ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
1 декабря 2017 г.

1. Доказать, что при $a \in [0, \pi/2]$, $b \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\int\limits_0^a \sin x\,dx + \int\limits_0^b \arcsin x\,dx \geqslant ab$.

Решение. Интеграл представляет собой площадь под криволинейной трапецией. Если вторую трапецию отобразить симметрично относительно биссектрисы координатного угла, то получится трапеция, ограниченная той же синусоидой, но только не осью абсцисс, а осью ординат. Но граничные точки, соответствующие $x = a$ и $y = b$ в общем случае не совпадают, поэтому в дополнение к ab в сумме интегралов содержится ещё добавочный кусочек.

2. Все вершины многогранника пронумерованы числами от 1 до N в некотором порядке. Пусть A – матрица размера $N \times N$, состоящая из 0 и 1, причём её элементы $a_{km} = a_{mk} = 1$, если вершины с номерами k и m лежат на одном ребре, и $a_{km} = 0$ в противном случае (в частности $a_{kk} = 0$). Показать, что $\det(A)$ не зависит от порядка нумерации вершин. Вычислить $\det(A)$ для тетраэдра и октаэдра.
Ответ: Для тетраэдра $\det(A) = -3$, для октаэдра $\det(A) = 0$.
Решение. Если поменять местами номера у любых двух вершин многогранника, то в матрице A поменяются местами соответствующие строки и соответствующие столбцы. После такой двойной перестановки определитель не изменится. Очевидно, что путём последовательной смены номеров вершин можно получить все возможные варианты. $\square$

3. Решить матричное уравнение $AX + X + A = 0$, где квадратная матрица A нильпотентна (некоторая степень A является нулевой матрицей).
Ответ: $X = -(E + A)^{-1}A$.
Решение. Матрица $(E + A)$ невырождена, поскольку $(E + A)(E - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 \ldots) = E$. Поэтому $X = -(E + A)^{-1}A$.

4. К десятичной записи любого ли натурального числа можно приписать конечный набор цифр так, чтоб получившееся число представляло собой полный квадрат?
Ответ: Для любого.
Решение. Обозначим рассматриваемое число через N, пусть его запись состоит из n цифр. Пусть число $M = N \times 10^{n+2}$, его десятичная запись состоит из $2n + 2$ цифр. Пусть X^2 – наибольший полный квадрат, меньший M. Докажем, что $Y = (X + 1)^2$ – искомый полный квадрат. Заметим, что $X < 10^{n+1}$ и $2X + 1 <$ $< 10^{n+2}$. Поэтому $Y = X^2 + 2X + 1$ попадает в промежуток $[M, M + 10^{n+2})$. $\square$

5. План города представляет собой квадрат, разделённый на 25 одинаковых кварталов квадратной формы. Из левого верхнего угла в противоположный угол вышел Антон, одновременно с ним с той же скоростью навстречу ему вышел Борис. С какой вероятностью они встретятся? На перекрестках направление выбирается произвольным образом, но так, чтобы длина пути была минимальна, т.е. Антон движется вниз или вправо, Борис вверх или влево.
Ответ: $p = 252/1024 \approx 24.6\%$.
Решение. Решим задачу для города $n \times n$. Дорога Антона и Бориса занимает $2n$ кварталов. Очевидно, что они могут встретиться только на середине пути, т.е. пройдя n кварталов. Пути Антона и Бориса при этом будут представлять собой ломаные из n звеньев. Сделаем параллельный перенос ломаной Бориса так, чтобы она была продолжением ломаной Антона (если Антон и Борис встретились, то перенос будет на нулевой вектор, иначе на ненулевой). Получим случайную ломаную длины $2n$, исходящую из левого верхнего угла, каждое звено которой направлено или вниз или вправо. Число таких ломаных $N = 2^{2n}$. Встреча произойдет, если в этой ломаной будет ровно n звеньев, направленных вниз. Их число $M = C_{2n}^n$. Итоговая вероятность $p = M/N = C_{2n}^n/2^{2n}$. Приняв $n = 5$, получим $p = 252/1024$.

6. Сколько существует последовательностей длины n из чисел “1” и “2” таких, что их сумма делится на 3?
Ответ: $(2^n + (-1)^n 2)/3$.
Решение. Каждой искомой последовательности длины n, $n > 1$, взаимно однозначно соответствует последовательность длины $n - 1$ из единиц и двоек, сумма чисел в которой не делится на 3. Поэтому, если $x(n)$ – искомое количество последовательностей, $y(n)$ – количество остальных последовательностей длины n из единичек и двоек, то $x(n) = y(n - 1)$ при $n > 1$. Очевидно, что $x(1) = 0$, $x(n) + y(n) = 2^n$, следовательно

$$x(n) = 2^{n-1} - x(n-1) = 2^{n-1} - 2^{n-2} + \ldots + (-1)^n 2^1 = (2^n + (-1)^n 2)/3.$$

7. Доказать, что число $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ иррациональное.
Решение. Предположим противное: $S = \frac{p}{q}$. Тогда число $S \cdot (q!)^2 = p(q-1)!q!$ — целое число. Но

$$S \cdot (q!)^2 = \sum_{n=1}^{q} \frac{(q!)^2}{(n!)^2} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(q!)^2}{(n!)^2}.$$

Первое слагаемое в правой части — целое число. Поэтому целым должно быть и второе слагаемое. Однако,

$$0 < \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{(q!)^2}{(n!)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{2k}} = \frac{1/(q+1)^2}{1-1/(q+1)^2} = \frac{1}{q(q+2)} \leqslant \frac{1}{3}. \quad \square$$

8. Доказать, что площадь проекции единичного куба на плоскость численно равна длине его проекции на ортогональную плоскости прямую.
Решение. Обозначим упомянутые проекции соответственно через S и s.
Будем считать, что куб расположен по одну сторону от плоскости (обозначим её α) и что его вершина A лежит на α. Пусть C – противоположная вершина куба, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, а $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к α, направленный в ту сторону от плоскости, в которой лежит куб. Тогда длина проекции куба на перпендикуляр к α равна $s = (\mathbf{d}, \mathbf{n})$.
Пусть, далее, B_1, B_2, B_3 — концы ребер куба, выходящих из вершины A, $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{AB_i}$, а $\mathbf{a}_i$ — проекции векторов $\mathbf{e}_i$ на плоскость α. Имеем: $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i + \lambda_i \mathbf{n}$.
Площадь S равна сумме площадей трех параллелограммов (возможно вырожденных), построенных на векторах $\mathbf{a}_i$. Поэтому

$$S = |(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{n})| + |(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{n})| + |(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{n})| = |(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})| + |(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{n})| + |(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{n})| =$$
$$|([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], \mathbf{n})| + |([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{n})| + |([\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], \mathbf{n})| = (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) = (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{n}) = (\mathbf{d}, \mathbf{n}) = s.$$

9. Из скольких компонент связности состоит дополнение конуса $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0\}$ в пространстве $\mathbf{R}^4$?
Ответ: Из двух.
Решение. Две компоненты A и B определим, соответственно, неравенствами

$$x^2 + y^2 - z^2 - w^2 < 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 - z^2 - w^2 > 0.$$

Покажем, что множество A связно. Множество A можно представить как объединение полноторий

$$A(a^2): \quad x^2 + y^2 < a^2, \quad z^2 + w^2 = a^2, \quad a^2 \in (0, \infty).$$

Каждая точка (x_0, y_0, z_0, w_0) полнотория $A(a^2)$ соединяется отрезком прямой, целиком принадлежащей полноторию $A(a^2)$, с точкой $(0, 0, z_0, w_0)$. Далее, точка $(0, 0, z_0, w_0)$ дугой окружности $x = 0$, $y = 0$, $z^2 + w^2 = a^2$ соединяется с точкой $(0, 0, 0, a)$. Аналогично, точка (x_1, y_1, z_1, w_1) полнотория $A(b^2)$ соединяется непрерывным путем с точкой $(0, 0, 0, b)$. Точки $(0, 0, 0, a)$ и $(0, 0, 0, b)$ соединяются отрезком прямой $(0, 0, 0, a + tb)$, $t \in [0; 1]$, очевидно принадлежащим множеству A. Таким образом, A – линейно связно и, следовательно, связно. Аналогичным образом, B – линейно связно и связно. $\square$

10. Конечная система множеств $\mathcal{L}$ замкнута относительно операции взятия симметрической разности: если $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$, то множество $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ также принадлежит $\mathcal{L}$. Может ли $\mathcal{L}$ состоять в точности из 2017 множеств?
Ответ: Не может.
Решение. *Способ 1.* Очевидно, что $\emptyset \in \mathcal{L}$. Назовем рассматриваемые множества векторами, определим сумму векторов как симметрическую разность множеств, также определим на них операцию умножения на элементы поля $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ по формуле: $1 \times A = A$, $0 \times A = \emptyset$. Легко проверить, что выполнены все аксиомы линейного пространства над полем $\mathbb{F}_2$. По условию пространство конечномерно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — его базис. Тогда все вектора пространства есть всевозможные линейные комбинации $e_1, \ldots, e_n$, их 2^n штук. Поскольку 2017 не является степенью двойки то $|\mathcal{L}| \neq 2017$. $\square$

Способ 2. Очевидно, что $\mathcal{L}$ с операцией Δ является группой. Пусть $A \in \mathcal{L}$. Поскольку $A \Delta A = \emptyset$, то порядок A равен 2. Следовательно, по теореме Лагранжа, $|\mathcal{L}|$ делится на 2.

11. Билет называется счастливым по-питерски, если сумма его цифр, стоящих на чётных местах, совпадает с суммой цифр, стоящих на нечётных местах. Назовем билет счастливым по-казански, если все его цифры можно разбить на две непересекающиеся группы с одинаковыми суммами цифр. На совместном заседании руководителей транспортных управлений Петербурга и Казани было принято решение не ограничивать число цифр в номере билета.
а) Пусть $P_{\Pi}(n)$ — вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-питерски. Найти $\lim_{n\to\infty} P_{\Pi}(n)$.
б) Пусть $P_{\mathrm{K}}(n)$ вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-казански. Найти $\lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{K}}(n)$.
Ответ: а) 0; б) 1/2.
Решение. а) Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — цифры рассматриваемого билета, пусть $\xi_i = x_{2i} - x_{2i-1}$, $i = 1, \ldots, [n/2]$. Очевидно, что ξ_i — независимые случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, обозначим её через V. По центральной предельной теореме для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{[n/2]} \xi_i\right| < \varepsilon\sqrt{[n/2]V}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \tag{1}$$

Для чётного n билет является счастливым, если $\sum_{i=1}^{[n/2]} \xi_i = 0$. Для нечётного n билет является счастливым, если $\sum_{i=1}^{[n/2]} \xi_i = x_n$. В любом случае вероятность того, что билет является счастливым меньше

$$P\left(\left|\sum\nolimits_{i=1}^{[n/2]} \xi_i\right| \leqslant 9\right). \tag{2}$$

Зафиксируем в (1) сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Сравнивая левую часть этого неравенства с (2) получаем, что $P_{\Pi}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\square$
Замечание. Отметим, что можно дать элементарное доказательство пункта **а)** без привлечения центральной предельной теоремы. Но его аккуратное изложение значительно длиннее.
б) Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — цифры рассматриваемого билета, $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Легко проверить, что с вероятностью 1/2 сумма S нечётна. Очевидно, что в этом случае рассматриваемый билет не является счастливым по-казански.
Оценим долю билетов, содержащих, по крайней мере, 8 единичек. Обозначим рассматриваемое событие через A. Для оценки снизу $P(A)$ разобьём набор из n цифр на непересекающиеся группы по 8 цифр. Для каждой такой группы вероятность того, что она отлична от "11111111" равна $1 - 0.1^8$, поэтому

$$P(A) \geqslant 1 - \left(1 - 0.1^8\right)^{[n/8]} \quad \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Таким образом, для любого заранее заданного $\varepsilon > 0$ мы можем считать, что n настолько велико, что доля билетов, среди цифр которых не содержится 8 единичек, меньше ε. Докажем, что все билеты с чётной суммой S, содержащие, по крайней мере, 8 единичек являются счастливыми по-казански. Нам достаточно представить алгоритм выбора цифр, дающих в сумме $S/2$. Вычеркнем вначале из рассматриваемого билета 8 единичек. Будем включать в искомый набор по очереди все невычеркнутые цифры до тех пор, пока они либо не закончатся, либо их сумма после взятия следующей цифры не станет больше $S/2$. По построению, сумма полученного набора заключена в интервале $[S/2 - 8, S/2]$. Дополнив взятый набор необходимым числом единиц (из тех, что были вычеркнуты вначале), получим искомый набор.
Таким образом, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n выполнено $1/2 - \varepsilon \leqslant$ $\leqslant P_{\mathrm{K}}(n) \leqslant 1/2$ и, значит, $P_{\mathrm{K}}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 1/2$. $\square$

Адрес в интернете: lobachevolymp.kpfu.ru
Электронная почта: lobachevolymp@mail.ru