

УДК 517.5

**НЕРАВЕНСТВО ТИПА БРУННА – МИНКОВСКОГО
В ФОРМЕ ХАДВИГЕРА ДЛЯ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ***Б.С. Тимергалиев**Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия***Аннотация**

Настоящая работа посвящена построению одного класса функционалов области в евклидовом пространстве и доказательству для них неравенства типа Брунна – Минковского. При построении функционалов области используется точка минимума функции многих переменных, связанной с функционалами, доказательство существования которой является существенным моментом предложенных исследований. Приведены частные случаи функционалов, когда точку минимума удается найти в явном виде. Полученное в работе неравенство Брунна – Минковского обобщает соответствующее неравенство для моментов относительно центра масс и гиперплоскостей, доказанное Х. Хадвигером, на случай степенных моментов. Следует отметить, что точка минимума функционала в общем случае не совпадает с центром масс; совпадение имеет место только в частных случаях, что подтверждено в работе конкретными примерами.

Ключевые слова: неравенство Брунна – Минковского, неравенство Прекопа – Лайндлера, вогнутый функционал, выпуклая область

Введение

Классическое неравенство Брунна – Минковского позволяет сравнить меры Лебега областей, а именно справедливо неравенство

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n}, \quad (1)$$

где $|\Omega|$ – мера множества Ω , Ω_0 , Ω_1 – выпуклые тела в \mathbb{R}^n , $\Omega_0 + \Omega_1 := \{z_0 + z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ – векторная сумма (сумма Минковского). В 1887 г. неравенство (1) было получено Брунном в случае $n = 3$. В 1910 г. Минковский указал Брунну на ошибку в доказательстве, которую тот исправил, а также придумал свое доказательство. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω_0 и Ω_1 являются равными с точностью до переноса и расширения.

Долгое время считалось, что неравенство Брунна – Минковского относится только к геометрии, где его значение широко известно. Но в середине XX века Л.А. Люстерник [1] доказал, что неравенство (1) верно для произвольных ограниченных измеримых множеств Ω_0 и Ω_1 . Неравенство (1) при произвольных Ω_0 и Ω_1 принято называть общим неравенством Брунна – Минковского. С тех пор неравенство начало свой путь в область анализа. В 1956 г. Х. Хадвигер [2] доказал неравенство типа Брунна – Минковского для двух моментов выпуклой области, а именно для момента относительно центра масс и для момента относительно гиперплоскости. В 1971–1972 гг. А. Прекопа [3] и Л. Лайндлер [4] доказали следующую функциональную версию неравенства Брунна – Минковского.

Теорема 1. Пусть $0 < t < 1$, f_0, f_1, h – неотрицательные интегрируемые функции в \mathbb{R}^n , удовлетворяющие условию

$$h((1-t)x + ty) \geq f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t \tag{2}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) dx \right)^{1-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) dx \right)^t.$$

Последние 30–40 лет тематика, связанная с неравенством Брунна – Минковского, стремительно развивается. Неравенство широко используется в геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей. Усиления теоремы 1 и ряд новых результатов можно найти в статьях [5, 6]. Литература по неравенствам типа Брунна – Минковского и основные результаты, появившиеся до 2006 г., содержатся в обзорных статьях [7, 8]. В 2010 г. Г. Кэди [9] доказал неравенство типа Брунна – Минковского для функционала, введенного Ф.Г. Авхадиевым [10]. Развитие результата Г. Кэди, а также неравенства для новых типов функционалов были получены в работе [11]. Отметим также ряд статей [12–14], появившихся в последние годы

Приведем формулировку результата Х. Хадвигера [2].

Пусть Ω – ограниченная выпуклая область в \mathbb{R}^n . Через s обозначим центр масс области Ω . Определим функционал

$$I(\Omega) = \int_{\Omega} |s, p|^2 dp, \quad p \in \Omega,$$

где $|s, p|$ – расстояние от точки s до p .

Теорема 2. Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные выпуклые области в \mathbb{R}^n . Тогда функционал $I(\Omega_t)^{1/(n+2)}$ вогнут по t :

$$I(\Omega_t)^{1/(n+2)} \geq (1-t)I(\Omega_0)^{1/(n+2)} + tI(\Omega_1)^{1/(n+2)}, \tag{3}$$

где $\Omega_t = \{(1-t)p_0 + tp_1 | p_0 \in \Omega_0, p_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$.

Целью настоящей работы является обобщение неравенства (3).

1. Основной результат

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n . Определим функционал

$$I(k, \Omega) = \int_{\Omega} (\alpha_1 |x_1 - s_1|^k + \alpha_2 |x_2 - s_2|^k + \dots + \alpha_n |x_n - s_n|^k) dx, \quad k \in (1, +\infty), \tag{4}$$

где s_1, s_2, \dots, s_n – координаты точки минимума функции

$$I(y) = \int_{\Omega} (\alpha_1 |x_1 - y_1|^k + \alpha_2 |x_2 - y_2|^k + \dots + \alpha_n |x_n - y_n|^k) dx, \quad dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

переменных $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_1, x_2, \dots, x_n – декартовы координаты точки $x \in \Omega$, $k \in (1, +\infty)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, – произвольные действительные числа.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема 3. Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в \mathbb{R}^n , представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $I(k, \Omega)^{1/(k+n)}$ вогнут:

$$I(k, \Omega_t)^{1/(k+n)} \geq (1-t)I(k, \Omega_0)^{1/(k+n)} + tI(k, \Omega_1)^{1/(k+n)}, \quad (5)$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (1, +\infty)$.

Отметим, что метод, разработанный Г. Кэди в [9], не подходит для получения неравенства (5), но используется нами при получении вспомогательных результатов, а именно лемм 4 и 5.

2. Построение функционала

Данный раздел посвящен доказательству существования точки минимума функции $I(y)$.

Пусть Ω – ограниченная выпуклая область точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства \mathbb{R}^n . Через Ω_j обозначим проекцию области Ω на гиперплоскость $x_j = 0$. Условие выпуклости области Ω равносильно тому, что существуют непрерывные на Ω_j функции $\varphi_j(x^j), \psi_j(x^j)$, $x^j = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \Omega_j$, что область Ω состоит из точек x , для которых $x^j \in \Omega_j$, $\varphi_j(x^j) \leq x_j \leq \psi_j(x^j)$: $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^j \in \Omega_j, \varphi_j(x^j) \leq x_j \leq \psi_j(x^j), j = 1, 2, \dots, n\}$.

Обозначим

$$I_j(y_j) = \alpha_j \int_{\Omega} |x_j - y_j|^k dx = \alpha_j \int_{\Omega} [(x_j - y_j)^2]^{k/2} dx, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Тогда $I(y) = \sum_{j=1}^n I_j(y_j)$. Заметим, что

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y_j} = \frac{\partial I_j(y_j)}{\partial y_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Непосредственным дифференцированием под знаком интеграла в (6) находим

$$I'_j(y_j) = (-\alpha_j)k \int_{\Omega} |x_j - y_j|^{k-2} (x_j - y_j) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, для нахождения стационарных точек $y = (y_1, \dots, y_n)$ функции $I(y)$ имеем систему

$$\int_{\Omega} |x_j - y_j|^{k-2} (x_j - y_j) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

которая представляет собой систему алгебраических уравнений относительно y_1, \dots, y_n . Займемся исследованием ее разрешимости. С этой целью систему (7) запишем в другой форме. Так как

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x_j - y_j|^{k-2} (x_j - y_j) dx &= \int_{\Omega_j} dx^j \int_{\varphi_j(x^j)}^{\psi_j(x^j)} [(x_j - y_j)^2]^{k/2-1} (x_j - y_j) dx_j = \\ &= \frac{1}{k} \int_{\Omega_j} (|\psi_j - y_j|^k - |\varphi_j - y_j|^k) dx^j, \quad k \in (1, +\infty), \end{aligned}$$

то система (7) примет вид

$$\int_{\Omega_j} (|\psi_j - y_j|^k - |\varphi_j - y_j|^k) dx^j = 0, \quad \psi_j = \psi_j(x^j), \quad \varphi_j = \varphi_j(x^j), \quad x^j \in \Omega_j,$$

$$dx^j = dx_1 dx_2 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Заметим, что

$$|\psi_j - y_j|^k - |\varphi_j - y_j|^k = \frac{k}{2} \int_{(y_j - \varphi_j)^2}^{(\psi_j - y_j)^2} t^{k/2-1} dt. \quad (9)$$

Сделав в (9) замену переменной $t = (y_j - \varphi_j)^2 + \tau ((\psi_j - y_j)^2 - (y_j - \varphi_j)^2)$, получим формулу (9) в виде

$$\begin{aligned} |\psi_j - y_j|^k - |\varphi_j - y_j|^k &= \\ &= h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) ((\psi_j - y_j)^2 - (y_j - \varphi_j)^2), \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (10)$$

где принято обозначение

$$\begin{aligned} h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) &= \\ &= \frac{k}{2} \int_0^1 ((y_j - \varphi_j)^2 + \tau ((\psi_j - y_j)^2 - (y_j - \varphi_j)^2))^{k/2-1} d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (10) в систему (8), получаем

$$\int_{\Omega_j} h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) (\psi_j^2 - \varphi_j^2 - 2y_j(\psi_j - \varphi_j)) dx^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Так как

$$\psi_j^2 - \varphi_j^2 = 2 \int_{\varphi_j}^{\psi_j} x_j dx_j, \quad \psi_j - \varphi_j = \int_{\varphi_j}^{\psi_j} dx_j,$$

то система (12) примет вид

$$\int_{\Omega} h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) x_j dx - y_j \int_{\Omega} h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

которую, в свою очередь, перепишем в виде

$$y_j = \frac{\int_{\Omega} h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) x_j dx}{\int_{\Omega} h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k) dx}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Представление (13) системы (7) позволяет доказать ее разрешимость. Действительно, заметим, что $h(|y_j - \varphi_j|; |\psi_j - y_j|; k)$, определенная формулой (11), как функция переменных $x^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, положительна в Ω_j , а значит, и в Ω . Тогда, применяя к интегралу в числителе (13) теорему о среднем,

получаем, что существуют такие числа $\mu_j \in [\min_{\Omega} x_j, \max_{\Omega} x_j]$, что справедливы формулы

$$\int_{\Omega} h(y_j - \varphi_j; \psi_j - y_j; k) x_j dx = \mu_j \int_{\Omega} h(y_j - \varphi_j; \psi_j - y_j; k) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Теперь, если (14) подставить в (13), получим

$$y_j = \mu_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

то есть система (13) имеет решение вида (15).

Таким образом, функция $I(y)$ имеет стационарную точку вида (15). Заметим, что эта стационарная точка может и не принадлежать области Ω . Однако гиперплоскости $x_j = \mu_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ имеют с Ω непустое пересечение.

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – стационарная точка функции $I(y)$. Покажем, что она является точкой минимума. Для второй производной функции $I(y)$ легко получаем выражение

$$I''_j(y_j) = \alpha_j k \int_{\Omega_j} (|\psi_j - y_j|^{k-1} \text{sign}(\psi_j - y_j) - |\varphi_j - y_j|^{k-1} \text{sign}(\varphi_j - y_j)) dx^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Покажем, что имеют место неравенства

$$I''_j(y_j) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

С этой целью проекцию Ω_j области Ω на гиперплоскость $x_j = 0$ разобьем на две части двумя способами в зависимости от расположения точки y : $\Omega_j = \Omega_j^0 + \Omega_j^1$ или $\Omega_j = \Omega_j^0 + \Omega_j^2$, где

$$\Omega_j^0 = \{x^j \in \Omega_j \mid \psi_j(x^j) \geq y_j \geq \varphi_j(x^j)\},$$

$$\Omega_j^1 = \{x^j \in \Omega_j \mid y_j > \psi_j(x^j) \geq \varphi_j(x^j)\},$$

$$\Omega_j^2 = \{x^j \in \Omega_j \mid \psi_j(x^j) \geq \varphi_j(x^j) > y_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

В соответствии с этими разбиениями соотношения (16) можно представить одним из следующих способов:

$$I''_j(y_j) = \alpha_j k \int_{\Omega_j^0} ((\psi_j - y_j)^{k-1} + (y_j - \varphi_j)^{k-1}) dx^j + \alpha_j k \begin{cases} \int_{\Omega_j^1} ((y_j - \varphi_j)^{k-1} - (y_j - \psi_j)^{k-1}) dx^j, \\ \int_{\Omega_j^2} ((\psi_j - y_j)^{k-1} - (\varphi_j - y_j)^{k-1}) dx^j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (18) положительно. Так как $y_j - \varphi_j(x^j) \geq y_j - \psi_j(x^j)$ для любых $x^j \in \Omega_j^1$ и $\psi_j(x^j) - y_j \geq \varphi_j(x^j) - y_j$ для любых $x^j \in \Omega_j^2$, вторые слагаемые в (18) при $k \in (1, +\infty)$ также положительны. Таким образом, условия (17) выполняются. Кроме того, отметим, что в случае

$0 < k < 1$ условия (17) могут выполняться за счет малости частей Ω_j^1, Ω_j^2 . Например, если Ω – n -мерный параллелепипед, то легко видеть, что $\Omega_j^1 = \emptyset, \Omega_j^2 = \emptyset$, то есть при $0 < k < 1$ вторые слагаемые в (18) отсутствуют и тем самым условия (17) будут выполнены.

Принимая во внимание (17) и $\frac{\partial^2 I(y)}{\partial y_i \partial y_j} = 0, i \neq j$, получаем, что полный дифференциал второго порядка $d^2 I(y)$ представляет собой положительно определенную квадратичную форму dy_1, \dots, dy_n . Следовательно, стационарная точка y является точкой минимума $I(y)$. В дальнейшем точку минимума будем обозначать через $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Таким образом, доказана

Лемма 1. Пусть Ω – ограниченная выпуклая область в \mathbb{R}^n . Тогда функция $I(y)$ переменных y_1, y_2, \dots, y_n в \mathbb{R}^n имеет точку минимума $s = (s_1, \dots, s_n)$, координаты которой определяются из системы уравнений (7) или (13).

Общий случай. Пусть теперь Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n такая, что ее можно представить в виде объединения конечного числа областей $\Omega^1, \Omega^2, \dots, \Omega^m$ ($\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega^i$) таких, что каждая область Ω^i является выпуклой, то есть Ω^i представима в виде

$$\Omega^i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^j \in \Omega_j^i, \varphi_j^i(x^j) \leq x_j \leq \psi_j^i(x^j), j = 1, 2, \dots, n\}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где Ω_j^i – проекция Ω^i на гиперплоскость $x_j = 0$, $\varphi_j^i(x^j), \psi_j^i(x^j)$ – непрерывные функции в $\Omega_j^i, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m$. Тогда функцию $I_j(y_j)$ можно представить в виде

$$I_j(y_j) = \alpha_j \sum_{i=1}^m \int_{\Omega^i} |x_j - y_j|^k dx, \quad k \in (1, +\infty).$$

Применяя к ней предыдущие рассуждения, для определения стационарных точек функции $I(y)$ получим систему

$$y_j = \frac{\sum_{i=1}^m \int_{\Omega^i} h(|y_j - \varphi_j^i|; |y_j - \psi_j^i|; k) x_j dx}{\sum_{i=1}^m \int_{\Omega^i} h(|y_j - \varphi_j^i|; |y_j - \psi_j^i|; k) dx}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Обозначим

$$H(y_j; x; k) = \sum_{i=1}^m \chi_{\Omega^i}(x) h(|y_j - \varphi_j^i|; |y_j - \psi_j^i|; k),$$

где $h(|y_j - \varphi_j^i|; |y_j - \psi_j^i|; k)$ определен формулой (11), $\chi_{\Omega^i}(x)$ – характеристическая функция области Ω^i .

Тогда систему (19) можно записать в виде

$$y_j = \frac{\int_{\Omega} H(y_j; x; k) x_j dx}{\int_{\Omega} H(y_j; x; k) dx}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Заметим, что функция $H(y_j; x; k)$ положительна в области Ω . Тогда, рассуждая как и выше, получаем, что система (20) разрешима.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n)$ – стационарная точка функции $I(y)$. Через i_1, i_2, i_3 обозначим подмножества множества номеров $\{1, 2, \dots, n\}$, обладающих следующими свойствами:

1) для всех $i \in i_1$ область Ω^i имеет непустое пересечение с гиперплоскостью $x_j = y_j$;

2) для всех $i \in i_2$ справедливы неравенства $y_j > \psi_j^i \geq \varphi_j^i$;

3) для всех $i \in i_3$ справедливы неравенства $\psi_j^i \geq \varphi_j^i > y_j$.

Отметим, что i_2, i_3 могут быть и пустыми множествами. Тогда для второй производной функции $I_j(y_j)$ имеем выражение

$$\begin{aligned} I_j''(y_j) &= \alpha_j k \sum_{i \in i_1} \int_{\Omega_j^i} (|\psi_j^i - y_j|^{k-1} \text{sign}(\psi_j^i - y_j) - |\varphi_j^i - y_j|^{k-1} \text{sign}(\varphi_j^i - y_j)) dx^j + \\ &\quad + \alpha_j k \sum_{i \in i_2} \int_{\Omega_j^i} ((y_j - \varphi_j^i)^{k-1} - (y_j - \psi_j^i)^{k-1}) dx^j + \\ &\quad + \alpha_j k \sum_{i \in i_3} \int_{\Omega_j^i} ((\psi_j^i - y_j)^{k-1} - (\varphi_j^i - y_j)^{k-1}) dx^j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k \in (1, +\infty). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как

$$\begin{aligned} y_j - \varphi_j^i(x^j) &\geq y_j - \psi_j^i(x^j) \quad \forall x^j \in \Omega_j^i, \quad \forall i \in i_2; \\ \psi_j^i(x^j) - y_j &\geq \varphi_j^i(x^j) - y_j \quad \forall x^j \in \Omega_j^i, \quad \forall i \in i_3, \end{aligned}$$

то все слагаемые второй и третьей сумм в правой части (21) положительны. При помощи рассуждений, аналогичных проведенным в случае выпуклой области Ω , получаем, что все слагаемые первой суммы в правой части (21) также положительны.

Итак, $I_j''(y_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, следовательно, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – точка минимума функции $I(y)$. Таким образом, доказана

Лемма 2. Пусть ограниченная область Ω представима в виде $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega^i$, где области Ω^i , ($i = 1, 2, \dots, n$) являются выпуклыми. Тогда функция $I(y)$ в \mathbb{R}^n имеет точку минимума $s = (s_1, \dots, s_n)$, которая определяется из системы (20).

3. Вспомогательные леммы и их доказательства

В дальнейшем нам понадобится следующая известная (см. например, [7])

Лемма 3. Пусть P, P_0, P_1 – ограниченные области в \mathbb{R}^n , F – положительный однородный первой степени функционал, то есть

$$F(sP) = sF(P) \quad \forall s > 0,$$

является квазивогнутым:

$$F(P_t) \geq \min(F(P_0), F(P_1)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Тогда он вогнут, то есть

$$F(P_t) \geq (1-t)F(P_0) + tF(P_1) \quad \forall t \in [0, 1],$$

где $P_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in P_0, z_1 \in P_1\}$, $0 \leq t \leq 1$.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится ряд вспомогательных результатов, которые установим ниже.

Пусть E – гиперплоскость размерности $n - 1$, содержащая начало координат $O \in \mathbb{R}^n$, u – нормированный вектор с началом в точке O , ортогональный E . Гиперплоскость E разбивает \mathbb{R}^n на два полупространства:

$$H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, u) \geq 0\}, \quad H_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, u) \leq 0\},$$

где (x, u) – скалярное произведение векторов x, u в \mathbb{R}^n .

Пусть Ω – ограниченная область, полностью лежащая в полупространстве H_+ . Определим функционал

$$J_+(k, \Omega) = \alpha \int_{\Omega} |E, z|^k dz, \quad (22)$$

где $k \in (0, +\infty)$, $\alpha > 0$ – произвольные действительные числа, $|E, z|$ – расстояние между точкой $z \in \Omega$ и гиперплоскостью E .

Справедлива

Лемма 4. Пусть $\Omega_0, \Omega_1 \in H_+$ – ограниченные области в \mathbb{R}^n . Тогда функционал $J_+(k, \Omega)^{1/(n+k)}$ вогнут, то есть

$$J_+(k, \Omega_t)^{1/(n+k)} \geq (1-t)J_+(k, \Omega_0)^{1/(n+k)} + tJ_+(k, \Omega_1)^{1/(n+k)}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k \in (0, +\infty). \quad (23)$$

Доказательство. Пусть $\Omega_t = \{z_t = (1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ – сумма Минковского областей $(1-t)\Omega_0$ и $t\Omega_1$. Заметим, что $\Omega_t \in H_+$ и имеет место равенство

$$|E, z_t| = (1-t)|E, z_0| + t|E, z_1|. \quad (24)$$

Применим к (24) неравенство о среднем, после чего обе части возведем в степень k . Получим

$$|E, z_t|^k \geq |E, z_0|^{k(1-t)} \cdot |E, z_1|^{tk}. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$h(z) = \alpha |E, z|^k \chi_{\Omega_t}^k(z), \quad f_0(z) = \alpha |E, z|^k \chi_{\Omega_0}^k(z), \quad f_1(z) = \alpha |E, z|^k \chi_{\Omega_1}^k(z),$$

где $\chi_{\Omega}(z)$ – характеристическая функция области Ω . Тогда, используя (25) и известное неравенство для характеристических функций

$$\chi_{\Omega_t}(z_t) \geq [\chi_{\Omega_0}(z_0)]^{1-t} [\chi_{\Omega_1}(z_1)]^t,$$

получим

$$\begin{aligned} h(z_t) &= \alpha |E, z_t|^k \chi_{\Omega_t}^k(z_t) \geq \\ &\geq \alpha^{1-t} [|E, z_0| \chi_{\Omega_0}(z_0)]^{k(1-t)} \cdot \alpha^t [|E, z_1| \chi_{\Omega_1}(z_1)]^{kt} = f_0^{1-t}(z_0) \cdot f_1^t(z_1), \end{aligned}$$

то есть выполняется условие (2) теоремы 1. Следовательно,

$$J_+(k, \Omega_t) \geq J_+^{1-t}(k, \Omega_0) \cdot J_+^t(k, \Omega_1) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Обозначим $F(\Omega) = [J_+(k, \Omega)]^{1/(n+k)}$. Заметим, что функционал $F(\Omega)$ квазивогнут. Действительно, в силу (25) для $F(\Omega)$ получим

$$F(\Omega_t) \geq F^{1-t}(\Omega_0) \cdot F^t(\Omega_1) \quad \forall t \in [0, 1],$$

то есть функционал $F(\Omega)$ логарифмически вогнут. Поэтому $F(\Omega)$ квазивогнут, то есть

$$F(\Omega_t) \geq \min(F(\Omega_0), F(\Omega_1)).$$

Кроме того,

$$J_+(k, \lambda\Omega) = \lambda^{k+n} \int_{\Omega} |E, z|^k dz,$$

а значит, $J_+(k, \Omega)$ – однородный функционал степени $k+n$. Следовательно, $F(\Omega)$ – однородный функционал первой степени. Таким образом, все условия леммы 3 выполнены, поэтому функционал $F(\Omega)$ вогнут, то есть справедливо неравенство (23). Лемма (4) доказана. \square

Определим функционал

$$J_-(k, \Omega) = \alpha \int_{\Omega} |E, z|^k dz, \quad k \in (0, +\infty), \quad (26)$$

где Ω – ограниченная область, полностью лежащая в полупространстве H_- . Справедлива

Лемма 5. Пусть $\Omega_0, \Omega_1 \in H_-$ – ограниченные области в \mathbb{R}^n . Тогда функционал $J_-(k, \Omega)^{1/(n+k)}$ вогнут, то есть имеет место неравенство

$$\begin{aligned} J_-(k, \Omega_t)^{1/(n+k)} &\geq \\ &\geq (1-t)J_-(k, \Omega_0)^{1/(n+k)} + tJ_-(k, \Omega_1)^{1/(n+k)}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad k \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 4.

Далее, пусть Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n , $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – произвольно фиксированная точка в \mathbb{R}^n , $E(y)$ – произвольно фиксированная гиперплоскость размерности $n-1$, проходящая через точку y . Введем функцию переменных y_1, y_2, \dots, y_n :

$$J(y) = \alpha \int_{\Omega} |E(y), z|^k dz, \quad k \in (0, +\infty), \quad \alpha > 0.$$

Предположим, что существует точка минимума y_{\min} функции $J(y)$. Определим функционал области Ω

$$J(k, \Omega) = \alpha \int_{\Omega} |E(y_{\min}), z|^k dz, \quad k \in (0, +\infty), \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что функционал $J(k, \Omega)$ является инвариантным относительно переноса, то есть $J(k, \Omega) = J(k, \tilde{\Omega})$, где Ω и $\tilde{\Omega}$ совпадают с точностью до переноса. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, далее считаем, что точка y_{\min} совпадает с началом координат O . В этом случае гиперплоскость $E(0)$ будем обозначать через E_{Ω} , так что для функционала имеем представление

$$J(k, \Omega) \equiv J(k, \Omega; E_{\Omega}) = \alpha \int_{\Omega} |E_{\Omega}, z|^k dz, \quad k \in (0, +\infty), \quad \alpha > 0. \quad (27)$$

Гиперплоскость E_Ω разбивает область Ω на две части: $\Omega_+ = \Omega \cap H_+$ и $\Omega_- = \Omega \cap H_-$. Определим функционалы $J_+(k, \Omega; E_\Omega)$ и $J_-(k, \Omega; E_\Omega)$ по формулам

$$J_+(k, \Omega; E_\Omega) = J_+(k, \Omega_+), \quad J_-(k, \Omega; E_\Omega) = J_-(k, \Omega_-),$$

где $J_+(k, \Omega_+)$, $J_-(k, \Omega_-)$ заданы соотношениями (22), (26), в которых $E = E_\Omega$. Тогда функционал $J(k, \Omega; E_\Omega)$ в (27) можно представить в виде

$$J(k, \Omega; E_\Omega) = J_+(k, \Omega; E_\Omega) + J_-(k, \Omega; E_\Omega). \quad (28)$$

Справедлива

Лемма 6. Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в \mathbb{R}^n . Тогда функционал $[J(k, \Omega; E_\Omega)]^{1/(n+k)}$ вогнут, то есть

$$[J(k, \Omega_t; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} \geq (1-t)[J(k, \Omega_0; E_{\Omega_0})]^{1/(n+k)} + t[J(k, \Omega_1; E_{\Omega_1})]^{1/(n+k)},$$

где $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть u – нормированный вектор, ортогональный гиперплоскости E_{Ω_t} . Отметим, что гиперплоскость E_{Ω_t} по определению проходит через начало координат, которое является точкой минимума функционала $J(k, \Omega_t; E_{\Omega_t})$. Определим новые области $\Omega_0^\tau, \Omega_1^\tau$ так, что точки $z_0^\tau \in \Omega_0^\tau$ и $z_1^\tau \in \Omega_1^\tau$ будут вычисляться по точкам $z_0 \in \Omega_0$ и $z_1 \in \Omega_1$ согласно формулам

$$z_0^\tau = z_0 + t\tau u, \quad z_1^\tau = z_1 - (1-t)\tau u.$$

Легко видеть, что $(1-t)z_0^\tau + tz_1^\tau = z_t$, поэтому $\Omega_t = (1-t)\Omega_0^\tau + t\Omega_1^\tau$. Введем вспомогательные функции

$$\xi(\tau) = \frac{J_+(k, \Omega_0^\tau; E_{\Omega_t})}{J_-(k, \Omega_0^\tau; E_{\Omega_t})}, \quad \eta(\tau) = \frac{J_+(k, \Omega_1^\tau; E_{\Omega_t})}{J_-(k, \Omega_1^\tau; E_{\Omega_t})}. \quad (29)$$

Функции $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ будем рассматривать на конечном интервале (α_0, α_1) , где α_0 – достаточно малое отрицательное, α_1 – достаточно большое положительное числа. Легко видеть, что на (α_0, α_1) функция $\xi(\tau)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, а функция $\eta(\tau)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. При достаточно малых отрицательных τ ($\alpha_0 < \tau < \beta_0$) получаем, что $\xi(\tau) = 0$, $\eta(\tau) = +\infty$, а при достаточно больших положительных τ ($\beta_1 < \tau < \alpha_1$) имеем $\xi(\tau) = +\infty$, $\eta(\tau) = 0$. Тогда, принимая во внимание свойства монотонных и непрерывных функций, получаем, что существует точка $\tau_0 \in (\alpha_0, \alpha_1)$ такая, что

$$\xi(\tau_0) = \eta(\tau_0) = \zeta, \quad 0 < \zeta \neq \infty.$$

Так как рассматриваемые нами функционалы инвариантны относительно переноса, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $\tau_0 = 0$, а значит, $\Omega_0^{\tau_0} = \Omega_0$, $\Omega_1^{\tau_0} = \Omega_1$. Следовательно, из (29) будем иметь

$$J_+(k, \Omega_0; E_{\Omega_t}) = \zeta J_-(k, \Omega_0; E_{\Omega_t}), \quad J_+(k, \Omega_1; E_{\Omega_t}) = \zeta J_-(k, \Omega_1; E_{\Omega_t}). \quad (30)$$

Заметим, что $(1-t)\Omega_{0+} + t\Omega_{1+} \subset \Omega_{t+}$, $(1-t)\Omega_{0-} + t\Omega_{1-} \subset \Omega_{t-}$. Отсюда, используя леммы 4, 5, получаем

$$\begin{aligned} [J_+(k, \Omega_t; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} &\geq \\ &\geq (1-t)[J_+(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J_+(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)}, \\ [J_-(k, \Omega_t; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} &\geq \\ &\geq (1-t)[J_-(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J_-(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда из (28) с учетом (31) получим

$$J(k, \Omega_t; E_{\Omega_t}) \geq \left((1-t)[J_+(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J_+(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} \right)^{n+k} + \left((1-t)[J_-(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J_-(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} \right)^{n+k},$$

откуда в силу (30)

$$J(k, \Omega_t; E_{\Omega_t}) \geq (1+\zeta) \left((1-t)[J_-(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J_-(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} \right)^{n+k}.$$

Следовательно, возводя обе части этого неравенства в степень $1/(n+k)$, будем иметь

$$\begin{aligned} [J(k, \Omega_t; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} &\geq \\ &\geq (1+\zeta)^{1/(n+k)} \left((1-t)[J_-(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J_-(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} \right) = \\ &= (1-t)[J_+(k, \Omega_0; E_{\Omega_t}) + J_-(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + \\ &\quad + t[J_+(k, \Omega_1; E_{\Omega_t}) + J_-(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} = \\ &= (1-t)[J(k, \Omega_0; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)} + t[J(k, \Omega_1; E_{\Omega_t})]^{1/(n+k)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Но по построению для функционалов $J(k, \Omega; E_{\Omega})$ имеем неравенства

$$J(k, \Omega_0; E_{\Omega_t}) \geq J(k, \Omega_0; E_{\Omega_0}), \quad J(k, \Omega_1; E_{\Omega_t}) \geq J(k, \Omega_1; E_{\Omega_1}). \quad (33)$$

Тогда из (32) с учетом (33) сразу получим утверждение леммы. \square

4. Доказательство основного результата

Без ограничения общности рассуждений будем считать, что точка минимума $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ функционала $I(k, \Omega)$ совпадает с началом координат O . Через E_j обозначим гиперплоскость $x_j = 0$. Пусть u_j – нормированный вектор с началом в O , ортогональный E_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Введем функционалы

$$J_j(k, \Omega) = \alpha_j \int_{\Omega} |E_j, z|^k dz, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k \in (1, +\infty). \quad (34)$$

Заметим, что $|E_j, z| = |x_j|$, следовательно,

$$J_j(k, \Omega) = \alpha_j \int_{\Omega} |x_j|^k dx, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда для функционала $I(k, \Omega)$, определенного формулой (4), получим представление

$$I(k, \Omega) = \sum_{j=1}^n J_j(k, \Omega). \quad (35)$$

Покажем, что для доказательства неравенства (5) достаточно того, что из условия

$$I(k, \Omega_0) = I(k, \Omega_1) = 1 \quad (36)$$

следует

$$I(k, \Omega_t) \geq 1 \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (37)$$

Действительно, пусть имеет место (37), то есть $I(k, (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1) \geq 1$ для всех $t \in [0, 1]$. В силу (36) последнее неравенство можно записать в виде

$$I\left(k, (1-t)\frac{\Omega_0}{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0)} + t\frac{\Omega_1}{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1)}\right) \geq 1. \quad (38)$$

Положим

$$t = \frac{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1)}{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0) + I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1)}.$$

Тогда

$$1-t = \frac{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0)}{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0) + I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1)}.$$

Поэтому из (38) получаем

$$I\left(k, \frac{\Omega_0 + \Omega_1}{I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0) + I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1)}\right) \geq 1.$$

Отсюда с учетом того, что $I(k, \Omega)$ – однородный функционал степени $n+k$, имеем

$$I(k, \Omega_0 + \Omega_1) \geq \left(I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0) + I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1)\right)^{n+k},$$

то есть

$$I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0 + \Omega_1) \geq I^{1/(n+k)}(k, \Omega_0) + I^{1/(n+k)}(k, \Omega_1). \quad (39)$$

Теперь в (39) область Ω_0 заменим на $(1-t)\Omega_0$, а Ω_1 – на $t\Omega_1$. В результате получим неравенство (5).

Итак, докажем неравенство (37). Для этого функционалы $J_j(k, \Omega)$, заданные с помощью формул (34), будем рассматривать как функции от векторов u_j . Введем функции $f(u_j) = J_j(k, \Omega_0) - J_j(k, \Omega_1)$, $j = 1, 2, \dots, n$, являющиеся непрерывными на единичной сфере. Тогда, используя теорему о непрерывных функциях на сферах, получаем, что существуют попарно ортогональные вектора u_j , $j = 1, 2, \dots, n$, такие, что $f(u_1) = f(u_2) = \dots = f(u_n)$. Принимая во внимание соотношения (35) и (36), получим

$$\sum_{j=1}^n f(u_j) = \sum_{j=1}^n [J_j(k, \Omega_0) - J_j(k, \Omega_1)] = I(k, \Omega_0) - I(k, \Omega_1) = 0,$$

откуда вытекает, что $f(u_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, следовательно,

$$J_j(k, \Omega_0) = J_j(k, \Omega_1), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (40)$$

Заметим, что функционалы $J_j(k, \Omega)$, $j = 1, 2, \dots, n$, $k \in (1, +\infty)$, в (34) имеют ту же структуру, что и функционал $J(k, \Omega, E_\Omega)$ в лемме 6. Следовательно, для них справедливы неравенства

$$J_j^{1/(n+k)}(k, \Omega_t) \geq (1-t)J_j^{1/(n+k)}(k, \Omega_0) + tJ_j^{1/(n+k)}(k, \Omega_1), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \in [0, 1],$$

откуда с учетом (40) получаем

$$J_j(k, \Omega_t) \geq J_j(k, \Omega_0), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Суммируя обе части последних неравенств по j , приходим к неравенству (37). Теорема 3 доказана.

5. Частные случаи функционала $I(k, \Omega)$

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда точку минимума $s = (s_1, \dots, s_n)$ функционала $I(k, \Omega)$ удастся определить в явном виде.

1. Пусть $k = 2$. Тогда из представлений (11) следует, что $H(s_j; x; 2) = 1$. Следовательно, как видно из (20), точка минимума s совпадает с центром масс области Ω , и получаем функционал, рассмотренный Х. Хадвигером в [2].

2. Пусть $k \in (0, +\infty)$ – произвольное число; $\varphi_j = c_j = \text{const}$, $\psi_j = d_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n$, то есть Ω – n -мерный параллелепипед. Тогда из (11) вытекает, что $h(|s_j - \varphi_j|; |\psi_j - s_j|; k) = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и формулы (13) примут вид

$$s_j = \frac{\int_{\Omega} x_j dx}{\int_{\Omega} dx}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

то есть точка минимума s также совпадает с центром масс параллелепипеда. Вычисляя интегралы, будем иметь

$$s_j = \frac{c_j + d_j}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

3. Пусть $n = 2$, $k = 3$, Ω – треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. В этом случае система (7) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{1-y_1} dx_2 \left(\int_0^{y_1} (y_1 - x_1)(x_1 - y_1) dx_1 + \int_{y_1}^{1-x_2} (x_1 - y_1)^2 dx_1 \right) + \\ & \quad + \int_{1-y_1}^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} (y_1 - x_1)(x_1 - y_1) dx_1 = 0, \\ & \int_0^{1-y_2} dx_1 \left(\int_0^{y_2} (y_2 - x_2)(x_2 - y_2) dx_2 + \int_{y_2}^{1-x_1} (x_2 - y_2)^2 dx_2 \right) + \\ & \quad + \int_{1-y_2}^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} (y_2 - x_2)(x_2 - y_2) dx_2 = 0, \end{aligned}$$

которая после вычисления интегралов преобразуется к виду

$$2y_j^4 - 8y_j^3 + 6y_j^2 - 4y_j + 1 = 0, \quad j = 1, 2.$$

Эта система уравнений имеет решение $y_1 = y_2 \approx 0.359$, которое является точкой минимума.

Центр масс треугольника имеет координаты $(1/3; 1/3)$, то есть точка минимума $(0.359; 0.359)$ не совпадает с центром масс.

4. Пусть $n = 2$, $k = 3$, Ω – круг: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Система (7) после несложных преобразований запишется в виде

$$\int_{-1}^1 \left(3y_1^2 \sqrt{1-x_2^2} + (1-x_2^2)^{3/2} \right) dx_2 + \int_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} \left(y_1 - \sqrt{1-x_2^2} \right)^3 dx_2 = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \left(3y_2^2 \sqrt{1-x_1^2} + (1-x_1^2)^{3/2} \right) dx_1 + \int_{-\sqrt{1-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_2^2}} \left(y_2 - \sqrt{1-x_1^2} \right)^3 dx_1 = 0.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $y_1 = y_2 = 0$ является решением этой системы. Для центра масс круга также получаем $(0, 0)$, то есть точка минимума совпадает с центром масс.

Благодарности. Выражаю благодарность своему научному руководителю Ф.Г. Авхадиеву за постановку задачи и ценные указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351).

Литература

1. *Lusternik L.A.* Die Brunn–Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen // C. R. Acad. Sci. URSS. – 1935. – V. 8. – P. 55–58.
2. *Hadwiger H.* Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285–296.
3. *Prékopa A.* Logarithmic concave measures with application to stochastic programming // Acta Sci. Math. – 1971. – V. 32. – P. 301–316.
4. *Leindler L.* On a certain converse of Hölder’s inequality II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1972. – V. 33. – P. 217–223.
5. *Brascamp H.J., Lieb E.H.* On extensions of the Brunn–Minkowski and Prékopa–Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation // J. Funct. Anal. – 1976. – V. 22, No 4. – P. 366–389.
6. *Borell C.* Diffusion equations and geometric inequalities // Potential Anal. – 2000. – V. 12, No 1. – P. 49–71.
7. *Gardner R.J.* The Brunn–Minkowski inequality // Bull. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 39, No 1. – P. 355–405.
8. *Barthe F.* The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities // Proc. Int. Congress of Mathematicians Madrid, Spain, 2006. – Eur. Math. Soc., 2006. – V. 2. – P. 1529–1546.
9. *Keady G.* On a Brunn–Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2007. – V. 8, No 2. – Art. 33, P. 1–4.
10. *Авхадиев Ф.Г.* Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3–12.
11. *Авхадиев Ф.Г., Тимергалиев Б.С.* Неравенства типа Брунна–Минковского для конформных и евклидовых моментов областей // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 5. – С. 64–67.
12. *Figalli A., Maggi F., Pratelli A.* A refined Brunn–Minkowski inequality for convex sets // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. – 2009. – V. 26, No 6. – P. 2511–2519.
13. *Gardner R.J., Zvavitch A.* Gaussian Brunn–Minkowski inequalities // Trans. Amer. Math. Soc. – 2010. – V. 362, No 10. – P. 5333–5353.
14. *Lv S.* Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences // Geom. Dedicata. – 2010. – V. 145, No 1. – P. 169–180.
15. *Yamabe H., Yujobo Z.* On the continuous function defined on a sphere // Osaka Math. J. – 1950. – V. 2, No 1. – P. 19–22.

Поступила в редакцию
25.08.15

Тимергалиев Булат Саматович, аспирант кафедры теории функций и приближений
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *timergalievbs@mail.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 90–105

**Generalization of the Brunn–Minkowski Inequality
in the Form of Hadwiger**

B.S. Timergaliev

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *timergalievbs@mail.ru*

Received August 17, 2015

Abstract

A class of domain functionals has been built in the Euclidean space. The Brunn–Minkowski type of inequality has been applied to the said class and proved for it. Functional building has been performed using the point of minimum of function of n variables bound with functionals, proof of existence of which is the important part of the proposed research. We have introduced special cases of functionals for which the point of minimum can be found explicitly. The resulting Brunn–Minkowski type of inequality generalizes the corresponding inequality for moments of inertia in relation to the center of mass and hyperplanes proven by H. Hadwiger. It is worth mentioning that the point of minimum of functional in general case does not coincide with the center of mass. Coincidence occurs only in special cases, which is proven by the particular examples in this study.

Keywords: Brunn–Minkowski inequality, Prékopa–Leindler inequality, concave functional, convex domain

Acknowledgments. I thank F.G. Avkhadiev, my scientific supervisor, for formulation of the problem and valuable advice.

The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-00351).

References

1. Lusternik L.A. Die Brunn–Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen. *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS*, 1935, vol. 8, pp. 55–58.
2. Hadwiger H. Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente. *Comment. Math. Helv.*, 1956, vol. 30, pp. 285–296.
3. Prékopa A. Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. *Acta Sci. Math.*, 1971, vol. 32, pp. 301–316.
4. Leindler L. On a certain converse of Hölder’s inequality II. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1972, vol. 33, pp. 217–223.

5. Brascamp H.J., Lieb E.H. On extensions of the Brunn–Minkowski and Prékopa–Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation. *J. Funct. Anal.*, 1976, vol. 22, no. 4, pp. 366–389.
6. Borell C. Diffusion equations and geometric inequalities. *Potential Anal.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 49–71.
7. Gardner R.J. The Brunn–Minkowski inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2002, vol. 39, no. 1, pp. 355–405.
8. Barthe F. The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities. *Proc. Int. Congress of Mathematicians*, Madrid (Spain), 2006, pp. 1529–1546.
9. Keady G. On a Brunn–Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 2007, vol. 8, no. 2, art. 33, pp. 1–4.
10. Avkhadiev F.G. Solution of the generalized Saint Venant problem. *Mat. Sb.*, 1998, no. 12, pp. 3–12. (In Russian)
11. Avkhadiev F.G. , Timergaliev B.S. Brunn–Minkowski type inequalities for conformal and Euclidean moments of domains, *Izv. VUZov Mat.*, 2014, no. 5, pp. 64–67. (In Russian)
12. Figalli A., Maggi F., Pratelli A. A refined Brunn–Minkowski inequality for convex sets. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2009, vol. 26, no. 6. pp. 2511–2519.
13. Gardner R.J., Zvavitch A. Gaussian Brunn–Minkowski inequalities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2010, vol. 362, no. 10, pp. 5333–5353.
14. Lv S. Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences. *Geom. Dedicata*, 2010, vol. 145, no. 1, pp. 169–180.
15. Yamabe H., Yujobo Z. On the continuous function defined on a sphere. *Osaka Math. J.*, 1950, vol. 2, no. 1, pp. 19–22.

⟨ **Для цитирования:** Тимергалиев Б.С. Неравенство типа Брунна – Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 90–105. ⟩

⟨ **For citation:** Timergaliev B.S. Generalization of the Brunn–Minkowski type inequality in the form of Hadwiger. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 90–105. (In Russian) ⟩