|_a \, \|v\|_a \quad \forall u, v \in V$$

и *обобщенное равенство параллелограмма*:

$$\|u + v\|_a^2 + \|u - v\|_a^2 = 2(\|u\|_a^2 + \|v\|_a^2) \quad \forall u, v \in V.$$

Симметричная билинейная форма $a : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *положительной*, если $a(v, v) > 0$ для любого $v \in V \setminus \{0\}$. Билинейная форма является положительной тогда и только тогда, когда она неотрицательная и невырожденная.

Пусть V – линейное пространство с нормой $\|.\|$. Симметричная билинейная форма $a : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *положительно определённой*, если существует постоянная $\alpha_1 > 0$ такая, что

$$a(v, v) \geqslant \alpha_1 \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Симметричная билинейная форма $a : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если существует постоянная $\alpha_2 > 0$ такая, что

$$|a(v, v)| \leqslant \alpha_2 \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Нормой ограниченной симметричной билинейной формы называется минимальная постоянная из неравенства ограниченности.

Норма симметричной билинейной формы $a : V \times V \to \mathbb{R}$ определяется по правилу

$$\|a\| = \sup_{v \in V, \|v\| = 1} |a(v, v)|.$$

Две нормы $\|.\|_1$ и $\|.\|_2$ в пространстве V называются *эквивалентными*, если существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$c_1 \|v\|_2 \leqslant \|v\|_1 \leqslant c_2 \|v\|_2 \quad \forall v \in V.$$

Пусть V – гильбертово пространство, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ – симметричная положительно определённая ограниченная билинейная форма. Тогда нормы $\|.\|$ и $\|.\|_a$ эквивалентны в пространстве V, а пространство V_a является также гильбертовым.

Симметричная билинейная форма $a : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если $a(v_n, v_n) \to a(v, v)$ при $n \to \infty$ для $v_n \to v$ в V при $n \to \infty$. Билинейная форма является непрерывной тогда и только тогда, когда она ограниченна.

Симметричная билинейная форма $a : V \times V \to \mathbb{R}$ называется *вполне непрерывной*, если $a(v_n, v_n) \to a(v, v)$ при $n \to \infty$ для $v_n \rightharpoonup v$ в V при $n \to \infty$. Символом $\rightharpoonup$ обозначается слабая сходимость в гильбертовом пространстве V.

Предположим, что симметричная билинейная форма $a : V \times V \to \mathbb{R}$ является неотрицательной и вполне непрерывной. Справедливо следующее свойство: существует положительная постоянная α_2 такая, что

$$a(v, v) \leqslant \alpha_2 \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Для доказательства этого свойства предположим противное. Тогда существует последовательность v_n, $n = 1, 2, \ldots$ такая, что $\|v_n\|_a / \|v_n\| > n$. Последовательность $w_n = v_n / \|v_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$ является ограниченной в пространстве V. Поэтому существует подпоследовательность w_{n_i}, $i = 1, 2, \ldots$, слабо сходящаяся к некоторому элементу $w \in V$. В результате получим противоречие: $\|v_{n_i}\|_a / \|v_{n_i}\| = \|w_{n_i}\|_a \to \|w\|_a$ при $i \to \infty$.

§ 8. Вариационное уравнение

Пусть V – вещественное гильбертово пространство с нормой $\|.\|$, $\mathbb{R}$ – числовая прямая. Зададим отображение $a : V \times V \to \mathbb{R}$, являющееся билинейной формой, удовлетворяющей следующим условиям:

а) симметричность, то есть

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V;$$

б) положительная определенность, то есть существует положительная постоянная α_1 такая, что

$$a(v, v) \geqslant \alpha_1 \|v\|^2 \quad \forall v \in V;$$

в) ограниченность, то есть существует положительная постоянная α_2 такая, что

$$a(v, v) \leqslant \alpha_2 \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Определим линейный функционал $f : V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию:

г) ограниченность, то есть существует положительная постоянная β такая, что

$$|f(v)| \leqslant \beta \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Рассмотрим задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

Эта задача называется вариационной задачей, поскольку она эквивалентна задаче минимизации функционала (см. теорему 10).

Теорема 9. *Задача* (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Введем пространство V_a со скалярным произведением $(.,.)_a$ и нормой $\|.\|_a$ (см. § 7). Функционал $f(v)$ ограничен в V_a, так как $|f(v)| \leqslant \beta \|v\| \leqslant \beta \|v\|_a / \sqrt{\alpha_1}$. По теореме 4 существует единственный элемент $w \in V$ такой, что $f(v) = (w, v)_a$ для любого $v \in V$. Уравнение (1) примет вид $(u, v)_a = (w, v)_a$ для любого $v \in V$. Следовательно, $u = w$, и теорема доказана. □

Введем функционал $J : V \to \mathbb{R}$ соотношением

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - f(v).$$

Рассмотрим задачу: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v). \tag{2}$$

В следующей теореме устанавливается эквивалентность этой задачи задаче (1).

Теорема 10. *Задача* (2) *имеет единственное решение, совпадающее с решением задачи* (1).

Доказательство. Запишем равенства

$$J(v) = \frac{1}{2}\,(v,v)_a - (w,v)_a = \frac{1}{2}\,\|v-w\|_a^2 - \frac{1}{2}\,\|w\|_a^2,$$

где элемент $w \in V$ такой, что $f(v) = (w,v)_a$ для любого $v \in V$. Отсюда получим

$$\inf_{v\in V} J(v) = \frac{1}{2}\,\inf_{v\in V}\|v-w\|_a^2 - \frac{1}{2}\,\|w\|_a^2.$$

По теореме 1 существует единственный элемент $u = w \in V$ такой, что

$$0 = \|u-w\|_a^2 = \inf_{v\in V}\|v-w\|_a^2.$$

Поэтому u есть решение задачи (2). Осталось заметить, что

$$(u-w,v)_a = 0,\ (u,v)_a = a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

то есть u является решением задачи (1). Теорема доказана. □

§ 9. Задача на собственные значения

Пусть V – бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|.\|$, $\mathbb{R}$ – числовая прямая. Введём симметричные билинейные формы $a : V\times V \to \mathbb{R}$ и $b : V\times V \to \mathbb{R}$. Предположим, что билинейная форма $a(.,.)$ является положительно определённой и непрерывной (ограниченной), то есть существуют положительные постоянные α_1 и α_2 такие, что

$$\alpha_1\|v\|^2 \leqslant a(v,v) \leqslant \alpha_2\|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Предположим, что билинейная форма $b(.,.)$ является положительной и вполне непрерывной, то есть $b(v,v) > 0$ для $v \in V\setminus\{0\}$ и $b(v_i,v_i) \to b(v,v)$ при $i \to \infty$ для $v_i \rightharpoonup v$ в V при $i \to \infty$.

Сформулируем задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u,v) = \lambda b(u,v) \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

Число λ, удовлетворяющее уравнению (3), называется *собственным значением* билинейной формы $a(.,.)$ относительно билинейной формы $b(.,.)$, а элемент u – отвечающим λ *собственным элементом.* Короче λ и u будем называть собственным значением и собственным элементом задачи (3). Множество $U(\lambda)$, состоящее из собственных элементов, отвечающих собственному значению λ, и нулевого элемента, образует замкнутое подпространство в V, которое называется *собственным подпространством*, соответствующим собственному значению λ. Размерность этого подпространства называется *кратностью* собственного значения λ. Если размерность собственного подпространства равна единице, то соответствующее собственное значение называется *простым.*

Заметим, что если w – собственный элемент, отвечающий собственному значению λ задачи (3), то для произвольной отличной от нуля постоянной c элемент $u = cw$ также является собственным элементом, отвечающим собственному значению λ. Постоянную c, а, значит, и собственный элемент, можно фиксировать, используя условие нормировки. В последующем изложении применяется нормировка, когда c выбирается из условия $\|u\|_b = 1$, где $\|u\|_b^2 = b(u, u)$. Таким образом, $c = 1/\|w\|_b$.

§ 10. Существование решений

Изучим вариационные свойства собственных значений и собственных элементов задачи (3). Эти свойства определяет *функционал Рэлея* (*отношение Рэлея*), который задается при помощи выражения $R(v) = a(v, v)/b(v, v)$ для любого $v \in V \setminus \{0\}$.

Лемма 2. *Собственные значения задачи* (3) *принадлежат интервалу* $(0, \infty)$.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение задачи (3). Тогда найдется элемент $u \in V \setminus \{0\}$, для которого выполняется соотношение (3). Поэтому, учитывая свойства билинейных форм, получим $0 < \lambda = R(u) < \infty$. $\square$

Лемма 3. *Собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям задачи* (3), *ортогональны, то есть* *если u_i – собственный элемент, соответствующий λ_i, $i = 1, 2$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $a(u_1, u_2) = b(u_1, u_2) = 0$.*

Доказательство. Вычитая равенства

$$a(u_1, u_2) = \lambda_1 b(u_1, u_2), \quad a(u_2, u_1) = \lambda_2 b(u_2, u_1),$$

получим $(\lambda_1 - \lambda_2) b(u_1, u_2) = 0$. Отсюда $b(u_1, u_2) = 0$ и поэтому $a(u_1, u_2) = \lambda_1 b(u_1, u_2) = 0$. □

Лемма 4. *Любое собственное значение задачи* (3) *имеет конечную кратность.*

Доказательство. Пусть λ – собственное значение задачи (3), $U(\lambda)$ – собственное подпространство, соответствующее λ. Предположим, что $U(\lambda)$ – бесконечномерное подпространство. Выберем последовательность линейно независимых элементов подпространства $U(\lambda)$. Применяя процесс ортогонализации к этой последовательности, получим ортонормированную систему элементов u_i, $i = 1, 2, \ldots$ таких, что

$$b(u_i, u_j) = \delta_{ij},\ a(u_i, u_j) = \lambda \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots$$

Последовательность элементов $u_i, i = 1, 2, \ldots$ ограничена в V:

$$\|u_i\| \leqslant \sqrt{\lambda/\alpha_1}$$

для любого $i = 1, 2, \ldots$ Следовательно, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $v_j, j = 1, 2, \ldots$, слабо сходящуюся в пространстве V к некоторому элементу $v \in V$. Поэтому, учитывая полную непрерывность билинейной формы $b(.,.)$, получим

$$b(v_n - v_m, v_n - v_m) \to 0$$

при $n, m \to \infty$. Но это противоречит следующему равенству $b(v_n - v_m, v_n - v_m) = 2$. □

Лемма 5. *Если существует элемент $u_1 \in V$, $b(u_1, u_1) = 1$, на котором достигается нижняя грань*

$$\lambda_1 = R(u_1) = \inf_{v \in V \setminus \{0\}} R(v),$$

то λ_1 *есть наименьшее собственное значение задачи* (3)*, а* u_1 – *отвечающий ему нормированный собственный элемент.*

Доказательство. Предположим, что на элементе $u_1 \in V$, $b(u_1, u_1) = 1$ достигается нижняя грань функционала Рэлея $R(v)$ по $v \in V$, то есть

$$R(u_1) = \inf_{v \in V \setminus \{0\}} R(v).$$

Обозначим $\lambda_1 = R(u_1)$. Зафиксируем элемент $v \in V$, $v \neq su_1$, $s \in \mathbb{R}$, и рассмотрим значения отношения Рэлея на прямой $u_1 + tv$, $t \in \mathbb{R}$ в пространстве V, которые определяют функцию $f(t) = R(u_1 + tv)$ одной переменной $t \in \mathbb{R}$. Имеем $f(t) = f_a(t)/f_b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $f_c(t) = c(u_1, u_1) + 2tc(u_1, v) + t^2 c(v, v)$. Поскольку на элементе u_1 достигается нижняя грань отношения Рэлея $R(v)$ по всем элементам $v \in V$, то $f(t) \geqslant \lambda_1$, $t \in \mathbb{R}$, или $f_a(t) \geqslant \lambda_1 f_b(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда, учитывая, что $b(u_1, u_1) = 1$ и $a(u_1, u_1) = \lambda_1$, получим неравенство $a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \geqslant 0$ при $a_0 = a(u_1, u_1) - \lambda_1 b(u_1, u_1) = 0$, $a_1 = 2(a(u_1, v) - \lambda_1 b(u_1, v))$, $a_2 = a(v, v) - \lambda_1 b(v, v)$, из которого выводим $d = a_1^2 - 4a_2 a_0 = a_1^2 \leqslant 0$. Поэтому $a_1 = 0$, что эквивалентно равенству

$$a(u_1, v) = \lambda_1 b(u_1, v), \quad v \in V, v \neq su_1, s \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $b(u_1, u_1) = 1$ и $a(u_1, u_1) = \lambda_1$, то

$$a(u_1, v) = \lambda_1 b(u_1, v) \quad \forall v \in V.$$

Следовательно, λ_1 – собственное значение, а u_1 – отвечающий ему собственный элемент задачи (3).

Пусть λ_i и u_i – некоторое собственное значение и отвечающий ему собственный элемент задачи (3). Тогда

$$\lambda_1 = R(u_1) = \inf_{v \in V \setminus \{0\}} R(v) \leqslant R(u_i) = \lambda_i,$$

то есть λ_1 – наименьшее собственное значение. □

Обозначим $V^{(1)} = V$,

$$V^{(k)} = \{v : v \in V, b(v, u_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, k-1\}$$

для $k \geqslant 2$, $u_i, i = 1, 2, \ldots, k-1$ – ортонормированная система собственных элементов, то есть $b(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k-1$, отвечающая $k-1$ наименьшим собственным значениям $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{k-1}$, занумерованным с учётом кратности. Нумерация с учётом кратности означает, что собственное значение λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$ повторяется столько раз, какова его кратность.

Лемма 6. *Если существует элемент* $u_k \in V^{(k)}$, $b(u_k, u_k) = 1$, *на котором достигается нижняя грань*

$$\lambda_k = R(u_k) = \inf_{w \in V^{(k)} \setminus \{0\}} R(w),$$

то λ_k *является наименьшим собственным значением задачи* (3), *следующим за собственными значениями* λ_1,λ_2,$\ldots$,λ_{k-1}, *то есть*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{k-1} \leqslant \lambda_k,$$

а u_k *– отвечающим* λ_k *нормированным собственным элементом таким, что*

$$b(u_k, u_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Доказательство. Предположим, что на элементе $u_k \in V^{(k)}$, $b(u_k, u_k) = 1$ достигается нижняя грань $R(w)$ по $w \in V^{(k)}$, то есть

$$R(u_k) = \inf_{w \in V^{(k)} \setminus \{0\}} R(w).$$

Обозначим $\lambda_k = R(u_k)$. Зафиксируем элемент $w \in V^{(k)}$, $w \neq s u_k$, $s \in \mathbb{R}$, и рассмотрим значения отношения Рэлея на прямой $u_k + tw$, $t \in \mathbb{R}$ в пространстве $V^{(k)}$, определяющие функцию $f(t) = R(u_k + tw)$ одной переменной $t \in \mathbb{R}$. Имеем $f(t) = f_a(t)/f_b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $f_c(t) = c(u_k, u_k) + 2tc(u_k, w) + t^2 c(w, w)$. Поскольку на элементе u_k достигается нижняя грань $R(w)$ по $w \in V^{(k)}$, то $f(t) \geqslant \lambda_k$, $t \in \mathbb{R}$, или $f_a(t) \geqslant \lambda_k f_b(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда, учитывая, что $b(u_k, u_k) = 1$ и $a(u_k, u_k) = \lambda_k$, получим неравенство $a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \geqslant 0$ при $a_0 = a(u_k, u_k) - \lambda_k b(u_k, u_k) = 0$, $a_1 = 2(a(u_k, w) - \lambda_k b(u_k, w))$, $a_2 = a(w, w) - \lambda_k b(w, w)$, из которого выводим $d = a_1^2 - 4a_2 a_0 = a_1^2 \leqslant 0$. Поэтому $a_1 = 0$, что эквивалентно равенству

$$a(u_k, w) = \lambda_k b(u_k, w), \quad w \in V^{(k)}, w \neq s u_k, s \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $b(u_k, u_k) = 1$ и $a(u_k, u_k) = \lambda_k$, то

$$a(u_k, w) = \lambda_k b(u_k, w) \quad \forall w \in V^{(k)}.$$

В частности, это равенство справедливо для элементов вида

$$w = v - \sum_{i=1}^{k-1} b(v, u_i) u_i$$

с произвольным $v \in V$, поскольку $w \in V^{(k)}$. Учитывая это равенство, получим

$$a(u_k, v) = \lambda_k b(u_k, v) \quad \forall v \in V.$$

Следовательно, λ_k – собственное значение, а u_k – отвечающий ему собственный элемент задачи (3).

Пусть λ_n и $u_n \in V^{(k)}$ – некоторое собственное значение и отвечающий ему собственный элемент задачи (3). Тогда

$$\lambda_k = R(u_k) = \inf_{w \in V^{(k)} \setminus \{0\}} R(w) \leqslant R(u_n) = \lambda_n,$$

то есть λ_k – наименьшее собственное значение, следующее за собственными значениями λ_1,λ_2,$\ldots$, λ_{k-1}. $\square$

Обратимся к доказательству существования собственных значений и собственных элементов задачи (3). Дальнейшие рассуждения будут опираться на применение минимизирующих последовательностей, которые определяются следующим образом. Последовательность элементов w_n, $n = 1, 2, \ldots$ из подпространства W пространства V называется *минимизирующей последовательностью* для функционала Рэлея $R(w)$ на подпространстве W, если

$$R(w_n) \to \alpha = \inf_{w \in W \setminus \{0\}} R(w)$$

при $n \to \infty$. Заметим, что минимизирующая последовательность всегда существует. Действительно, по определению нижней грани для любого целого $n \geqslant 1$ существует элемент $w_n \in W$ такой, что

$$\alpha \leqslant R(w_n) \leqslant \alpha + 1/n.$$

Отсюда для последовательности выбранных элементов w_n, $n = 1, 2, \ldots$ справедлива сходимость $R(w_n) \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Теорема 11. *Задача (1) имеет неубывающую последовательность положительных конечнократных собственных значений λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, с предельной точкой в бесконечности, занумерованных с учётом кратности, т.е. $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$, $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов u_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $a(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Элементы u_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют полную систему в пространстве V, то есть $V = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots\}$.*

Имеет место формула

$$\lambda_k = R(u_k) = \inf_{v \in V^{(k)} \setminus \{0\}} R(v), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $V^{(1)} = V$, $V^{(k)} = \{v : v \in V, b(v, u_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, k-1\}$, $k = 2, 3, \ldots$

Доказательство. 1) Положим

$$\lambda_1 = \inf_{v \in V \setminus \{0\}} R(v).$$

Заметим, что конечная нижняя грань существует поскольку $R(v) > 0$ для любых $v \in V$. Но эта нижняя грань может не достигаться на элементах $v \in V$. Покажем, что в действительности это не так, то есть нижняя грань достигается на некотором элементе $u_1 \in V$.

Построим минимизирующую последовательность w_i, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условиям

$$w_i \in V, \quad b(w_i, w_i) = 1, \quad \lim_{i \to \infty} a(w_i, w_i) = \lambda_1.$$

Числовая последовательность $a(w_i, w_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ имеет предел и поэтому ограничена, то есть существует постоянная c такая, что $a(w_i, w_i) \leqslant c$. Поскольку

$$\alpha_1 \|w_i\|^2 \leqslant a(w_i, w_i) \leqslant c,$$

то $\|w_i\| \leqslant \sqrt{c/\alpha_1}$, что означает ограниченность последовательности w_i, $i = 1, 2, \ldots$ в пространстве V. Следовательно, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность w_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, сходящуюся слабо в пространстве V.

Обозначим для краткости $\varphi_j = w_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ Последовательность φ_j, $j = 1, 2, \ldots$ обладает следующими свойствами:

$$\varphi_i \in V, \quad b(\varphi_i, \varphi_i) = 1, \quad \lim_{i\to\infty} a(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_1$$

и, кроме того, существует элемент $u_1 \in V$ такой, что $\varphi_i \rightharpoonup u_1$ при $i \to \infty$.

Докажем, что $R(u_1) = \lambda_1$. Отсюда по лемме 5 будет следовать, что λ_1 есть наименьшее собственное значение задачи (3), а u_1 – собственный элемент, отвечающий собственному значению λ_1.

Последовательность φ_i, $i = 1, 2, \ldots$ является фундаментальной в пространстве V, поскольку

$$\alpha_1 \|\varphi_i - \varphi_j\|^2 \leqslant a(\varphi_i - \varphi_j, \varphi_i - \varphi_j) =$$
$$= 2a(\varphi_i, \varphi_i) + 2a(\varphi_j, \varphi_j) - a(\varphi_i + \varphi_j, \varphi_i + \varphi_j) \leqslant$$
$$\leqslant 2a(\varphi_i, \varphi_i) + 2a(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1 b(\varphi_i + \varphi_j, \varphi_i + \varphi_j) \to$$
$$\to 2\lambda_1 + 2\lambda_1 - 4\lambda_1 = 0$$

при $i, j \to \infty$. Здесь учтены соотношения $\lambda_1 \leqslant R(\varphi_i + \varphi_j)$ и $b(\varphi_i + \varphi_j, \varphi_i + \varphi_j) \to 4b(u_1, u_1) = 4$ при $i, j \to \infty$. Из полноты пространства V вытекает, что последовательность φ_i, $i = 1, 2, \ldots$ сходится в V: $\|\varphi_i - u_1\| \to 0$ при $i \to \infty$. При этом

$$a(u_1, u_1) = \lim_{i\to\infty} a(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_1,$$
$$b(u_1, u_1) = \lim_{i\to\infty} b(\varphi_i, \varphi_i) = 1.$$

Таким образом, установлено существование минимального собственного значения и отвечающего ему собственного элемента.

2) Допустим, что уже доказано существование первых $k-1$ наименьших собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ и отвечающих им собственных элементов $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ таких, что $b(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k-1$. Обозначим

$$\lambda_k = \inf_{v \in V^{(k)} \setminus \{0\}} R(v)$$

и построим минимизирующую последовательность w_i, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условиям

$$w_i \in V^{(k)}, \quad b(w_i, w_i) = 1, \quad \lim_{i \to \infty} a(w_i, w_i) = \lambda_k.$$

Числовая последовательность $a(w_i, w_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ имеет предел и поэтому ограничена, то есть существует постоянная c такая, что $a(w_i, w_i) \leqslant c$. Поскольку

$$\alpha_1 \|w_i\|^2 \leqslant a(w_i, w_i) \leqslant c,$$

то $\|w_i\| \leqslant \sqrt{c/\alpha_1}$, что означает ограниченность последовательности w_i, $i = 1, 2, \ldots$ в пространстве V. Следовательно, из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность w_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, сходящуюся слабо в пространстве V.

Обозначим для краткости $\varphi_j = w_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ Последовательность φ_j, $j = 1, 2, \ldots$ обладает следующими свойствами:

$$\varphi_i \in V^{(k)}, \qquad b(\varphi_i, \varphi_i) = 1, \qquad \lim_{i \to \infty} a(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_k$$

и, кроме того, существует элемент $u_k \in V$ такой, что $\varphi_i \rightharpoonup u_k$ в V при $i \to \infty$.

Доказательство того, что $R(u_k) = \lambda_k$ проводится повторением рассуждений первого пункта доказательства теоремы. Отсюда по лемме 6 будет следовать, что λ_k есть собственное значение задачи (3), а u_k – собственный элемент, отвечающий собственному значению λ_k.

3) Докажем, что последовательность собственных значений стремится к бесконечности. Допустим противное, то есть существует конечная постоянная c, отделяющая любое собственное значение от бесконечности: $\lambda_k \leqslant c$. Тогда $a(u_k, u_k) = \lambda_k \leqslant c$ и $\|u_k\| \leqslant \sqrt{c/\alpha_1}$. Отсюда вытекает ограниченность последовательности собственных элементов в V. Значит, существует подпоследовательность v_j, $j = 1, 2, \ldots$ последовательности u_k, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся слабо к некоторому элементу $v \in V$. Следовательно,

$$b(v_n - v_m, v_n - v_m) \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Но это противоречит тому, что

$$b(v_n - v_m, v_n - v_m) = 2.$$

4) Докажем, что система собственных элементов полна в V, то есть $V = \text{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots\}$. Допустим противное. Рассмотрим подпространство $W = \{v : v \in V, b(v, u_i) = 0, i = 1, 2, \ldots\}$. В силу сделанного предположения это подпространство содержит отличные от нуля элементы, то есть $W \neq \{0\}$. Обозначим

$$\alpha = \inf_{v \in W \setminus \{0\}} R(v).$$

Повторяя проведенные ранее рассуждения, получим, что α есть собственное значение задачи (3). Имеем

$$\alpha = \inf_{v \in W \setminus \{0\}} R(v) \geqslant \inf_{v \in V^{(k)} \setminus \{0\}} R(v) = \lambda_k.$$

Но этого не может быть, так как λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ в совокупности не ограничены. Из полученного противоречия вытекает полнота системы собственных элементов в V.

5) Предположим, что существует собственное значение λ, отличное от найденных $\lambda_k, k = 1, 2, \ldots$ Тогда ему соответствует собственный элемент $u \neq 0$, который в силу леммы 3 ортогонален всем остальным, то есть $b(u, u_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ Но отсюда следует, что $u = 0$. Теорема доказана. $\square$

§ 11. Минимаксные принципы

Обозначим $E_0 = \{0\}$, $E_k = \text{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Для подпространства W пространства V положим

$$W^{\perp} = \{v : v \in V, a(v, w) = 0 \ \forall w \in W\}.$$

Будем считать $E_0^{\perp} = V$.

Теорема 12. *Для $k = 1, 2, \ldots$ справедливы соотношения*

$$\lambda_k = \min_{v \in E_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} R(v) = \max_{v \in E_k \setminus \{0\}} R(v).$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из теоремы 11 и соотношения $V^{(k)} = E_{k-1}^{\perp}$.

Докажем второе равенство. Для произвольного элемента $v \in E_k \setminus \{0\}$ выполняется разложение $v = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$, где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, $b(v, v) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 > 0$, $a(v, v) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \lambda_i$. Отсюда находим $R(v) \leqslant \lambda_k$ для любого элемента $v \in E_k \setminus \{0\}$. Теперь, учитывая соотношение $R(u_k) = \lambda_k$, выводим требуемое равенство. Теорема доказана. $\square$

В теореме 12 получены формулы для нахождения собственных значений. В этих формулах для определения собственного значения привлекаются собственные элементы, отвечающие другим собственным значениям. Ниже будут выведены формулы для непосредственного вычисления собственного значения без использования собственных элементов.

Пусть W есть подпространство пространства V. Обозначим через $\mathcal{E}_k(W)$ множество всех k-мерных подпространств пространства W при $k \geqslant 1$. Множество $\mathcal{E}_0(W)$ состоит только из E_0. Положим $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(V)$ при $k \geqslant 0$.

Теорема 13. *Для $k = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство*

$$\lambda_k = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W_k \setminus \{0\}} R(v).$$

Доказательство. В силу второго равенства теоремы 12 минимум в требуемой формуле достигается при $W_k = E_k$.

Покажем, что при любом $W_k \in \mathcal{E}_k$ выполняется неравенство

$$\max_{v \in W_k \setminus \{0\}} R(v) \geqslant \lambda_k.$$

Для этого выберем ненулевой элемент v^* из пространства W_k, который удовлетворяет уравнениям $a(v^*, u_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Нетрудно проверить, что такой элемент существует. Действительно, зафиксировав базис $w_1, w_2, \ldots, w_k$ в пространстве W_k и разложив v^* по базису: $v^* = \sum_{j=1}^{k} c_j w_j$, для определения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_k$ получим систему

$$\sum_{j=1}^{k} a(w_j, u_i) c_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Матрица этой системы прямоугольная, а потому вырожденная. Следовательно, эта система имеет непустое множество решений. Поскольку $v^* \in W_k \cap E_{k-1}^{\perp}$, то, согласно теореме 12, заключаем

$$\max_{v \in W_k \setminus \{0\}} R(v) \geqslant R(v^*) \geqslant \min_{v \in E_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} R(v) = \lambda_k.$$

Теорема доказана. □

Теорема 14. *Для* $k = 1, 2, \ldots$ *справедливо соотношение*

$$\lambda_k = \max_{W_{k-1} \in \mathcal{E}_{k-1}} \min_{v \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} R(v).$$

Доказательство. В силу первого равенства теоремы 12 максимум в требуемой формуле достигается при $W_{k-1} = E_{k-1}$.

Теперь осталось показать, что при любом $W_{k-1} \in \mathcal{E}_{k-1}$ выполняется неравенство

$$\min_{v \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} R(v) \leqslant \lambda_k.$$

Для этого выберем ненулевой элемент v^* из пространства $W_{k-1}^{\perp}$, который принадлежит E_k. Такой элемент существует. В самом деле, зафиксировав базис $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ в пространстве W_{k-1}, получим уравнения для определения коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_k$ разложения $v^* = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j$:

$$\sum_{j=1}^{k} a(w_i, u_j) c_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Эта система имеет непустое множество решений, так как матрица системы вырождена. В результате с помощью теоремы 12 выводим

$$\min_{v \in W_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} R(v) \leqslant R(v^*) \leqslant \max_{v \in E_k \setminus \{0\}} R(v) = \lambda_k,$$

так как $v^* \in W_{k-1}^{\perp} \cap E_k$. Теорема доказана. □

Из минимаксных принципов вытекает теорема сравнения.

Теорема 15. *Пусть билинейные формы* $a_i : V \times V \to \mathbb{R}$ *и* $b_i : V \times V \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ *удовлетворяют условиям задачи* (3), *и, кроме того, для отношений Рэлея* $R_i(v) = a_i(v, v)/b_i(v, v)$, $v \in V \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ *выполняются неравенства*

$$R_2(v) \geqslant R_1(v), \quad v \in V \setminus \{0\}.$$

Пусть $\lambda_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$ *– собственные значения задач*

$$\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}, u^{(i)} \in V \setminus \{0\} : \quad a_i(u^{(i)}, v) = \lambda^{(i)} b_i(u^{(i)}, v) \quad \forall v \in V.$$

Тогда $\lambda_k^{(2)} \geqslant \lambda_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим $E_k^{(2)} = \operatorname{span}\{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}\}$, $w \in E_k^{(2)} \setminus \{0\}$ – элемент, на котором достигается максимум $R_1(v)$, $v \in E_k^{(2)} \setminus \{0\}$. Применяя теоремы 12 и 13, приходим к требуемому неравенству

$$\lambda_k^{(1)} = \min_{W_k \in \mathcal{E}_k} \max_{v \in W_k \setminus \{0\}} R_1(v) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{v \in E_k^{(2)} \setminus \{0\}} R_1(v) = R_1(w) \leqslant R_2(w) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{v \in E_k^{(2)} \setminus \{0\}} R_2(v) = \lambda_k^{(2)}.$$

Теорема доказана. □

Литература

1. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
2. **Гулд С.** Вариационные методы в задачах о собственных значениях. — М.: Мир, 1970.
3. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
4. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
5. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
6. **Михлин С.Г.** Вариационные методы в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1957.
7. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
8. **Обен Ж.–П.** Приближённое решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1988.
9. **Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
10. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
11. **Соловьёв С.И.** Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. — Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
12. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

Учебное издание

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 28.12.2016.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman» Усл. печ. л. 2,09.
Уч.-изд. 0,2. Тираж 100 экз. Заказ 383/12.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
Тел. (843) 233–73–59, 233–73–28