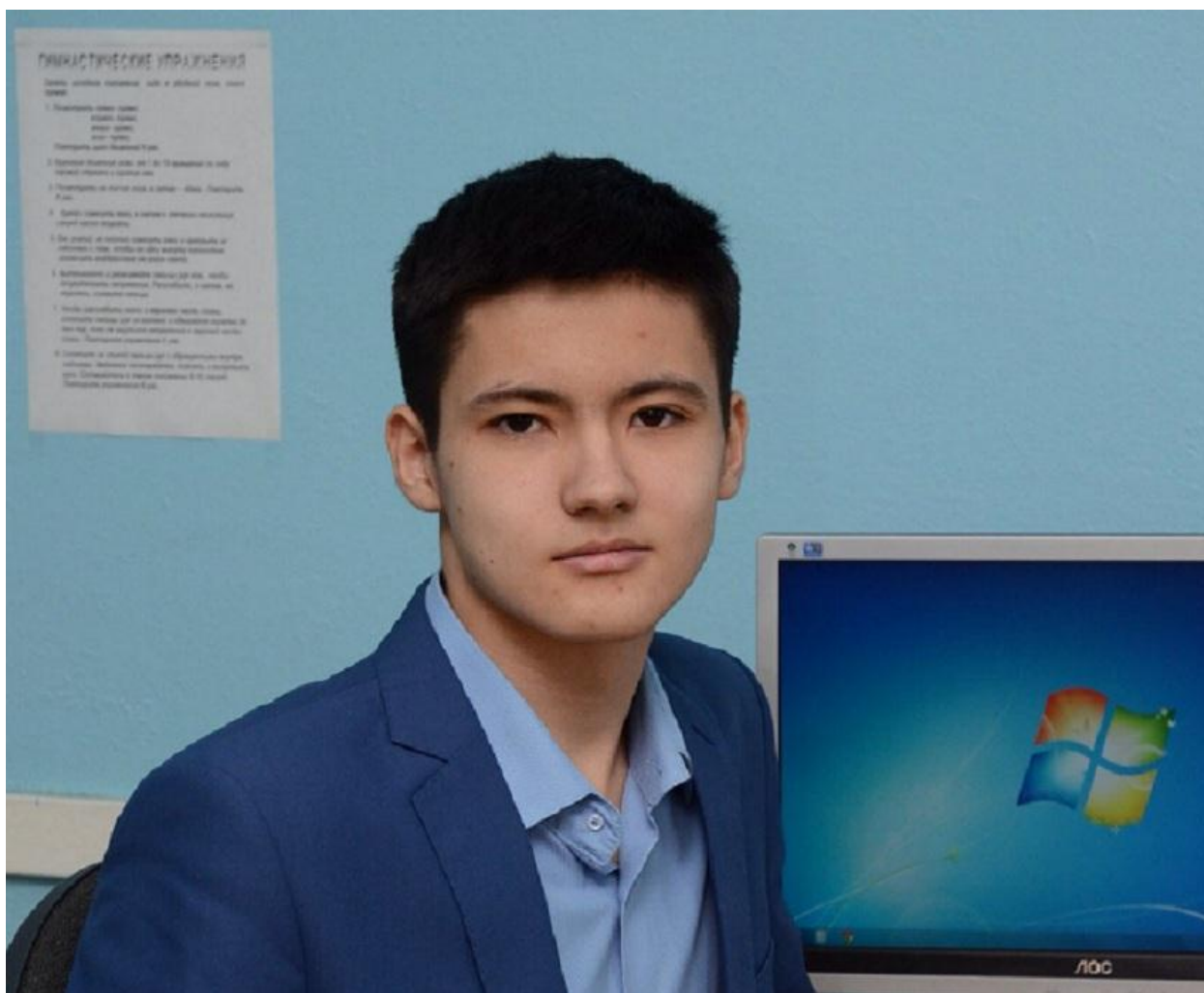


Критерий знаков



Автор статьи – Тимур Даутов

Тимур Даутов – бакалавр математики (КФУ, 2019). Выпускная квалификационная работа: Даутов Т.И. «Применение методов машинного обучения для решения задач интерпретации геофизических данных». Научный руководитель – доцент М.Ф. Насрутдинов, ИММ им. Н.И. Лобачевского, кафедра компьютерной математики и информатики.

Содержание

Введение.....	3
Критерий знаков.....	3
Заключение	7
Список литературы	8

Введение

Историческая справка: первое упоминание о критерии знаков было связано с именем доктора Джона Арбетнота – шотландского врача, сатирика и эрудита, обосновавшегося в Лондоне и опубликовавшего в 1710 году статью, в которой рассматривал показатели рождаемости в Лондоне для каждого года с периода от 1629 до 1710. Ежегодно число мужчин, родившихся в Лондоне, превышало число женщин, и доктор объяснил это несоответствие мудростью просвещения. [1, 2].

Николай Бернулли завершил многолетний анализ Арбетнота (1710–1713), показав, что большая часть данных годового числа рождений мужчин может быть объяснена биномиальным распределением с $p = \frac{18}{35}$. Это первый пример подгонки бинома к данным.

Критерий знаков

Критерий знаков принадлежит семейству непараметрических критериев, то есть он не использует никаких данных о характере распределения и может применяться в широком спектре ситуаций: проверка гипотез о медиане или о вероятности успеха.

Одновыборочный критерий знаков:

- Выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n), X_i \neq m_0$
- Нулевая гипотеза: $H_0: med X = m_0$
- Альтернатива: $H_1: med X <\neq> m_0$
- Статистика: $T(X^n) = \sum_{i=1}^n [X_i > m_0]$
- Нулевое распределение $T(X^n) \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$

Пример 1 (Kanji [3]):

Предполагается, что стоимость материала, получаемого при переработке строительной конструкции, составляет в среднем 0.28 долларов. Взята случайная выборка из 10 конструкций, все они переработаны; стоимость в долларах полученного из каждой конструкции материала составила:

{0.28,0.18,0.24,0.30,0.40,0.36,0.15,0.42,0.23,0.48}

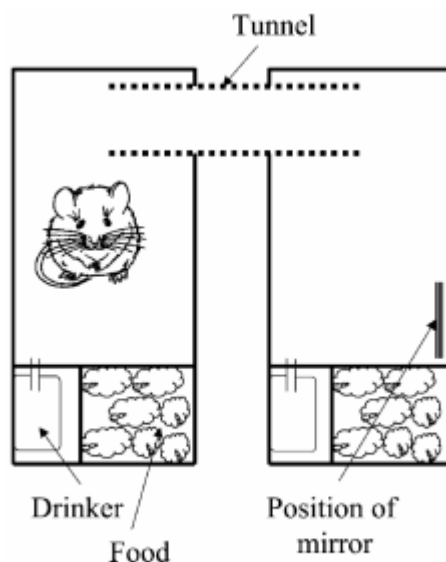
Правомерно ли использовать гипотезу о том, что она взята из популяции с медианой стоимости переработанного материала 0.28 долларов?

H_0 : медиана стоимости переработанного материала составляет 0.28 долларов.

H_1 : медиана стоимости переработанного материала отличается от 0.28 долларов $\Rightarrow p = 0.5536$, 95% доверительный интервал для медианы — [0.20, 0.41].

Пример 2: (Shervin, 2004 [4]):

16 лабораторных мышей были помещены в двухкомнатные клетки, в одной из комнат висело зеркало. Измерялось доля времени, которое каждая мышь проводила в каждой из своих двух клеток.



Общая постановка:

H_0 : мышам всё равно, висит в клетке зеркало или нет.

H_1 : у мышей есть какие-то предпочтения насчёт зеркала.

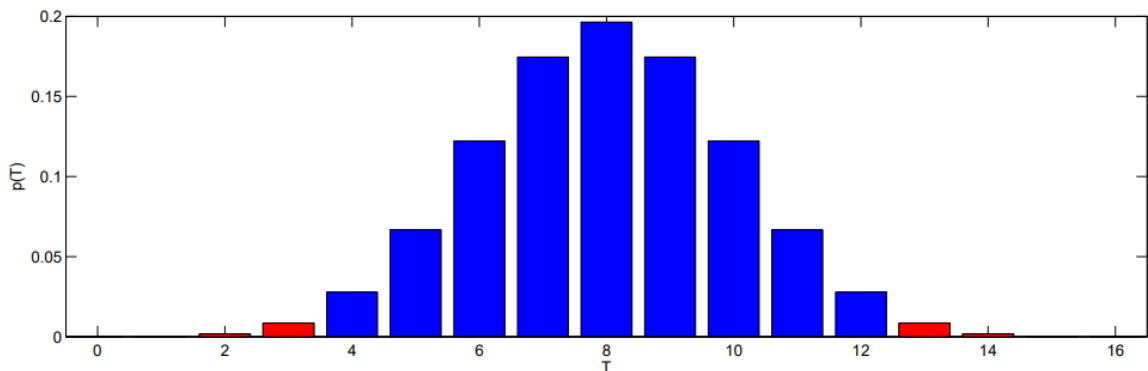
H_0 : медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, равна $\frac{1}{2}$

H_1 : медиана доли времени, проводимого в клетке с зеркалом, не равна $\frac{1}{2}$

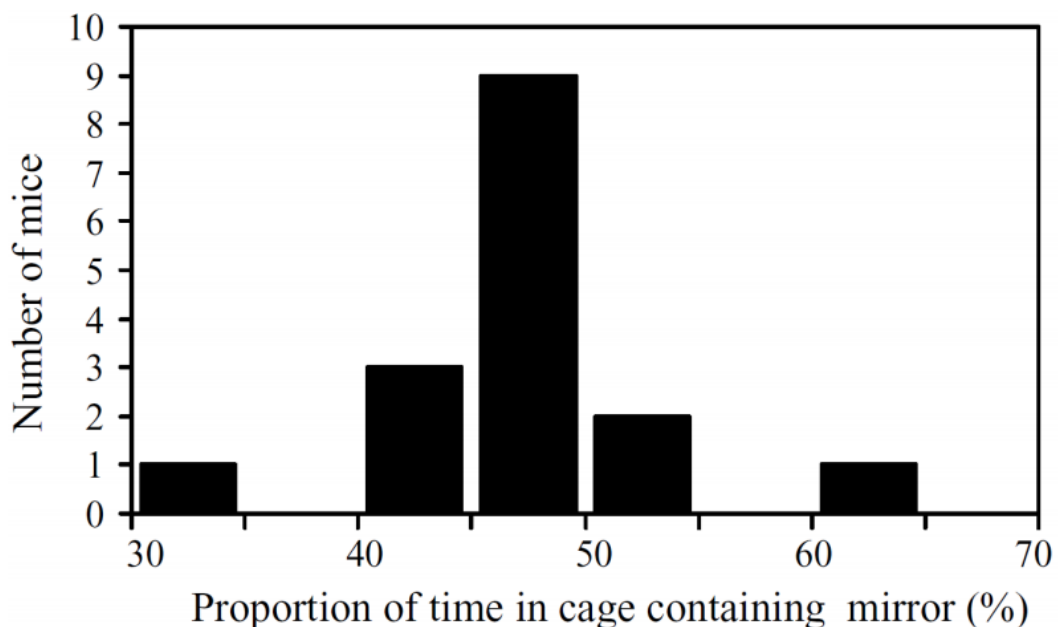
Редуцированные данные:

0 — мышь провела больше времени в комнате с зеркалом, 1 — в комнате без зеркала.

Статистика: T — число единиц в выборке.



13 из 16 мышей провели больше времени в комнате без зеркала. Критерий знаков: $p = 0.0213$, 95% доверительный интервал для вероятности (что мышь проведёт больше времени в комнате без зеркала) — $[0.54, 0.96]$.



Средняя доля времени, проводимого в клетке с зеркалом — $47.6 \pm 4.7\%$.

Двухвыборочный критерий знаков:



- Выборка:

$$X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$$

$$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$$

$X_{1i} \neq X_{2i}$ выборки связанные

- Нулевая гипотеза: $H_0: \sim P(X_1 > X_2) = \frac{1}{2}$
- Альтернатива: $H_1: \sim P(X_1 > X_2) < \neq > \frac{1}{2}$
- Статистика: $T(X_1^n, X_2^n) = \sum_{i=1}^n [X_{1i} > X_{2i}]$
- Нулевое распределение: $T(X_1^n, X_2^n) \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$

Пример 1 (Hollander & Wolfie, [5]):

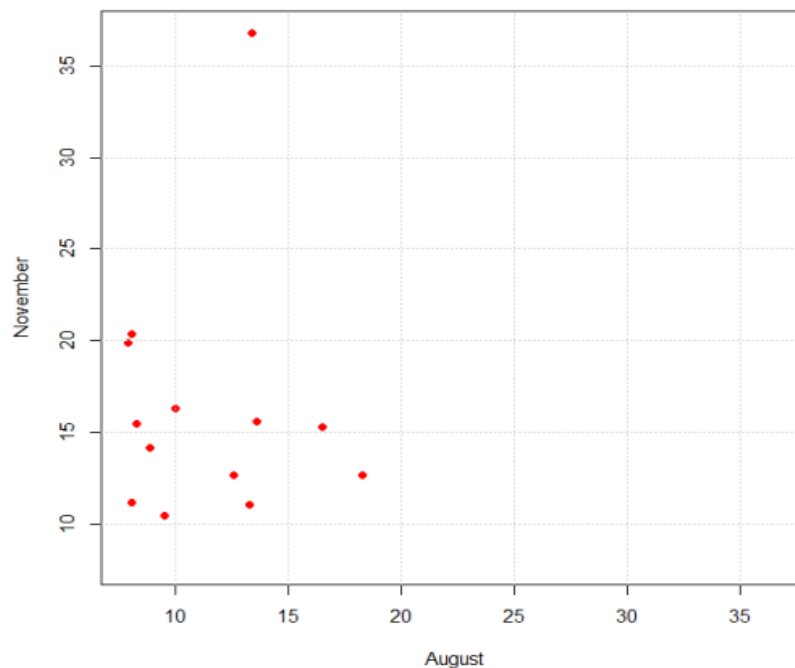
Депрессивность 9 пациентов была измерена по шкале Гамильтона до и после первого приёма транквилизатора. Подействовал ли транквилизатор?

H_0 : уровень депрессивности не изменился.

H_1 : уровень депрессивности снизился $\Rightarrow p = 0.09$, 95% нижний доверительный предел для медианы изменения — 0.041.

Пример 2: (Laureysens et al., 2004 [6]):

Для 13 разновидностей тополей, растущих в зоне интенсивного загрязнения, в августе и ноябре измерялась средняя концентрация алюминия в микрограммах на грамм древесины.



H_0 : концентрация алюминия не менялась.

H_1 : концентрация алюминия изменилась.

Для тополей 10 из 13 разновидностей концентрация алюминия увеличилась. Критерий знаков: $p = 0.0923$, 95% доверительный интервал для медианы изменения — $[0.687, 10.107]$.

Заключение

Причины использовать критерий знаков:

1. При сравнении двух парных выборок, когда элементы выборок соответствуют одному и тому же объекту, но измерения сделаны в разные моменты.
2. Задача о проверке соответствия распределений двух совокупностей по результатам выборочных наблюдений.
3. Также можно проверять однородность или связность выборок.

Список литературы

- 1 Conover, W.J. (1999), "Chapter 3.4: The Sign Test", *Practical Nonparametric Statistics* (Third ed.), Wiley, pp. 157–176, ISBN 0-471-16068-7
- 2 Sprent, P. (1989), *Applied Nonparametric Statistical Methods* (Second ed.), Chapman & Hall, ISBN 0-412-44980-3
- 3 Kanji G.K. 100 statistical tests. — London: SAGE Publications, 2006.
- 4 Shervin C.M. (2004) Mirrors as potential environmental enrichment for individually housed laboratory mice. *Applied Animal Behaviour Science*, 87(1-2), 95–103.
- 5 Hollander M., Wolfe D.A. Nonparametric statistical methods. — John Wiley & Sons, 1973.
- 6 Laureysens I., Blust R., De Temmerman L., Lemmens C., Ceulemans R. (2004). Clonal variation in heavy metal accumulation and biomass production in a poplar coppice culture. I. Seasonal variation in leaf, wood and bark concentrations. *Environmental Pollution*, 131, 485-494.
- 7 Симушкин С. В. Теоретические аспекты заданий курсового проекта по математической статистике //Казань: Изд-во КГУ. – 2004. – С. 43-45