МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Направление: 050201.65 - математика и английский язык

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Дипломная работа)

λ-матрицы и их спектральные свойства

Работа завершена:
Студент 05-905 группы
«___»_________ 2014 г. ______________________(Т.Д. Бочкарева)
Работа допущена к защите:
Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
«___»_________ 2014 г. ________________________(А.Н Фролов)
Заведующий кафедрой
доктор ф.-м. н., профессор ______________________(Ю.Г. Игнатьев)

Казань - 2014 г.

Содержание

Введение

Данная работа посвящена изучению λ-*матриц* и ее спектральным свойствам.

Целью данной работы является изучение основных понятий λ-*матриц,* спектральных свойств и применение многочленов от матриц для решения систем рекуррентных уравнений.

Практическая значимость – устанавливается связь между элементами полной спектральной структуры λ-матриц (т.е. ее элементарными делителями, жордановыми цепочками векторов, минимальными индексами и полиномиальными решениями) и матрицами, участвующими в преобразовании ее к канонической форме Смита. А также λ-матрицы могут быть использованы для нахождения собственных значений и собственных векторов, решений линейных уравнений, нахождения определителя матрицы и вычисления аналитических функций от матриц.

Глава 1. Основные сведения

1.1. Определение и элементарные преобразования

<u>Определение 1.</u> λ-матрицей или многочленной матрицей называется прямоугольная матрица $A(\lambda)$, элементы которой суть многочлены от λ:

$$A(\lambda) = \left\| a_{ik}(\lambda) \right\| = \left\| a_{ik}^{(0)} \lambda^{l} + a_{ik}^{(1)} \lambda^{l-1} + \ldots + a_{ik}^{(l)} \right\| \qquad (1)$$

$\begin{pmatrix} i = 1,2,\ldots,m \\ k = 1,2,\ldots,n \end{pmatrix}$, здесь l – наибольшая из степеней многочленов $a_{ik}(\lambda)$.

Полагая, $A_j = \left\| a_{ik}^{(j)} \right\|$, где $j = 0,1,\ldots,l$, мы можем представить данную матрицу с матричными коэффициентами от λ:

$$A(\lambda) = A_0 \lambda^{l} + A_1 \lambda^{l-1} + \ldots + A_{l-1} \lambda + A_l. \qquad (2)$$

<u>Элементарные операции.</u> Введем три элементарные операции над многочленной матрицей:

1) Умножение *i-ой* строки на число $c \neq 0$.

2) Прибавление к *i-ой* строке *j-ую* строку, предварительно умноженную на многочлен $b(\lambda)$.

3) Перестановка местами *i-ой* и *j-ой* строк.[1]

Проверим, равносильны ли данные операции умножению многочленной матрицы $A(\lambda)$ слева соответственно на квадратные матрицы порядка m такого вида:

$$S' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (i) & & \\ & & \vdots & & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & c & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array} \right\| \end{array} \qquad S'' = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & (j) & & \\ & & & & \vdots & & \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \cdots & b(\lambda) & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} \\ \\ \cdots(i) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$S''' = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & (i) & & (j) & & \end{matrix} \\ \begin{Vmatrix} & & \vdots & & \vdots & & \\ 1 & & \vdots & & \vdots & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{Vmatrix} \end{array} \qquad (3)$$

Докажем 1).

Даны матрицы $A(\lambda)$ и S' порядка m = 3.

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{Vmatrix} \ и \ S' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Перемножим S' и $A(\lambda)$ слева.

$$S' A(\lambda) = \begin{Vmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & c \cdot a_{22}(\lambda) & a_{23}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & a_{32}(\lambda) & a_{33}(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

Так как умножение было произведено слева, то данные операции называются левыми элементарными операциями.

Аналогично определяются правые элементарные операции (эти операции производятся над столбцами многочленной матрицы). Их порядок равен n. Выглядят таким образом:

$$T' = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & c & \dots & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \dots(i) \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array} \quad T'' = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & b(\lambda) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \dots(i) \\ \\ \dots(j) \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$T''' = \left\| \begin{matrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \dots(i) \\ \\ \dots(j) \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (4)$$

Данные матрицы типа (3) и (4) называются элементарными матрицами.

Можем утверждать, что некоторая матрица *B(λ)* может быть получена путем преобразования матрицы *A(λ)* левыми элементарными операциями, и наоборот, матрица *B(λ)* из *A(λ),* так как определитель любой элементарной матрицы отличен от *λ* и не равен нулю.

<u>Определение 2.</u> Две многочленные матрицы *A(λ)* и *B(λ)* называются

1) левоэквивалентными,
2) правоэквивалентными,
3) эквивалентными,

если одна из них получается из другой путем применения соответственно

1) левых элементарных операций,
2) правых элементарных операций,
3) левых и правых элементарных операций.

Допустим, что матрица *A(λ)* получается из *B(λ)* при помощи правых элементарных операций, соответствующих матрицам $T_1, T_2, ..., T_p$. Тогда

$$B(\lambda) = A(\lambda) T_1 T_2 ... T_{p-1} T_p. \qquad (5)$$

Пусть $Q(\lambda) = T_1 T_2 \dots T_p$, и равенство (5) запишем в виде

$$B(\lambda) = A(\lambda) Q(\lambda), \qquad (6)$$

где *Q(λ)* имеет отличный от нуля определитель как и каждая из матриц $T_1, T_2, ..., T_p$.

В случае левой эквивалентности многочленных матриц *A(λ)* и *B(λ)* вместо равенства (6) будем иметь равенство $B(\lambda) = P(\lambda) A(\lambda)$, а в случае эквивалентности – равенство $B(\lambda) = P(\lambda) A(\lambda) Q(\lambda)$.

Мы можем заменить определение 1 равносильным определением:

<u>Определение 3.</u> Две прямоугольные λ-матрицы *A(λ) и B(λ)* называются

1) левоэквивалентными,
2) правоэквивалентными,
3) эквивалентными,

если соответственно

1) $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)$,

2) $B(\lambda) = A(\lambda)Q(\lambda)$,

3) $B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$,

где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ – многочленные квадратные матрицы с постоянными и отличными от нуля определителями.[1]

1.2. Обратные λ-матрицы

<u>Определение 4.</u> *Транспонированной для λ-матрицы* $A(\lambda)$ называется λ-матрица $C(\lambda)$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij}(\lambda) = a_{ji}(\lambda) \ (i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,..,n). \tag{7}$$

Она обозначается $A^T(\lambda)$.

Транспонируя выражение $A(\lambda) = A_l \lambda^l + A_{l-1} \lambda^{l-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$, получаем представление транспонированной λ-матрицы в виде многочлена

$$A^T(\lambda) = A_l^T \lambda^l + A_{l-1}^T \lambda^{l-1} + \dots + A_1^T \lambda + A_0^T \tag{8}$$

Для нахождения определителя λ-матрицы используются те же правила и свойства, что и для числовых матриц, поскольку λ-матрица при фиксированном значении λ становится числовой. Заметим, что определитель λ-матрицы, ее миноры и алгебраические дополнения представляют собой многочлены переменной λ.

<u>Определение 5.</u> *Рангом λ-матрицы* называется максимальный порядок минора, не равного тождественно нулю, т.е. $rgA(\lambda) = r$, если в матрице $A(\lambda)$ имеется отличный от нуля минор *r-го* порядка, а все миноры большего порядка тождественно равны нулю или не существуют.

Присоединенная λ-матрица $A^+(\lambda)$, транспонированная для матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы $A(\lambda)$, представляет собой λ-матрицу, причем, как и ранее, справедливо равенство

$$A(\lambda) \cdot A^+(\lambda) = A^+(\lambda) \cdot A(\lambda) = \det A(\lambda) \cdot E, \tag{9}$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица $A(\lambda)$.

Действительно, докажем, что $A(\lambda)A^+(\lambda) = \det A(\lambda) \cdot E$, используя следствие основной теоремы алгебры: *λ-матрицы* $A(\lambda)$ *и* $B(\lambda)$, *степень которых не превосходит* m, *равны тогда и только тогда, когда равны числовые матрицы* $A(\lambda_i) = B(\lambda_i)$ *при (m+1) различных значениях* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ *переменной λ.*

Пусть степени левой и правой частей не превосходят m. Возьмем *(m+1)* различных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m, \lambda_{m+1}$. Для любого из них имеет место равенство

$$A(\lambda_i)\cdot A^+(\lambda)=\det A(\lambda_i)\cdot E \qquad (i=1,2,\dots,m,m+1) \tag{10}$$

справедливое для числовых матриц. Следовательно, λ-матрицы в левой и правой частях доказываемого равенства совпадают. Аналогично можно доказать равенство $A^+(\lambda)\cdot A(\lambda)=\det A(\lambda)\cdot E$.

<u>Определение 6.</u> Обратной для квадратной λ-матрицы $A(\lambda)$ называется λ-матрица $A^{-1}(\lambda)$, если

$$A(\lambda)\cdot A^{-1}(\lambda)=A^{-1}(\lambda)\cdot A(\lambda)=E \tag{11}$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица $A(\lambda)$.

Необходимым и достаточным условием существования обратной λ-матрицы $A^{-1}(\lambda)$ является условие $\det A(\lambda)=const\neq 0$, т.е. определитель обращаемой λ-матрицы должен быть отличным от нуля многочленом нулевой степени (постоянной). Необходимость следует из (11). Действительно, имеем $\det A(\lambda)\cdot\det A^{-1}(\lambda)=1$, т.е. произведение двух многочленов (определителей λ-матриц) равно многочлену нулевой степени. Значит, оба множителя — постоянны (многочлены нулевой степени), поэтому $\det A(\lambda)=d, d\neq 0$. Достаточность условия $\det A(\lambda)=d\neq 0$ следует из теоремы о существовании и единственности обратной матрицы. Формула $A^{-1}(\lambda)=\dfrac{1}{\det A(\lambda)}\cdot A^+(\lambda)=\dfrac{1}{d}\cdot A^+(\lambda)$ действительно определяет λ-матрицу. В этом можно убедиться прямой подстановкой в (11) с учетом (10) найти обратную.

Матрица $A(\lambda)$, для которой существует обратная $A^{-1}(\lambda)$, называется обратимой.

<u>*Пример 1.*</u> Для λ-матрицы $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda-1\\ \lambda+1 & \lambda^2\end{pmatrix}$ найти обратную λ-матрицу.

Решение: Вычислим определитель данной матрицы $\det A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 1$.

Находим обратную λ-матрицу: $A^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda + 1 \\ -\lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$. Сделаем проверку:

$$A(\lambda) \cdot A^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda + 1 \\ -\lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(\lambda) \cdot A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda + 1 \\ -\lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соотношения (11), определяющие обратную матрицу, выполняются.

Ответ: $A^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & -\lambda + 1 \\ -\lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Делимость λ-матриц

Рассматривая λ-матрицы как многочлены (2) с матричными коэффициентами, можно ввести операцию деления многочлена на многочлен с остатком. Нам потребуется операция деления λ-матрицы на линейный двучлен вида $(A-\lambda E)$, где A — числовая матрица.

<u>Теорема 1</u> (о делимости λ-матриц на линейный двучлен). *Любую λ-матрицу* $P(\lambda)=P_m\lambda^m+...+P_1\lambda+P_0$ *можно разделить слева на линейный двучлен* $(A-\lambda E)$, *где* A *— числовая матрица того же порядка, что и* $P(\lambda)$, *т.е. существуют единственные λ-матрица* $Q_{left}(\lambda)$ *и числовая матрица* $R_{left}(\lambda)$ *такие, что* $P(\lambda)=(A-\lambda E)Q_{left}(\lambda)+R_{left}(\lambda)$, *где* $Q_{left}(\lambda)$ *— левое частное,* $R_{left}(\lambda)$ *— левый остаток.*

Доказательство этого утверждения проводится как для обычных многочленов, только при умножении нельзя изменять порядок множителей (в силу некоммутативности произведения матриц).

Аналогично определяется деление λ-матрицы $P(\lambda)$ справа на $(A-\lambda E)$: $P(\lambda)=Q_{right}(\lambda)(A-\lambda E)+R_{right}(\lambda)$. Частные и остатки при делении слева и справа в общем случае не совпадают: $Q_{left}(\lambda)\neq Q_{right}(\lambda)$, $R_{left}(\lambda)\neq R_{right}(\lambda)$. При делении с остатком левое частное $Q_{left}(\lambda)$ умножается слева на двучлен $(A-\lambda E)$, а правое частное $Q_{right}(\lambda)$ — справа.[2]

Многочлен с матричными коэффициентами можно записать двумя способами $P(\lambda)=P_m\lambda^m+...+P_1\lambda+P_0$ и $P(\lambda)=\lambda^m P_m+...+\lambda P_1+P_0$, которые, разумеется, при любом значении λ дают один и тот же результат. Если же вместо переменной λ подставить числовую квадратную матрицу A того же порядка, что и $P(\lambda)$, то получим, в общем случае, разные матрицы: $P_{right}(\lambda)=P_mA^m+\ldots+P_1A+P_0$ и $P_{left}(\lambda)=A^mP_m+\ldots+AP_1+P_0$, которые называются, соответственно, ***правым и левым значениями многочлена*** $P(\lambda)$ при подстановке матрицы A вместо λ. При вычислении правого значения $P_{right}(\lambda)$

матричные коэффициенты многочлена умножаются справа на матрицу A, а при вычислении левого значения $P_{left}(\lambda)$ — слева.

Подставляя в равенства $P(\lambda)=Q_{right}(\lambda)(A-\lambda E)+R_{right}$ и $P(\lambda)=(A-\lambda E)Q_{left}(\lambda)+R_{left}$ вместо переменной λ матрицу A, получаем $P_{right}(\lambda)=R_{right}$ и $P_{left}(\lambda)=R_{left}$

Теорема 2 (обобщенная теорема Безу). *Остаток от деления λ-матрицы $P(\lambda)$ слева (справа) на линейный двучлен $(A-\lambda E)$ равен левому значению $P_{left}(\lambda)$ (соответственно, правому значению $P_{right}(\lambda)$).*

Пример 2. Разделить λ-матрицу $P(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+1 & \lambda\\ 2 & \lambda-1\end{pmatrix}$ на матрицу $(A-\lambda E)$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

Решение: Запишем λ-матрицу $P(\lambda)$ как многочлен второй степени с матричными коэффициентами:

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+1 & \lambda\\ 2 & \lambda-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=P_2\lambda^2+P_1\lambda+P_0.$$

Разделим $P(\lambda)$ слева на $(A-\lambda E)$, повторяя, по существу, алгоритм деления «уголком». Прибавляя к $P(\lambda)$ многочлен $(A-\lambda E)P_2\lambda$, получаем λ-матрицу первой степени:

$$P_2\lambda^2+P_1\lambda+P_0+(A-\lambda E)\cdot P_2\lambda=(P_1+AP_2)\cdot\lambda+P_0=$$
$$=\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\lambda+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\lambda+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=P_1^{(1)}\cdot\lambda+P_0.$$

Продолжая процесс, прибавим к этому линейному двучлену выражение $(A-\lambda E)P_1^{(1)}$. В результате получим числовую матрицу (остаток):

$$P_1^{(1)}\cdot\lambda+P_0+(A-\lambda E)P_1^{(1)}=P_0+AP_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}=R.$$

Итак, $P(\lambda)+(A-\lambda E)P_2\lambda+(A-\lambda E)P_1^{(1)}=R$. Отсюда

$P(\lambda)=(A-\lambda E)Q_{left}(\lambda)+R_{left}$, где $Q_{left}(\lambda)=-P_2\lambda-P_1^{(1)}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\lambda-\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ — левое частное, а $R_{left} = R = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ — левый остаток.

Разделим $P(\lambda)$ справа на $(A - \lambda E)$. Прибавляя к $P(\lambda)$ многочлен $P_2(A - \lambda E)\lambda$, получаем λ-матрицу первой степени $P_1^{(2)} \cdot \lambda + P_0$, где $P_1^{(2)} = P_1 + P_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Затем к многочлену $P_1^{(2)} \cdot \lambda + P_0$ и получаем числовую матрицу R (остаток), равную $P_0 + P_1^{(2)} A$. Выполнив эти действия, имеем $P(\lambda) = Q_{right}(\lambda) \cdot (A - \lambda \cdot E) + R_{right}$, где $Q_{right}(\lambda) = -P_2\lambda - P_1^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — правое частное, $R_{right} = P_0 + P_1^{(2)} A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ — правый остаток.

Для проверки полученных результатов воспользуемся теоремой 2. Вычислим $P_{left}(A)$ и $P_{right}(A)$, подставив вместо переменной λ матрицу A

$$P_{right}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = R_{right};$$

$$P_{left}(A) = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = R_{left}.$$

<u>*Ответ:*</u> $Q_{left}(\lambda) = -P_2\lambda - P_1^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ — левое частное, а $R_{left} = R = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ — левый остаток, $Q_{right}(\lambda) = -P_2\lambda - P_1^{(2)} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — правое частное, $R_{right} = P_0 + P_1^{(2)} A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ — правый остаток.

<u>Замечания 1.</u>

1. Выясним связь операции транспонирования с вычислением правых и левых значений λ-матрицы. Пусть

$$P(\lambda) = P_m\lambda^m + P_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + P_1\lambda + P_0 \text{ и } P^T(\lambda) = P_m^T\lambda^m + P_{m-1}^T\lambda^{m-1} + \ldots + P_1^T\lambda + P_0^T.$$

Подставляя в эти многочлены вместо аргумента λ матрицы A и A^T, найдем значения

$$P_{left}(\lambda) = A^l P_l + A^{l-1} P_{l-1} + \ldots + AP_1 + P_0,$$
$$P_{right}(\lambda) = P_l^T (A^T)^l + P_{l-1}^T (A^T)^{l-1} + \ldots + P_1^T A^T + P_0^T.$$

Транспонируя матрицу $P_{left}(A)$, получаем

$[P_{left}(A)]^T = P_l^T (A^l)^T + \ldots + P_1^T A^T + P_0^T = P_{right}^T (A^T)$. Следовательно, $\left[P_{left}(A)\right]^T = P_{right}^T (A^T)$.

2. Если λ-матрица $P(\lambda)$ симметрическая: $P(\lambda) = P^T(\lambda)$, то $\left[P_{left}(A)\right]^T = P_{right}(A^T)$. Если, кроме того, матрица A симметрическая, то левое и правое значения λ-матрицы совпадают: $P_{left}(A) = P_{right}(A)$.

3. Если $P(\lambda)$ — обратимая λ-матрица, то ее остаток от деления на линейный двучлен $(A - \lambda E)$ также обратимая числовая матрица. В самом деле, пусть $P(\lambda) = Q_{right}(\lambda)(A - \lambda E) + R_{right}$, где $R_{right} = P_{right}(A)$ — правое значение многочлена $P(\lambda)$ при подстановке матрицы A вместо λ. Умножив $P(\lambda)$ справа на $P^{-1}(\lambda)$, получим. Подставим вместо λ матрицу A: $E = R_{right} P_{right}^{-1}(A) = R_{right} R_{right}^{-1}$ Следовательно, правый остаток R_{right} — обратимая числовая матрица. Для левого остатка аналогично получаем $P_{left}^{-1}(A) R_{left} = R_{left}^{-1} R_{left} = E$, т.е. левый остаток R_{left} — обратимая числовая матрица.[2]

1.4 Канонический вид и инвариантные многочлены λ-матриц

1) В данном пункте мы выясним, к какому виду можем привести многочленную матрицу путем преобразования только левых элементарных операций.

Пусть в первом столбце матрицы *A(λ)* имеются элементы, не равные тождественно нулю. Выберем среди них многочлен наименьшей степени и путем перестановки строк сделаем его элементом $a_{11}(\lambda)$. После этого разделим многочлен a_{i1} на $a_{11}(\lambda)$, частное и остаток обозначим через $q_{i1}(\lambda)$ и $r_{i1}(\lambda)$

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda) + r_{i1}(\lambda) \ \ (i = 2,\ldots,m).$$

Вычтем теперь из *i-ой* строки первую строку, предварительно умноженную на $q_{i1}(\lambda) \ \ (i = 2,\ldots,m)$. Если при этом не все остатки $r_{i1}(\lambda)$ равны тождественно нулю, то тот из них, который не равен нулю и имеет наименьшую степень и может быть поставлен на место $a_{11}(\lambda)$ путем перестановкой строк. В результате всех этих операций степень многочлена $a_{11}(\lambda)$ понизится.

Далее мы снова повторяем такую же процедуру. Так как степень многочлена $a_{11}(\lambda)$ конечна , то на некотором этапе эту процедуру уже нельзя будет продолжить, то есть на этом этапе все элементы $a_{21}(\lambda)$, $a_{31}(\lambda),\ldots,a_{m1}(\lambda)$ окажутся равными тождественно нулю.

Теперь возьмем элемент $a_{22}(\lambda)$ и применим ту же процедуру к строкам с номерами *2, 3,…,m.* Тогда добьемся того, что и $a_{32}(\lambda) = \ldots = a_{m2}(\lambda) = 0$. Продолжая таким образом, мы в конце концов приведем матрицу *A(λ)* к следующему виду:

$$\left\| \begin{matrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \ldots & b_{1m}(\lambda) & \ldots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \ldots & b_{2m}(\lambda) & \ldots & b_{2n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{mm}(\lambda) & \ldots & b_{mn}(\lambda) \\ & & (m & \leq & n) & \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \ldots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \ldots & b_{2n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn}(\lambda) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & (m & \geq & n) \end{matrix} \right\|. \qquad (12)$$

Если многочлен $b_{22}(\lambda)$ не равен тождественно нулю, то, применяя левую элементарную операцию второго типа, мы сделаем степень элемента $b_{12}(\lambda)$ меньшей, нежели степень $b_{22}(\lambda)$. Точно так же, если $b_{33}(\lambda) \neq 0$, то при помощи левых элементарных операций второго типа мы сделаем степени элементов $b_{13}(\lambda), b_{23}(\lambda)$ меньшими, нежели степень $b_{33}(\lambda)$, не изменив при этом элемента $b_{12}(\lambda)$, и т.д.

Справедливы следующие теоремы:

<u>Теорема 3.</u> *Произвольная прямоугольная многочленная матрица с размерами* $m \times n$ *при помощи левых элементарных операций всегда может быть приведена к виду (12), где многочлены* $b_{1k}(\lambda), b_{2k}(\lambda), ..., b_{k-1}(\lambda)$ *имеют меньшую степень, нежели* $b_{kk}(\lambda)$, *если только* $b_{kk}(\lambda) \neq 0$, *и все равны тождественно нулю, если* $b_{kk}(\lambda) = const \neq 0 \ \ (k = 2,3,\ldots,\min(m,n))$.

<u>Теорема 4.</u> *Произвольная прямоугольная многочленная матрица с размерами* $m \times n$ *при помощи правых элементарных операций всегда может быть приведена к виду*

$$\left\| \begin{matrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}(\lambda) & c_{m2}(\lambda) & \dots & c_{mm}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ & & (m & \le & n) & & \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(\lambda) & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}(\lambda) & c_{m2}(\lambda) & \dots & c_{mn}(\lambda) \\ & (m & \ge & n) \end{matrix} \right\|, \qquad (13)$$

где многочлены $c_{k1}(\lambda), c_{k2}(\lambda), ..., c_{k,k-1}(\lambda)$ *имеют меньшую степень, нежели* $c_{kk}(\lambda)$, *если только* $c_{kk}(\lambda) \neq 0$, *и все равны тождественно нулю, если* $c_{kk}(\lambda) = const \neq 0 \ \ (k = 2,3,\ldots,\min(m,n))$.

<u>Следствие 1.</u> *Если определитель квадратной многочленной матрицы P(λ) не зависит от λ и отличен от нуля, то эту матрицу можно представить в виде произведения конечного числа элементарных матриц.*

Теперь установим «канонический» вид, к которому можно привести прямоугольную матрицу *A(λ),* применяя к ней как левые, так и правые элементарные операции.

Среди всех не равных тождественно нулю элементов $a_{ik}(\lambda)$ матрицы *A(λ)* возьмем то элемент, который имеет наименьшую степень относительно *λ*, и путем соответствующей перестановки строк и столбцов сделаем его элементом $a_{11}(\lambda)$. После этого найдем частные и остатки от деления многочленов $a_{i1}(\lambda)$ и $a_{ik}(\lambda)$ на $a_{11}(\lambda)$:

$$a_{i1}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda) + r_{i1}(\lambda),\ a_{1k}(\lambda) = a_{11}(\lambda)q_{1k}(\lambda) + r_{1k}(\lambda)$$

$$(i = 2,3,\ldots,m; \quad k = 2,3,\ldots,n).$$

Если хотя бы один из остатков $r_{i1}(\lambda)$, $r_{1k}(\lambda)$ $(i = 2,3,\ldots,m; \quad k = 2,3,\ldots,n)$, например $r_{1k}(\lambda)$, не равен тождественно нулю, то, вычитая из k-го столбца первый столбец, предварительно помноженный на $q_{1k}(\lambda)$, мы заменим элемент $a_{1k}(\lambda)$ остатком $r_{1k}(\lambda)$, который имеет степень меньше, чем $a_{11}(\lambda)$. Тогда мы имеем возможность снова уменьшить степень элемента, стоящего в левом верхнем углу матрицы, поместив на это место элемент с наименьшей степенью относительно λ.

Если же все остатки $r_{21}(\lambda)$, …, $r_{m1}(\lambda)$; $r_{12}(\lambda)$, …, $r_{1n}(\lambda)$ равны тождественно нулю, то, вычитая из *i-й* строки первую помноженную предварительно на $q_{i1}(\lambda)$ $(i = 2,\ldots,m)$, а из k – го столбцы – первый, предварительно помноженный на $q_{1k}(\lambda)$ $(k = 2,\ldots,n)$, мы приведем нашу многочленную матрицу к виду

$$\begin{Vmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}(\lambda) & \ldots & a_{2n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}(\lambda) & \ldots & a_{mn}(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

Если при этом хотя бы один из элементов $a_{ik}(\lambda)$ $(i = 2,\ldots,m;\ k = 2,\ldots,n)$ не делится без остатка на $a_{11}(\lambda)$, то, прибавляя к первому столбцу тот столбец, который содержит этот элемент, мы приведем к предыдущему случаю и, следовательно, снова сможем заменить элемент $a_{11}(\lambda)$ многочленом меньшей степени.

Поскольку первоначальный элемент $a_{11}(\lambda)$ имел определенную степень и процедура уменьшения этой степени не может неограниченно продолжаться, то после конечного числа элементарных операций мы должны получить матрицу вида

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \dots & b_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) & \dots & b_{mn}(\lambda) \end{matrix} \right\|, \qquad (14)$$

в которой все элементы $b_{ik}(\lambda)$ делятся без остатка на $a_1(\lambda)$. Если среди этих элементов $b_{ik}(\lambda)$ имеются не равные тождественно нулю, то, продолжая тот же процесс приведения для строк с номерами *2, …, m* и столбцов с номерами *2, …, n,* мы матрицу (14) приведем к виду

$$\left\| \begin{matrix} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \dots & c_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{m3}(\lambda) & \dots & c_{mn}(\lambda) \end{matrix} \right\|,$$

где $a_2(\lambda)$ делится без остатка на $a_1(\lambda)$, а все многочлены $c_{ik}(\lambda)$ делятся без остатка на $a_2(\lambda)$. Продолжая этот процесс далее, мы в итоге придем к матрице вида

$$\left\| \begin{matrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_s(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad (15)$$

где многочлены $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ $(s \le m,n)$ не равны тождественно нулю и каждый из них делится без остатка на предыдущий.

Помножая первые s строк на соответствующие отличные от нуля числовые множители, мы сможем добиться того, чтобы старшие коэффициенты многочленов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ были равны единице.

Определение 7. Многочленная прямоугольная матрица называется канонической диагональной, если она имеет вид *(15),* где

1) многочлены $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ не равны тождественно нулю и

2) каждый из многочленов $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ делится без остатка на предыдущий. При этом предполагается, что старшие коэффициенты всех многочленов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ равны единице.

Таким образом, мы доказали, что произвольная прямоугольная многочленная матрица *A(λ)* эквивалентна некоторой канонической диагональной.[1]

2) Для начала введем понятие об инвариантных многочленах *λ*-матрицы *A(λ).*

Пусть многочленная матрица *A(λ)* имеет ранг *r*, то есть в этой матрице имеются не равные тождественно нулю миноры *r-го* порядка, в то время как все миноры порядка > *r* тождественно относительно *λ* равны нулю. Обозначим через $D_j(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров *j-го* порядка матрицы *A(λ)* (j=1,2,…,r). Тогда, как не трудно видеть, в ряду

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), D_{r-2}(\lambda), ..., D_1(\lambda), D_0(\lambda) \equiv 1$$

Каждый многочлен делится без остатка на последующий. Соответствующие частные обозначим через $i_1(\lambda), i_2(\lambda), ..., i_r(\lambda)$:

$$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)},\ i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \dots,\ i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda). \qquad (16)$$

Определение 8. Многочлены $i_1(\lambda), i_2(\lambda), ..., i_r(\lambda)$, определяемые формулами (16), называются *инвариантными многочленами* прямоугольной матрицы *A(λ).*

Если многочленная матрица имеет канонический диагональный вид (15), то, нетрудно заметить, что для этой матрицы

$$D_1(\lambda)=a_1(\lambda),\ \ D_2(\lambda)=a_1(\lambda)a_2(\lambda),\ \ \ldots,\ D_r(\lambda)=a_1(\lambda)a_2(\lambda)...a_r(\lambda).$$

Но тогда в силу соотношений (16) диагональные многочлены в (15) $a_1(\lambda), a_2(\lambda),..., a_r(\lambda)$ совпадают с инвариантными многочленами

$$i_1(\lambda)=a_r(\lambda), i_2(\lambda)=a_{r-1}(\lambda),..., i_r(\lambda)=a_1(\lambda)\,. \tag{17}$$

Здесь $i_1(\lambda), i_2(\lambda),..., i_r(\lambda)$ являются одновременно и инвариантными многочленами исходной матрицы *A(λ)*, поскольку эта матрица эквивалентна матрице (15).

Полученные результаты мы можем сформулировать в следующей теореме.

Теорема 5. *Многочленная прямоугольная матрица A(λ) всегда эквивалентна канонической диагональной матрице*

$$\begin{Vmatrix} i_r(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & i_{r-1}(\lambda) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & i_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

При этом здесь обязательно r – ранг, а $i_1(\lambda), i_2(\lambda),..., i_r(\lambda)$ - *инвариантные множители матрицы A(λ), определяемые формулами (16).*

Следствие 2. *Для того чтобы две прямоугольные матрицы одинаковых размеров A(λ) и B(λ) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же инвариантные множители.*

Достаточность следует из того, что две многочленные матрицы, имеющие одни и те же инвариантные многочлены, эквивалентны одной и той же канонической диагональной матрице и, следовательно, эквивалентны между собой.

Следствие 3. *В ряду инвариантных многочленов*

$$i_1(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)},\quad i_2(\lambda)=\frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)},\ \ldots,\ i_r(\lambda)=\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}\quad (D_0(\lambda)\equiv 1) \tag{19}$$

каждый многочлен, начиная со второго, является делителем предыдущего.

Это утверждение не вытекает непосредственно из формул (19). Оно следует из того, что многочлены $i_1(\lambda), i_2(\lambda),..., i_r(\lambda)$ совпадают с многочленами $a_r(\lambda), a_{r-1}(\lambda),..., a_1(\lambda)$ канонической диагональной матрицы (15).[1]

Алгоритм приведения к каноническому виду:

1. В λ-матрице выбрать отличный от нуля элемент наименьшей степени (ведущий элемент). Если имеется несколько элементов наименьшей степени, то среди них выбирается любой. Переставить (при необходимости) два столбца и две строки так, чтобы ведущая строка и ведущий столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, оказались на месте первой строки и первого столбца. Ведущий элемент при этом окажется в левом верхнем углу рассматриваемой матрицы.

Если все элементы ведущего столбца и ведущей строки, за исключением ведущего элемента, равны нулю, то этот столбец и эту строку следует исключить из рассмотрения и продолжить поиск ведущего элемента в оставшейся части матрицы. Преобразования заканчиваются, если исключены все столбцы и строки, или в оставшейся части матрицы все элементы нулевые, или в оставшейся части матрицы имеется только один элемент.

Если все элементы ведущего столбца и ведущей строки делятся без остатка на ведущий элемент, то перейти к пункту 3.

Если не все элементы ведущего столбца и ведущей строки делятся на ведущий элемент, то степень ведущего элемента нужно понизить, переходя к пункту 2.

2. Если в первом столбце имеется элемент $a_{i1}(\lambda)$, который не делится на ведущий элемент $a_{11}(\lambda)$, то представить этот элемент в виде $a_{i1}(\lambda) = p(\lambda)a_{11}(\lambda) + r(\lambda)$, где остаток $r(\lambda) \neq 0$ и степень $r(\lambda)$ меньше, чем степень многочлена $a_{i1}(\lambda)$. Прибавить к *i-й* строке первую строку, умноженную на многочлен $(-p(\lambda))$, при этом получить на месте элемента $a_{i1}(\lambda)$ многочлен $r(\lambda)$. Перейти к выбору ведущего элемента, т.е. к пункту 1.

Поступить аналогично, если в первой строке есть элемент, который не делится на ведущий (использовать то же представление и преобразование столбцов).

3. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такой многочлен, чтобы элементы, стоящие под ведущим оказались равными нулю. Аналогично, к каждому столбцу, расположенному правее ведущего прибавить ведущий столбец, умноженный соответственно на такой многочлен, чтобы элементы, стоящие правее ведущего, оказались равными нулю.

4. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, перейти к пункту 1, в котором все описанные действия применить к оставшейся части матрицы.[2]

Пример 3. Привести λ-матрицы к диагональному виду

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix},\ B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{pmatrix}.$$

Решение: Матрица A:

1. Наименьшую степень имеет элемент $a_{11}(\lambda)=\lambda$. Выбираем его в качестве ведущего. Все элементы ведущего (первого) столбца и ведущей (первой) строки делятся на ведущий элемент. Поэтому переходим к пункту 3 алгоритма.

3. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на $(-\lambda-1)$

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & -\lambda+1+(-\lambda-1)(\lambda^2-\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}.$$

Ко второму столбцу прибавим первый, умноженный на $(1-\lambda)$:

$$A(\lambda)\sim\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2-\lambda\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}.$$

4. Исключим из рассмотрения первый столбец и первую строку. Оставшаяся часть матрицы состоит из одного элемента. Преобразования закончены, матрица приведена к диагональному виду.

Матрица *B*.

1. В качестве ведущего элемента выбираем $b_{11}(\lambda)=\lambda$. Первый столбец и первая строка матрицы — ведущие. Так как элемент $b_{21}(\lambda)=(\lambda-1)^2$ не делится на ведущий без остатка, то переходим к пункту 2 алгоритма.

2. Разделим многочлен $b_{21}(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1$ на $b_{11}(\lambda)=\lambda$

$$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-2)\cdot\lambda+1$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на $(-\lambda+2)$

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda & \lambda^2+2\lambda+4\\ 1 & -\lambda^3+8\end{pmatrix}.$$

Возвращаемся к пункту 1.

1(2). Выбираем элемент наименьшей степени (единицу) в качестве ведущего. Меняем местами первую и вторую строки:

$$B(\lambda)\sim\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+8\\ \lambda & \lambda^2+2\lambda+4\end{pmatrix}$$

Все элементы ведущего (первого) столбца и ведущей (первой) строки делятся на ведущий элемент. Поэтому переходим к пункту 3 алгоритма.

3. Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на $(-\lambda)$, а затем ко второму столбцу прибавляем первый, умноженный на (λ^3-8)

$$B(\lambda)\sim\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+8\\ \lambda & \lambda^2+2\lambda+4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -\lambda^3+8\\ 0 & \lambda^4+\lambda^2-6\lambda+4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^4+\lambda^2-6\lambda+4\end{pmatrix}.$$

4. Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец матрицы. Переходим к пункту 1 алгоритма.

1(3). Поскольку в оставшейся части матрицы имеется только один элемент, то преобразования надо закончить — матрица $B(\lambda)$ приведена к диагональному виду.

Ответ: $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3+1\end{pmatrix}$, $B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^4+\lambda^2-6\lambda+4\end{pmatrix}$.

Замечания 2:

1. Диагональный вид λ-матрицы — не единственный. Он зависит от выбранной последовательности элементарных преобразований. Напомним, что простейший вид числовой матрицы определяется единственным образом, несмотря на разные последовательности используемых элементарных преобразований. Для λ-матриц можно уточнить понятие диагонального вида так, чтобы оно отвечало условию единственности. Нормальным диагональным видом λ-матриц *n-го* порядка называется диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e_r(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

у которой все многочлены, стоящие на главной диагонали, имеют старшие коэффициенты, равные единице; причем многочлен $e_2(\lambda)$ делится на $e_1(\lambda)$, $e_3(\lambda)$ делится на $e_2(\lambda)$ и т.д. $e_r(\lambda)$ делится на $e_{r-1}(\lambda)$. Количество r ненулевых многочленов больше нуля, так как рассматриваются ненулевые λ-матрицы, и не превосходит порядка матрицы, т.е. $1 \le r \le n$.

2. Чтобы привести λ-матрицу к нормальному диагональному виду, нужно сначала привести матрицу к диагональному виду:

$$diag(a'_{11}(\lambda), a'_{22}(\lambda), ..., a'_{nn}(\lambda)) .$$

Элемент $a'_{11}(\lambda)$ выбираем в качестве ведущего (если старший коэффициент этого многочлена не равен единице, то разделить на него многочлен). Если среди диагональных элементов есть элемент, например, $a'_{ii}(\lambda)$, который не делится на ведущий элемент, степень ведущего элемента можно понизить. Для этого прибавляем *i-й* столбец к ведущему (первому) столбцу, а затем переходим к пункту 2 алгоритма приведения λ-матрицы к диагональному виду.

Если все диагональные элементы делятся на $a'_{11}(\lambda)$, то, исключив первую строку и первый столбец, следует продолжить преобразования с оставшейся частью диагональной матрицы. Преобразования заканчиваются, если в диагональной матрице остался один ненулевой элемент.

3. Алгоритм приведения λ-матрицы к нормальному диагональному виду отличается от соответствующего алгоритма приведения числовой матрицы к простейшему виду выбором ведущего элемента. Необходимо, чтобы ведущий элемент оказался делителем всех элементов ведущей строки и ведущего столбца (либо всех диагональных элементов, если λ-матрица диагональная). Для этого метод Гаусса дополняется приемами понижения степени ведущего элемента. Действительно, понижая степень многочлена, обязательно получим многочлен, на который делятся другие. В крайнем случае, получим многочлен нулевой степени (отличную от нуля постоянную величину), на который делятся все многочлены.

4. Для λ-матриц, как и для числовых, преобразования, обратные к элементарным, являются элементарными.

5. Элементарные преобразования числовых матриц можно представить как умножение на элементарные матрицы. Аналогичным образом,λ-матрицу, полученную из единичной матрицы при помощи конечного числа элементарных преобразований, назовем элементарной λ-матрицей. Тогда совокупность элементарных преобразований, приводящих матрицу к нормальному диагональному виду, можно представить как умножение данной λ-матрицы слева и справа на элементарные матрицы. Другими словами, справедливо утверждение: *для любой λ-матрицы* $A(\lambda)$ *n-го порядка существуют такие элементарные преобразующие матрицы* $S(\lambda)$ *и* $T(\lambda)$ *n-го порядка, что матрица*

$$\Lambda(\lambda) = S(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot T(\lambda) \tag{21}$$

имеет простейший вид (20): $\Lambda(\lambda) = diag(e_1(\lambda),..., e_r(\lambda),0,...,0)$.

Согласно пункту 4, элементарные матрицы имеют обратные, поэтому (21) равносильно равенству $A(\lambda) = S^{-1}(\lambda) \cdot \Lambda(\lambda) \cdot T^{-1}(\lambda)$. Для нахождения элементарных матриц $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ нужно, приписав к данной матрице $A(\lambda)$

справа и снизу единичные матрицы, составить блочную матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline E & \end{array}\right)$. Элементы правого нижнего блока этой матрицы можно не указывать, так как они не участвуют в дальнейших преобразованиях. Затем при помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками и столбцами блочной матрицы, привести ее левый верхний блок $A(\lambda)$ к нормальному диагональному виду (20). При этом блочная матрица преобразуется к виду $\left(\begin{array}{c|c} \Lambda(\lambda) & S(\lambda) \\ \hline T(\lambda) & \end{array}\right)$, где $\Lambda(\lambda)$ — матрица простейшего вида (20), эквивалентная матрице $A(\lambda)$, а $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ — искомые преобразующие матрицы, связанные с матрицей $A(\lambda)$ равенством (21).

6. Если λ-матрицы $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ эквивалентны, то существуют такие обратимые λ-матрицы $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$, что $B(\lambda) = S(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot T(\lambda)$.[2]

<u>Пример 3.</u> Привести λ-матрицу к нормальному диагональному виду

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 - \lambda \\ \lambda^2 + \lambda & -\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $A(\lambda)$ найти элементарные преобразующие λ-матрицы $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$, приводящие ее к виду (16).

<u>Решение:</u> Приписываем к матрице $A(\lambda)$ справа и снизу единичные матрицы второго порядка $\left(\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline E & \end{array}\right)$. Приводим блок $A(\lambda)$ к

диагональному виду:

$$\left(\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline E & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & \lambda^2 - \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 + \lambda & -\lambda + 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & \lambda^2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 + 1 & -\lambda - 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 + 1 & -\lambda - 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 - \lambda & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right).$$

Полученный диагональный вид не является нормальным, так как двучлен $(-\lambda^3 + 1)$ не делится на λ. Продолжаем преобразования согласно пункту 2 замечаний 2. Прибавляем к первому столбцу второй. Затем, согласно пункту 2 алгоритма приведения λ-матрицы к диагональному виду, разделим многочлен $(-\lambda^3+1)$ на λ: $-\lambda^3+1=(-\lambda^2)\lambda+1$ и получим частное $p(\lambda)=-\lambda^2$. Прибавляем ко второй строке первую, умноженную на — $p(\lambda)=\lambda^2$

$$\left(\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^3+1 & -\lambda^3+1 & -\lambda-1 & 1 \\ \hline 2-\lambda & 1-\lambda & & \\ 1 & 1 & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda^3+1 & \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ \hline 2-\lambda & 1-\lambda & & \\ 1 & 1 & & \end{array}\right).$$

Теперь ведущий элемент равен единице. Поэтому меняем местами первую и вторую строки, а затем ко второй строке прибавляем первую, умноженную на $(-\lambda)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\lambda^3+1 & \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2-\lambda & 1-\lambda & & \\ 1 & 1 & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\lambda^3+1 & \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda^4-\lambda & -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & -\lambda \\ \hline 2-\lambda & 1-\lambda & & \\ 0 & 1 & & \end{array}\right).$$

Прибавляя ко второму столбцу первый, умноженный на (λ^3-1), получаем

$$\left(\begin{array}{c|c} A(\lambda) & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda^4-\lambda & -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & -\lambda \\ \hline 2-\lambda & -\lambda^4+2\lambda^3-1 & & \\ 1 & \lambda^3 & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda(\lambda) & S(\lambda) \\ \hline T(\lambda) & \end{array}\right).$$

Матрица $A(\lambda)$ приведена к нормальному диагональному виду (20), где $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4-\lambda \end{pmatrix}$. Элементарные преобразующие λ-матрицы выписываем, из соответствующих блоков

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad T(\lambda)=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -\lambda^4+2\lambda^3-1 \\ 1 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Проверим равенство (21), умножив матрицу $A(\lambda)$ на элементарные преобразующие λ-матрицы $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$

$$S(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot T(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & -\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^2+\lambda & -\lambda+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2-\lambda & -\lambda^4+2\lambda^3-1 \\ 1 & \lambda^3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda-1 & 1 \\ -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & -\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^4-\lambda \\ -\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 & -\lambda^6+\lambda^5+\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4-\lambda \end{pmatrix}=\Lambda(\lambda).$$

Равенство выполняется. Заметим, что полученные матрицы $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ обратимы, так как $\det S(\lambda) = -1, \det T(\lambda) = 1$.

<u>*Ответ:*</u> $\Lambda(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^4 - \lambda \end{pmatrix}$.

Способы нахождения инвариантных многочленов:

Первый способ. Привести λ-матрицу к нормальному диагональному виду (20): $diag(e_1(\lambda),..., e_r(\lambda),0,...,0)$. Ненулевые многочлены, стоящие на главной диагонали, являются искомыми инвариантными множителями.

Второй способ.

1. Найти наибольший общий делитель $d_1(\lambda)$ миноров 1-го порядка λ-матрицы (т.е. ее элементов); найти наибольший общий делитель $d_2(\lambda)$ миноров 2-го порядка и т.д. Процесс завершить, если все миноры некоторого порядка $(r+1)$ либо тождественно равны нулю, либо не существуют.

2. Найти инвариантные множители по формулам (19).[3]

<u>*Пример 4:*</u> Найти инвариантные множители матрицы
$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$:

<u>*Решение:*</u> Найдем инвариантные многочлены вторым способом.

1. Диагональный вид матрицы $B(\lambda)$ не является нормальным, поскольку двучлен $(\lambda - 2)$ не делится на двучлен $(\lambda - 1)$ (без остатка). Запишем ненулевые миноры первого порядка: $\lambda - 1, \ \lambda - 2$. Наибольший общий делитель этих многочленов равен единице, т.е. $d_1(\lambda) = 1$. Матрица $B(\lambda)$ имеет единственный минор второго порядка, поэтому $d_2(\lambda) = (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 2)$.

2. По формулам (19) находим инвариантные множители: $e_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1, \ e_2(\lambda) = \dfrac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \dfrac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{1} = (\lambda-1)(\lambda-2).$

<u>*Ответ:*</u> $(\lambda - 1), \quad (\lambda - 2)$.

Глава 2. Спектральные свойства λ-матриц

Дана прямоугольная матрица $m\times n$. Если m=*n и det* $A(\lambda)\neq 0$, *то* $A(\lambda)$ называется регулярной λ-матрицей, в противной случае ее называют сингулярной.

Каноническая форма Смита есть база для понятия полной спектральной структуры многочленной матрицы.

Спектральные характеристика:

1) совокупность конечных и бесконечных элементарных делителей с соответствующими им правыми и левыми жордановыми цепочками векторов.
2) Совокупность правых и левых минимальных индексов с соответствующими им рядами фундаментальных решений.

Для объяснения указанных спектральных характеристик обратимся к канонической форме Смита. Известно, что любая многочленная матрица может быть приведена при помощи эквивалентных преобразований к квазидиагональной матрице

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} k_1(\lambda) & & & & 0 \\ & k_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & k_\rho(\lambda) & \\ 0 & & & & 0_{uv} \end{bmatrix} = P(\lambda)\, A(\lambda)\, Q(\lambda) \qquad (22)$$

называемой канонической формой Смита.

Связь между векторными характеристиками полной спектральной структуры и матрицами $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, осуществляющими преобразование (22) матрицы $A(\lambda)$ к ее канонической форме $K(\lambda)$, указывается в следующей теореме.

Теорема 6. *Столбцы матрицы* $Q(\lambda)$ *и строки матрицы* $P(\lambda)$ *из преобразования (22) полностью определяют правые и левые жордановы цепочки векторов, отвечающих всем конечным элементарным делителям, а* *также все линейно независимые правые и левые полиномиальные решения A(λ).*

Определение 9. Для λ-матриц общего вида вводится понятие сопровождающихся пучков. Линейные пучки матриц вида

$$A_L(\lambda)=\begin{Vmatrix} \lambda I_n & -I_n & & & \\ & & & & \\ & & & \lambda I_n & -I_n \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{s-2} & A_{s-1}+\lambda A_s \end{Vmatrix},\ A_R(\lambda)=\begin{Vmatrix} \lambda I_m & \dots & & A_0 \\ -I_m & & & A_1 \\ & & & \\ & & \lambda I_m & A_{s-2} \\ & & -I_m & A_{s-1}+\lambda A_s \end{Vmatrix}$$

Будем называть соответственно левым и правым сопровождающими пучками λ-матрицы, I_n – единичная матрица порядка n.

Докажем теорему 6. Доказательство:

Перепишем (22) в виде

$$A(\lambda)Q(\lambda)=P^{-1}(\lambda)K(\lambda)\,. \qquad (23)$$

Из структуры матрицы $K(\lambda)$ следует, что

$$A(\lambda)Q_j(\lambda)\equiv 0,\quad j=\rho+1,\dots,n\,, \qquad (24)$$

где $Q_j(\lambda)$ - столбец *j* матрицы $Q(\lambda)$. Таким образом столбцы $Q_{\rho+1}(\lambda),\dots,Q_n(\lambda)$, являющиеся линейно независимыми (это следует из свойств унимодулярных матриц), образуют базис правого нуль-пространства матрицы *A(λ).*

Если $(\lambda-\lambda_*)^t$ является элементарным делителем *A(λ),* входящим в инвариантный множитель $k_j(\lambda),\ j\le\rho$, то использование уравнения (23) позволяет, как и в регулярном случае доказать, что векторы

$$x_{l+1}\equiv\frac{1}{l!}Q_j^{(l)}(\lambda_*),\ l=0,\dots,t-1 \qquad (24)$$

образуют правую жорданову цепочку векторов длины *t*, отвечающих этому делителю. Если числу λ_*, называемому спектральным значением *A(λ),* соответствует несколько элементарных делителей из различных инвариантных множителей, то ему будут соответствовать и различные правые жордановы цепочки, порождаемые соответствующими столбцами матрицы $Q(\lambda)$. Первые векторы этих цепочек будут обязательно линейно-независимыми (это утверждение следует также из свойств унимодулярных матриц). И жордановы цепочки, определяемые в соответствии с (24), будем называть каноническими.[4]

Аналогичные рассуждения справедливы и в отношении строк матрицы $P(\lambda)$. *Теорема доказана.*

Теорема 7. *Между полными спектральными структурами λ – матрицы $A(\lambda)$ и ее сопровождающих пучков* $A_{\varphi}(\lambda), (\varphi = L, R)$, *существует взаимно однозначное соответствие.*

Теорема 8. *Полная спектральная структура сопровождающего пучка*

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} & & & -A_s & \lambda A_s \\ & & & \lambda A_s - A_{s-1} & \lambda A_{s-1} \\ & -A_s & & \vdots & \vdots \\ -A_s & \lambda A_s - A_{s-1} & \ldots & \lambda A_3 - A_2 & \lambda A_2 \\ \lambda A_s & \lambda A_{s-1} & \ldots & \lambda A_2 & \lambda A_1 + A_0 \end{Vmatrix}$$

полностью определяется полной спектральной структурой λ – матрицы $A(\lambda)$.

Глава 3. Применение многочленов от матриц для решения систем рекуррентных уравнений

Рассмотрим систему линейных рекуррентных уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \ldots + a_{1n}x_n(k) + f_1(k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \ldots + a_{nn}x_n(k) + f_n(k). \end{pmatrix} \qquad (25)$$

где a_{ij} — *коэффициенты системы*, $f_i(k)$ — заданные, а $x_i(k)$ — неизвестные функции дискретного аргумента k, $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots$. При описании дискретных динамических систем аргумент k в (25) называют *дискретным временем*.

Систему (25) можно записать в матричном виде:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + f(k) \qquad (26)$$

где A — квадратная матрица (*n-го* порядка) коэффициентов системы рекуррентных уравнений, $f(k) = (f_1(k) \cdots f_n(k))^T$ — столбец заданных функций, а $x(k) = (x_1(k) \cdots x_n(k))^T$ — столбец неизвестных.

Решением системы (26) называется последовательность столбцов $\{x(k)\}_{k=k_0}^{\infty}$, при подстановке которых в (26) получаются верные равенства для всех $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots$.

Поставим задачу нахождения решения системы (26), удовлетворяющего *начальным условиям*

$$x(k_0) = x_0 \qquad (27)$$

где $x_0 = (x_{10} \cdots x_{n0})^T$ — заданный столбец.

Рассмотрим сначала *однородную систему* ($f(k) \equiv 0$) с постоянными коэффициентами

$$x(k+1) = Ax(k),\ k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots. \qquad (28)$$

Записывая (28) для $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots$, последовательно получаем $x(k_0+1) = Ax(k_0)$, $x(k_0+2) = Ax(k_0+1) = A^2x(k_0)$ и так далее.

Следовательно, решение однородной системы (28), удовлетворяющее начальным условиям (27), имеет вид:

$$x(k) = A^{k-k_0} \cdot x_0, \ \ k = k_0, k_0+1, k_0+2, ... \qquad (29)$$

Получим теперь решение системы (26). Учитывая (27), запишем (26) для $k = k_0, k_0+1, k_0+2, ...$

$$x(k_0+1) = Ax(k_0) + f(k_0) = Ax_0 + f(k_0),$$
$$x(k_0+2) = Ax(k_0+1) + f(k_0+1) = A[Ax_0 + f(k_0)] + f(k_0+1) = A^2 x_0 + Af(k_0) + f(k_0+1),$$
$$\vdots$$
$$x(k) = Ax(k-1) + f(k-1) = A^{k-k_0} x_0 + f(k-1) + Af(k-2) + \ldots + A^{k-k_0-1} f(k_0)$$

и так далее. Следовательно, решение системы (26) имеет вид

$$x(k) = A^{k-k_0} x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1} f(j) \qquad (30)$$

Первое слагаемое в (30) — решение однородной системы (28) с начальными условиями (27), второе слагаемое — решение системы (26) с нулевыми начальными условиями (т.е. при $x(k_0) = 0$).[5]

<u>Замечание 3.</u>

Линейное рекуррентное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$a_n \cdot x(k+n) + a_{n-1} \cdot x(k+n-1) + ... + a_0 \cdot x(k) = f_0(k)$$

Может быть сведено к эквивалентной системе рекуррентных уравнений вида (25). Действительно, используя обозначения

$$x_1(k) = x(k), \ \ x_2(k) = x(k+1), \ \ ..., \ \ x_n(k) = x(k+n-1),$$

получаем
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k), \\ x_n(k+1) = -\dfrac{a_0}{a_n} x_n(k) - \ldots - \dfrac{a_0}{a_n} x_1(k) + \dfrac{f_0(k)}{a_n} \end{cases}$$

или в матричной форме (26): $x(k+1) = Ax(k) + f(k)$ с матрицами *A* и *f(k)*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \cdots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{f_0(k)}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм решения системы рекуррентных уравнений:

1) найти жорданову форму J_A,

2) найти преобразующую матрицу S,

3) найти многочлен от матрицы A по формуле $f(A) = S \cdot f(J_A) \cdot S^{-1}$ (т.е. найти выражение для степени матрицы *A),*

4) записать по формуле (30) искомое решение.

<u>*Пример 5:*</u> Найти решение системы рекуррентных уравнений с начальными условиями $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2,\ x_3(0) = 1$:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + k, \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + 3^k, \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) - k. \end{cases}$$

<u>*Решение:*</u> запишем систему в матричной форме (26) и начальные условия $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$

$$x(k+1) = C \cdot x(k) + f(k), \text{ где } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix} k \\ 3^k \\ -k \end{pmatrix}.$$

1) Найдем жорданову форму J_C:

Составляем блочную матрицу $(C - \lambda E \mid E)$.

$$(C - \lambda E \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Элементарными преобразованиями приводим левый ее блок к нормальному диагональному виду. Меняем местами первый и третий столбцы, выбираем первую строку и первый столбец в качестве ведущих и делаем равными нулю все элементы выбранной строки (в пределах левого блока) и выбранного столбца, за исключением ведущего элемента:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2 & \lambda-1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Умножаем второй столбец на *(-1),* выбираем ведущими вторую строку и второй столбец, делаем равными нулю соответствующие элементы этой строки и столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 & \lambda-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda-\lambda^2 & \lambda-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим третий столбец на (-1), чтобы старший коэффициент многочлена был равен единице. Итак, получили матрицу $S_C(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda-2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и нормальный диагональный вид характеристической матрицы $(C-\lambda E) \sim diag(1, \lambda, \lambda(\lambda-3))$.. Составляем таблицу инвариантных множителей:

$$e_1(\lambda)=1; \quad e_2(\lambda)=\lambda; \quad e_3(\lambda)=\lambda(\lambda-3).$$

Составляем таблицу элементарных делителей: $\begin{vmatrix} \lambda, & \lambda, \\ \lambda-3. & \end{vmatrix}$. Каждому из трех делителей соответствует жорданова клетка 1-го порядка (для собственных значений $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3$), т.е. жорданова форма матрицы C — диагональная матрица:

$$J_C = diag\big(J_1(0), J_1(0), J_1(3)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем преобразующую матрицу S. Составляем блочную матрицу

$$(J_C - \lambda E \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Левый блок этой матрицы имеет диагональный вид, который не является нормальным, так как $(3-\lambda)$ не делится на $(-\lambda)$. Прибавляем к первому столбцу третий, к третьей строке прибавляем первую, умноженную на *(-1),* меняем местами первую и третью строки:

$$(J_C-\lambda E\mid E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-\lambda&0&0&1&0&0\\0&-\lambda&0&0&1&0\\3-\lambda&0&3-\lambda&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-\lambda&0&0&1&0&0\\0&-\lambda&0&0&1&0\\3&0&3-\lambda&-1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&3-\lambda&-1&0&1\\0&-\lambda&0&0&1&0\\-\lambda&0&0&1&0&0\end{array}\right).$$

Разделим первый столбец на 3, возьмем ведущий элемент, стоящий в левом верхнем углу, и сделаем равными нулю соответствующие элементы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3-\lambda&-1&0&1\\0&-\lambda&0&0&1&0\\-\lambda/3&0&0&1&0&0\end{array}\right)\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&\lambda-\lambda^2/3\end{pmatrix}.$$

Умножив второй столбец на *(-1)*, а третью строку на *(-3)*, получим в левом блоке нормальный диагональный вид $\Lambda(\lambda)=diag(1,\lambda,\lambda^2-3\lambda)$, а в правом блоке матрицу $S_J=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\\lambda-3&0&-\lambda\end{pmatrix}$.

Обращаем матрицу S_J:

$$S_J^{-1}(\lambda)=\frac{1}{\det S_j(\lambda)}\cdot S_J^T(\lambda)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\lambda&0&-1\\0&3&0\\3-\lambda&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\1-\frac{\lambda}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Находим λ-матрицу $S_J(\lambda)=S_J^{-1}(\lambda)\cdot S_C(\lambda)$:

$$S(\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&1&0\\1-\frac{\lambda}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\\lambda-2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-\frac{2\lambda}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-1&1&0\\\frac{5}{2}-\frac{2\lambda}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Представляем λ-матрицу *S(λ)* в виде многочлена с матричными коэффициентами, помещая переменную *A* перед коэффициентами:

$$S(\lambda)=\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2/3&0&0\\0&0&0\\-2/3&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3&-1/3&-1/3\\-1&1&0\\5/3&-1/3&-1/3\end{pmatrix}.$$

Подставляем вместо аргумента λ матрицу J_C:

$$S_{\text{left}}(J_C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Обращая полученную матрицу, находим преобразующую

$$S = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку, вычислив матрицу $C = SJ_CS^{-1}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найти многочлен от матрицы C по формуле $f(C) = S \cdot f(J_C) \cdot S^{-1}$(т.е. найти выражение для степени матрицы C):

Жорданова форма J_C состоит из трех жордановых клеток 1-го порядка $J_C = \mathrm{diag}(J_1(0),\ J_1(0),\ J_1(3))$, соответствующих собственным значениям $\lambda = 0$ и $\lambda = 3$. Найдем значения функции $f(\lambda) = \lambda^k$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 3$: $f(0) = 0,\ f(3) = 3^k$. Запишем многочлен от жордановой формы:

$$f(C) = diag\big(f(J_1(0)), f(J_1(0)), f(J_1(3))\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Найдем многочлен от матрицы C :

$$f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{pmatrix} = 3^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Выражение для степени матрицы C:

$$C^k = 3^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ при\ \ k = 1,2,3,\ldots$$

4) Используя формулу (30), получим:

$$x(k)=C^k x_0+\sum_{j=0}^{k-1}C^{k-j-1}f(j)=C^k x_0+\sum_{j=0}^{k-2}C^{k-j-1}f(j)+f(k-1)=$$

$$=3^{k-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\sum_{j=0}^{k-2}3^{k-j-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}j\\3^j\\-j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k-1\\3^{k-1}\\-k+1\end{pmatrix}=$$

$$=3^{k-1}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+\sum_{j=0}^{k-2}3^{k-j-1}\begin{pmatrix}3^j\\3^j\\3^j\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k-1\\3^{k-1}\\-k+1\end{pmatrix}=3^{k-1}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+\sum_{j=0}^{k-2}3^{k-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k-1\\3^{k-1}\\-k+1\end{pmatrix}=$$

$$=3^{k-1}\left(\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}+\sum_{j=0}^{k-2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}k-1\\3^{k-1}\\-k+1\end{pmatrix}=3^{k-1}\begin{pmatrix}4+k-1\\4+k-1\\4+k-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k-1\\3^{k-1}\\-k+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{k-1}(3+k)+k-1\\3^{k-1}(4+k)\\3^{k-1}(3+k)-k+1\end{pmatrix}.$$

<u>*Ответ:*</u> $x(0)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $x(k)=\begin{pmatrix}3^{k-1}(3+k)+k-1\\3^{k-1}(4+k)\\3^{k-1}(3+k)-k+1\end{pmatrix}$, *при* $k=1,2,3,...$

Заключение

В данной работе были рассмотрены основные понятия λ-*матриц*, такие как, канонический вид, инвариантные многочлены, делимость λ-*матриц* . Были изучены спектральные свойства λ-матриц такие как: установление соответствия между полными спектральными структурами λ-*матрицы* и ее сопровождающих пучков, полная спектральная структура сопровождающего пучка полностью определяется полной спектральной структурой λ-*матрицы*. Также было рассмотрено и изучено применение многочленов от матриц для решения систем рекуррентных уравнений.

Цель данной работы выполнена.

Список литературы:

[1] Ф.Р. Гантмахер «Теория матриц», Москва, издательство «Наука», 1966 г., 576 стр. с илл., 135-148.

[2] http://mathhelpplanet.com/static.php?p=elementarnye-pryeobrazovaniya-mnogochlennykh-matrits

[3] http://mathhelpplanet.com/static.php?p=invariantnye-mnozhiteli-mnogochlennoi-matritsy

[4] В. Б. Хазанов, “О спектральных свойствах λ-матриц”, *Численные методы и вопросы организации вычислений. V*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 111, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1981, 180–194.

[5] http://mathhelpplanet.com/static.php?p=primenenie-mnogochlenov-ot-matrits

[6] В. Б. Хазанов, “О некоторых спектральных характеристиках λ-матриц”, *Численные методы и вопросы организации вычислений. VII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **139**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1984,111–124.