ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

КОНДРАТЬЕВА Е.Д.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ

Казань 1999

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета

УДК 528.1

Кондратьева Е.Д. Методическое пособие по методам первичной обработки наблюдений, интерполированию,с основами программирования и графики.— Казань 1998, ... с.

Пособие предназначено для студентов 1 курса специальности "Астрономогеодезия" и содержит основы теории ошибок, простейшие методы работы с таблицами, основные правила обработки рядов независимых наблюдений.

Рецензент: доцент кафедры астронимии *КАЩЕЕВ Р.А.*

Персональные компьютеры (PC) — это новое поколение вычислительных средств, мощный фактор улучшения и ускорения всех видов обработки данных, полученных с помощью наблюдений, и широко распространяемых в геодезии и астрономии методов математического моделирования.

PC, как и любая друная вычислительная машина: имеет свой машинный язык — набор команд и правил кодирования операций и действий над числовым материалом. Работа в машинном языке неудобна. Поэтому к настоящему времени разработано достаточно большое число различных алгоритмических языков, ориентированных на различные задачи. Одним из самых первых и удачных языков, предназначенных для научных вычислений, является разработанный в 1954 г. ФОРТРАН.

Название языка получено от словосочетания FORmulae TRANslation — преобразование формул. ФОРТРАН — язык развивающийся, до сих пор разрабатываются его все более полные формы. Фирма производитель — IBM.

На основе ФОРТРАНа был создан и язык БЕЙСИК — очень популярный диалоговый язык, более протой, чем ФОРТРАН, пригодный для решения задач от самого первого уровня знаний исполнителя, что объясняет его широкое применение в школьных курсах информатики. БЕЙСИК — Beginners All-purpose Simbolic Instruction Code — многоцелевой язык символических инструкций для начинающих; разработан в 1965 г. группой сотрудников Дарсутского колледжа.

В любом алгоритмическом языке программа записывается в виде последовательности операторов — описаний выполняемых операций.

Программа вводится в память PC, чаще всего с клавиатуры дисплея. Текст программы отображается на экране дисплея и легко исправляется. Затем следует проверка программы или отладка. Обычно она проводится по легко вычисляемому примеру. Только после этого программу можно использовать.

Вы работаете в машинном зале физического факультета. Стоящие здесь PC имеют всои особенности, начиная с пароля для обеспечения доступа к PC. Учтите, что следующие далее правила работы с PC ориенторованы именно на особенности зала физического факультета.

ПРАВИЛА РАБОТЫ В МАШИННОМ ЗАЛЕ 1306

1. При запросе PC "Enter User 1D" набираем цифру 1 и нажимаем клавишу Enter.

При вторичном запросе "Enter Password" набираем латинские буквы COM, при этом отсветки нет. Затем снова нажимаем клавишу Enter.

2. На диске C появляется рамка основных каталогов, в которые входят и языки программирования. Переводим отсветку на обозначение языка QB, делаем Enter. На вновь открывшемся списке каталогов находим обозначение qb exe. Запомним — каждое действие на PC заканчивается вводом нашей команды, т.е. нажатием клавиши Enter.

3. Сейчас перед нами чистое поле и мы начинаем набирать новую программу.

```
cls
input a,s
n=a+s
print "n=",n
end
```

При этом каждая строка заканчивается нажатием клавиши Enter. При этом команда записывается в память, а строчные буквы команд переводятся в заглавные, формулы раздвигаются, что является знаком правильного набора.

4. Присваиваем программе имя, одновременно записывая ее в память. Для этого нажимаем аккордом, т.е. одновременно, клавиши Alt F. Появляется меню File. Переводим отсветку на режим Save as. В открывшемся окне на месте курсора набираем d:\astronom\marij1; Enter.

Имя программы должно начинаться с латинской буквы, хотя может содержать и цифры, но без пробела. Оно должно состоять не больше чем из 8 символов.

Мы видим, что при этом компьютер вернулся в программу, но над ней уже стоит присвоенное нами имя.

5. **Решение:** чтобы перейти к решению достаточно нажать клавишу F5. Другой путь — нажать аккордом Alt R, выйти тем самым в меню Run, и нажать Enter.

6. Чтобы после решения вернуться в программу, надо снова нажать клавишу Enter.

7. Чтобы стереть программу надо:

— нажать аккордом Alt F
— в меню File перейти на режим Exit, Enter
— чтобы перейти на диск D, нажимаем аккордом Alt F1
— переводим отсветку на обозначение диска D, Enter
— переводим отсветку на каталог ASTRONOM, Enter
— переводим отсветку на название убираемой программы
— нажимаем клавишу F8 и после запроса — клавишу Enter

8. Для возврата в среду QB надо клавишей Tab перевести отсветку на диск C

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЯЗЫКА QB

1. На языке QB нумерация строк не делается. Номер используется только для меток при передаче управления. Компьютер выполняет программу в порядке записи строк.

2. Ввод исходных данных осуществляется с помощью оператора input:

```
input a
input a,g
```

3. Оператор присвоения заменяется знаком равенства:

```
p=a-g
s=d+k
```

4. Стоящие на одной строчке операторы отделяются друг от друга двоеточием:

```
input f: n=f-2: b=f*5
```

5. Вывод на экран производит оператор print:

```
print "s=",s
print s
print s,n,a
```

6. Конец программы — end.

7. Степень обозначается символом ^ , корень — sqr(a):
n=m^3 n=sqr(a),
подкоренное выражение заключается в скобки.

8. Вычисление абсолютной величины производится через встроенную функцию ABS: N=abs(d)

9. При вводе чисел с клавиатуры цифры заносятся с десятичной точкой:

25.6 3.07

10. При вычислении тригонометрических функций угол записывается в скобках и при этом должен быть переведен в радианы.

Перевод угла из градусной меры в радианную:

*3.141592/180

функция	вид набора
синус	sin(a)
косинус	cos(f)
тангенс	tan(h)
арктангенс	atn(x)

Невстроенные функции могут быть вычислены в программе:

секанс	=1/cos(x)
косеканс	=1/sin(x)
котангенс	=1/tan(x)
арксинус	=atn(x/sqr(1-x*x))
арккосинус	=1.570796-atn(x/sqr(1-x*x))

11. Образование цикла:

```
for i=a to n step k        начало цикла
......
next i                     конец цикла
```

a — начальное значение переменной,
n — конечное значение переменной,
k — шаг, с которым меняется переменная цикла.
Если шаг не указывается, то компьютер работает с шагом =1.

12. Индексированные переменные:

a(i)	b(k)	одномерные
a(i,j)	b(k,m)	двумерные

13. Описание массива:

dim x(n)

где x — числа массива,
n — максимальное количество членов массива.

14. Преобразование числа в целое с отбрасыванием дробной части:

fix(a)

15. Безусловная передача управления GO TO:

goto 40

40 — метка, стоящая в начале той строки, куда передается управление.

16. Условный переход:

if ... goto ....
if ... then ....

Например:
```
if a<0 goto 3
if s>d then n=m+1
```

При невыполнении условия управление передается на следующую команду.

17. Задание исходных данных через оператор DATA: Оператор data является невыполняемым оператором и может стоять в любом месте программы. Длина его ограничена только длиной строки компьютера. Числа в операторе записываются через запятую. Выборка из этого массива производится оператором READ.

Например:
```
cls
input n
for i=1 to n
read x(i)
n(i)=x(i)-2
print "n=",n(i)
next i
data 3,5,7,9
data 11,12,13
```

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГРАФИЧЕСКОГО РЕЖИМА

1. Переход в графический режим осуществляется следующим образом: в меню File переходим на режим выхода Exit, как обычно это действие заканчивается нажатием клавиши Enter. На диске С переходим в каталог “qbherc com “.

На экране возникает наэвание пакета Hercules, затем компьютер снова уходит на диск С. Нам надо повторно перейти в каталог своего языка qb exe.

Теперь PC находится в таком режиме, что может и считать, и рисовать.

2. В программе переход в графический режим осуществляется оператором SCREEN 3

3. При этом машинное задание осей

```
0 ------X
|
|
|
|
Y
```

Размер экрана

```
0————640
|
|
|
320
```

4. Оператор вычерчивания линии:

LINE (X,Y)-(X,Y),3

первая скобка — координаты начала линии,
вторая скобка — координаты конца линии,
цифра 3 — максимальная яркость линии, общий интервал 0—3.

5. Оператор, рисующий точку:

PSET (X,Y),3 X,Y — координаты точки, 3 — яркость.

6. Оператор, вычерчивающий круг:

CIRCLE(X,Y),R X,Y — координаты центра круга,
R — радиус круга.

Тот же оператор используется для вычерчивания сегмента и эллипса:

CIRCLE(X,Y),R,S,A,B сегмент с центром в точке X,Y,
радиусом R, S — цвет,
при отсутствии цветов символ опускается,
A,B — начало и конец сегмента.

Границы сегмента заданы в виде углов, причем углы должны быть выражены в радианах.

Например:

```
pi= 3.141592
CIRCLE (160,100),50,,PI,2*PI
CIRCLE(X,Y),R,,,C
```

в этой модификации тот же оператор вычерчивает эллипс, причем параметр сжатия записывается дробью. С определяет его сплюстность как отношение полуосей по x и y.

Например:

```
CIRCLE(X,Y),60,,,,5/18
```

7. Оператор закрашивания контура:

PAINT(X,Y),a,b

x,y — координаты любой внутренней точки контура,
a — цвет,
b — яркость.

Например:

```
CLS
SCREEN 3
CIRCLE(200,200),50
PAINT(175,175),3,3
END
```

8. Установка курсора в нужное место экрана:

LOCATE a.b

a — строка по оси Y,
b — столбец по оси X.

Например:

```
locate 15.20
print “t”
```

9. Вычерчивание фигуры цепочкой:

DRAW "....."

Оператор DRAW вычерчивает любую фигуру цепочкой, причем отсчет ведется от центра экрана, буква указывает направление, цифра — длину отрезка. Следующий отрезок записывается в операторе через пробел, но рисуется от конца предыдущего.

Латинские буквы, указывающие направления:

```
        U
    H       E
L               R
    C       F
        D
```

Например,

— рисуется квадрат:

DRAW "U80 R96 D80 L96"

— прямоугольник:

A=20

DRAW "U=A R=A D=A L=A"

— треугольник:

DRAW "E15 F15 L30"

Оператор DRAW можно использовать и для переноса начала рисунка в точку с координатами x,y.

DRAW "bm x,y"

Буква N перед направлением движения указывает, что после выполнения предыдущей команды исходная точка возвращается назад:

рисуется снежинка:

DRAW "NU20 NE20 NR20"

Буква B показывает, что указанная далее линия не проводится, но курсор перемещается в ее конец.

10. Для переноса начала координат в общем случае, а не в операторе DRAW, используется оператор WINDOW:

WINDOW (X1,Y1)-(X2,Y2)

Здесь указаны координаты левого нижнего угла поля X1,Y1 и правого верхнего угла X2,Y2.

Например,

перенос начала координат в центр экрана проводится оператором:

WINDOW (-318,-198)-(318,198)

При этом начертить оси координат можно так:

LINE (-310,0)-(310,0),3 ось X

LINE (0,-190)-(0,190),3 ось Y

ПРИМЕРЫ ПРОГРАММ И ПРИЕМОВ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Прямое вычисление. Найти радиус-вектор астероида.

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\,\mathrm{Cos}v}$$

при a=3.425; e=0.4345; v=10 20.6

```
cls
input a,e
input v1,v2
v=(v1+v2/60)*3.14259/180
r=a*(1-e^2)/(1+e*cos(v))
print "r=",r
end
```

2. Разветвляющиеся программы.

```
y=2a        a<0
y=  a       a>0
cls
input a
ifa>0 goto 7
y=2*a
print "y=",y
end
7 y=sqr(a)
print "y=",y
end
```

3. Циклические программы.

a) Вычислить y=sin(x) при 0°<=x<90°, Δx =30°

```
cls
x=0
8 y=sin(x*3.14159/180)
print y:x=x+30
if x<=90 goto 8
end
```

b)
```
cls
for x=0 to 90 step 30
y=sin(x*3.14159/180)
print "y=",y
next x
end
```

c)
```
cls
x=0
for i=1 to 4
y=sin(x*3.14159/180)
print "y=",y : x=x+30
next i
end
```

d) Вычислить r по формуле: r^2=x^2+y^2+z^2 для 3 значений исходных данных.

```
cls
k=0
2 input x,y,z
r=sqr(x^2+y^2+z^2)
print "r=",r
k=k+1
if k<3 goto 2
end
```

```
cls
for i=1 to 3
input x,y,z
r=sqr(x^2+y^2+z^2)
print "r=",r
next i
end
```

e) Одномерный массив. Индексированные переменные.

Дано x(i) i=1...n

Вычислить сумму ряда.

```
cls
input n
dim x(n)
s=0
for i=1 to n
input x(i)
s=s+x(i)
next i
print "s=",s
end
```


f) Двумерный массив, работа с матрицами.

i=1...n - число строк

j=1...m - число столбцов

Ввод и вывод матрицы:

```
cls
input n,m
dim a(n,m)
for i=1 to n
for j=1 to m
input a(i,j)
next j
next i
for i=1 to n
for j=1 to m
print a(i,j);
next j
print
next i
end
```

Использованная здесь точка с запятой в операторе PRINT приводит к тому, что каждая сторока матрицы печатается в строчку, а пустой оператор PRINT означает, что строчки меняются.

g) Синусоида :

```
cls
screen 3
for i=0 to 12.56 step 0.1
pset(100+i*30,150-sin(i)*40),3
next i
end
```

h) Сатурн:

```
cls
screen 3
pi=3.14158
circle(160,100),79,3
t=0.77: p=0.77
for i=1 to 30 step 5
st=(t-0.015): r=st*pi
```

```
sp=p+0.04
circle(160,93),100+i,3,r,sp,0.3
```

i) Черная дыра:

```
cls
screen 3
for i=50 to 1 step -0.5
y=90/i
x=3*i
circle(160,30+10*y),x,3,,0.3
next i
```

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Результаты любых измерений являются числами приближенными. Это происходит хотя бы потому, что шкала любого инструмента имеет ограниченную точность. Кроме того, приближенные числа мы получаем и после округления. При обработке результатов измерений приходится производить арифметические действия с приближенными числами. Поэтому нам необходимо установить способ, определяющий точность результата с учетом точночти исходных данных.

Предположим, что некоторая величина имеет точное численное значение "A", однако в результате измерений получена величина "a". Разность между действительным значением величины "A" и измеренным "a" называется абсолютной погрешностью.

$$\Delta = A - a$$

Реально абсолютную погрешность определить невозможно, т.к. неизвестно значение "A". Поэтому на практике мы пользуемся предельной абсолютной погрешностью ε, равной половине единицы, стоящей на месте последней верной значащей цифры.

Предельная абсолютная погрешность чисел позволяет указать границы, в которых заключается их точное значение. Однако для того, чтобы судить о точночти измерений, необходимо сравнить "ε" и "a". Это делается с помощью предельной относительной погрешности "δ".

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Чем меньше δ, тем более точно число.

Следует помнить, что предельная относительная погрешность чисел никогда не вычисляется более чем с двумя значащими цифрами.

Производя арифметические операции над числами мы должны знать, какова точность полученного результата.

Предположим,что N есть линейная функция от u_1, u_2, ... u_n. Величины u_i — приближенные, их предельные абсолютные погрешности могут быть оценены. Полный дифференциал функции $N=f(u_1, u_2, ...u_n)$

$$dN= \frac{df}{du_1} du_1 + ... \frac{df}{du_n} du_n.$$

Здесь df/du_i — частные производные по каждому аргументу.

Заменяя дифференциалы dN, du_i на абсолютные ошибки ε_N, ε_U, имеем:

$$\varepsilon_u = \left|\frac{\partial f}{\partial u_1}\right| \varepsilon_{u_1} + \left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right| \varepsilon_{u_2} + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial u_n}\right| \varepsilon_{u_n} + R$$

В этой формуле R — сумма членов, содержащих ошибки во второй третьей и более высоких степенях. Однако пользуясь тем, что сами величины малы, с точностью, удовлетворяющей все запросы практики, можно сохранить только члены с первыми степенями. Кроме того, помня, что мы ищем максимальное влияние всех погрешностей на точность результата, здесь введены суммы абсолютных величин всех членов.

Сложение N=V+B $\quad \varepsilon_N = \varepsilon_V + \varepsilon_B$

Вычитание N=V-B $\quad \varepsilon_N = \varepsilon_V + \varepsilon_B$

Умножение N=V*B $\quad \varepsilon_N = V_V * \varepsilon_B + B * \varepsilon_V$

Деление $N=V/B$ $\varepsilon_N = \dfrac{V\,\varepsilon_B + B\,\varepsilon_V}{b^2}$

Степени и корни $N=B^P$ $\varepsilon_N = p * B^{P-1} * \varepsilon_B$

Тригонометрические функции

$N = \sin(V)$	$N = \arcsin(V)$
$\varepsilon_N = \lvert\cos(V)\rvert \cdot \varepsilon_V \rvert$	$\varepsilon_N = (1/\sqrt{(1-V^2)}) * \varepsilon_V$
$N = \cos(V)$	$N = \arccos(V)$
$\varepsilon_N = \lvert\sin(V)\rvert \cdot \varepsilon_V \rvert$	$\varepsilon_N = (1/\sqrt{(1-V^2)}) * \varepsilon_V$
$\varepsilon_N < \varepsilon_V$	$\varepsilon_N > \varepsilon_V$
$N = tg(V)$	$N = arc\ tg(V)$
$\varepsilon_N = (1/(\cos^2(V)) * \varepsilon_V$	$\varepsilon_N = (1/(1 + V^2)) * \varepsilon_V$
$N = ctg(V)$	$N = arc\ ctg(V)$
$\varepsilon_N = (1/(\sin^2(V)) * \varepsilon_V$	$\varepsilon_N = (1/(1 + V^2)) * \varepsilon_V$

Из примеров, которые Вы сделаете, будет видно, что погрешность суммы и разности чисел в основном определяются погрешностью того числа, которое имеет наименьшее количество десятичных знаков.

Отсюда вытекает: при вычитании числа округляются одинаково и ответ дается со всей имеющейся точностью.

При сложении числа округляются с одной запасной цифрой по сравнению с числом, имеющем наименьшее количество десятичных знаков, затем вычисляется сумма, а результат дается с тем числом знаков, которое было у наименее точного числа.

Результат умножения и деления никогда не может быть более точным, чем наименее точное из исходных чисел. Причем здесь термин "наименее точное" применен в смысле "имеющее наименьшее количество значащих цифр независимо от их порядка".

Примеры с тригонометрическими функциями показывают: при определении синуса и косинуса угла погрешность функции меньше или равна погрешности аргумента, при определении тангенса и котангенса погрешность функции больше или равна погрешности аргумента.

Для уменьшения погрешности при определении тригонометрических функций углов лучше пользоваться синусами и косинусами, при определении самого угла, наоборот, выгоднее использовать тангенс и котангенс.

Все это может быть сведено в следующую таблицу, связывающую точность углов с точность вычислений.

Точность угла	Число знаков
1'	3
0.1	4
1"	5
0.1	6
0.01	7

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

При исследовании различных процессов и явлений природы с помощью математического аппарата используются самые разнообразные функции. Эти функции могут задаваться различными способами. Простейший из них — задание алгебраического выражения, которое дает возможность по заданным значениям аргумента вычислить ее величину.

Однако, часто функции определяются бесконечными рядами и вычисление их требует вычисления сходимости и определения числа членов, необходимых для получения заданной точности.

Искомое выражение может быть задано неопределенным интегралом или дифференциальным уравнением. Даже если их можно выразить через элементарные функции, эти выражения часто бывают очень громоздкими.

Во всех случаях, когда значения функций нецелесообразно каждый раз вычислять напрямую для всех значений аргумента, прибегают к составлению таблиц. При этом задается последовательность значений функции при различных значениях аргумента. Например: функция $x=f(t)$ определена таблицей своих значений $x_к$ при заданных значениях аргумента t, где $k=1,2...n$. Значения $x_к$ иногда называются узлами.

Обычно таблица располагается так, что ее аргумент возрастает. Значения аргумента задаются с некоторым интервалом Δt, называемым шагом таблицы.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда табличный шаг Δt является величиной постоянной на всем протяжении таблиц.

Определение значения функции для произвольных значений аргумента,не совпадающих с табличными,называется интерполяцией.

В наиболее часто встречающемся случае значение аргумента лежит внутри области его табличных значений. Если аргумент находится вне заданных в таблице значений, то такое определение функции называется экстраполяцией.

Разработка способа интерполяции еще со времен Ньютона была сведена к замене табличной функции другой, легко вычисляемой функцией. Для этой задачи чаще всего используются алгебраические полиномы. Если основная функция периодическая, пользуются тригонометрическими полиномами.

При подборе полинома должно быть выполнено условие: он должен точно представлять узлы таблицы.

Допустим, что таблица занчений некоторой функции задана с постоянным шагом (табл. 1):

Таблица 1

Аргумент	t	t_{-2}	t_{-1}	t_0	t_1	t_2
Функция	f	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2

где $t = t + k * w$,

где w — табличный шаг, т.е. разность двух смежных значений t.

Введем понятие обыкновенных разностей. Удобнее для этого переписать таблицу в виде двух столбцов через строчку (табл. 2).

Таблица 2

t_{-1}	f_{-1}			
		$f^1_{-1/2}$		
t_0	f_0		f^2_0	
		$f^1_{1/2}$		$f^3_{1/2}$
t_1	f_1		f^2_1	
		$f^1_{3/2}$		
t_2	f_2			

В столбике функций сделаем следующее: из каждого числа вычтем предыдущее и полученную разность запишем справа между строчками. Тем самым мы получили столбик первых разностей. Для них вводится следующее обозначение:

цифра справа вверху — порядок разности,

цифра справа внизу — полусумма из индексов тех функций, которые были использованы при ее вычислении.

Так например,

$$f_0 - f_{-1} = f^1_{-1/2} \qquad f_1 - f_0 = f^1_{1/2}$$

Теперь будем работать со столбиком первых разностей. Проделаем с ним тоже самое, получив при этом новые разности, которые мы назовем разностями второго порядка, а их обозначение образуем по тому же правилу.

Подобным образом можно получить разности третьего порядка и любых следующих. Ограничением здесь служит только число первоначальных исходных данных, т.е. число взятых функций. Строго говоря, прежде всего при этом необходимо оценить точность исходных функций и требуюмую точность результата.

Перейдем теперь непосредственно к нашей теме.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ПО ТАБЛИЦЕ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ

Пусть задано некоторое промежуточное т.е. не содержащееся в таблице значение аргумента t, для которого требуется вычислить приближенное значение функции, заданной таблицей.

Выделим в таблице 2 значения аргумента, между которыми находится заданное t. Обозначим через t_0 — предыдущее значение аргумента. Так как большинство таблиц строятся в порядке возрастания аргумента, то t_0 — это предыдущее значение меньше всего отличающееся от заданного t.

Введем нормированный аргумент

$$n = \frac{t - t_0}{\omega}$$

Эту величину называют коэффициентом интерполяции.

Далее нам необходимо построить интерполяционный полином вида

$$P(n)=a_0 + a_1 *n + a_2*n^2 + \ldots$$

удовлетворяющий условиям:

$$P(-1)=f_{-1} \qquad P(0)=f_0 \qquad P(1)=f_1 \qquad \ldots$$

Эти условия приводят к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов a. Опуская вывод, укажем, что выражение их через разности дает следующий полином по степеням n:

$$P = f_0 + n*(f^1_{1/2} - 1/2f^2_1 + 1/3f^3_{3/2}) + n^2 *(1/2\, f^2_1 - 1/2f^3_{3/2}) + \\ + n^3 *1/6f^3_{3/2}+\ldots$$

Собирая члены справа по разностям функции последовательных порядков, а не по степеням n, получаем окончательно

$$f = f_0 + n*f^1_{1/2} + (n*(n-1)/2)*f^2_1 + (n*(n-1)*(n-2)/2*3)*f^3_{3/2}+\ldots$$

Это и есть знаменитая формула, носящая название формулы Ньютона для интерполяции вперед.

Для интерполирования в конце таблицы лучше использовать формулу Ньютона 2:

$$f(t)=f_k +n*f^1_{k+\frac{(k-1)}{2}} + (n*(n-1)/2)*f^2_{k-1} + (n*(n-1)*(n-2)/2*3)*f^3_{(k-1)+\frac{(k-2)}{2}} + \ldots$$

где $n = \dfrac{t - t_k}{\omega}$, причем $n<0$,

f_k — последующее значение функции.

Для интерполирования около середины табличного ряда можно использовать формулу Стирлинга или Бесселя:

$$f(t)=f_0 + n*f^1_0 + (n^2/2)*f^2_0 + (n*(n^2 - 1)/2*3)*f^3_0+ \ldots$$

$$f^1_0 = \frac{1}{2}(f^1_{1/2} + f^1_{-1/2}),\ f^3_0 = \frac{1}{2}(f^3_{1/2} + f^3_{-1/2}),\ n = (t - t_0)/\omega$$

$$f(t) = f_0 + n*f^1_{1/2} + (n*(n - 1)/2)*f^2_{1/2} + \\ + (n*(n-1)*(n-1/2)/2*3)*f^3_{1/2}$$

$$f^2_{1/2} = \frac{1}{2}(f^2_1 + f^2_0), \qquad f^4_{1/2} = \frac{1}{2}(f^4_1 + f^4_0), \qquad n = (t - t_0)/\omega$$

При интерполировании любых величин прежде всего надо внимательно рассмотреть исходную таблицу. Во многих случаях кроме основной величины в ней дается первая, а иногда и вторая разность. Таковы, например, таблицы прямоугольных координат Солнца в старых Астрономических Ежегодниках. Конечно, в подобных случаях вычислять разности нет необходимости, их надо взять из таблиц готовыми.

Кроме того, надо помнить, что разности легко выражаются через исходные функции и использовать их в таком преобразованном виде, когда таблица содержит, как обычно, только сами основные значения, удобнее.

Эти выражения для трех первых разностей, употребляющихся в формуле Ньютона, следующие:

$$f^1_{1/2} = f_1 - f_0 \qquad f^2_1 = f_2 - 2*f_1 + f_0 \qquad f^3_{3/2} = f_3 - 3*f_2 +3*f_1 - f_0$$

При решении вопроса о необходимом числе членов в формуле Ньютона надо помнить что третьи разности сказываются на результате только тогда, когда они больше 62 единиц последней значащей цифры основной функции.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Определение аргумента по заданному значению функции называется обратным интерполированием. Предположим, что функция монотонна, а заданное значение f(t) содержится между f_0 и f_1.

Как известно,

$$f(t) = f_0 + n*f^1_{1/2} + (n*(n-1)/2)*f^2_1 + (n*(n-1)*(n-2)/2*3)*f^3_{3/2}+ \ldots$$

Отсюда:

$$n=(f_t-f_0)/f^1_{1/2} - \frac{n(n-1)}{2f^1_{1/2}} f^2_1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\, f^1_{1/2}} f^3_{3/2} - \ldots$$

Как известоно время t входит только в коэффициент интерполирования n. Мы можем найти его из простой формулы:

$$\text{т.к. } n = \frac{t - t_0}{\omega}, \quad t = t_0 + n*\omega$$

В первом приближении

$$n_1 = \frac{f(t) - f_0}{f^1_{1/2}}$$

Во втором приближении:

$$n_2 = \frac{f(t) - f_0}{f^1_{1/2}} - \frac{n(n-1)}{2f^1_{1/2}} f^2_1$$

Если необходимо учитывать и третью разность:

$$n_3 = \frac{f(t) - f_0}{f^1_{1/2}} - \frac{n(n-1)}{2f^1_{1/2}} f^2_1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\ 3\ f^1_{1/2}} f^3_{3/2}$$

Концом приближений служит неравенство :

$$n_{i+1} - n_i < e,$$

где e — допустимая ошибка в процессе итераций.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОШИБОК

Основным способом изучения окружающего нас мира является наблюдение. При этом наблюдением мы называем регистрацию различных фактов как естественного так и искуственного происхождения. Наблюдения подразделяются на качественные и количественные, причем последние сами разделяются на два вида: измерения и подсчеты. Подсчет используется как средство регистрации физических явлений дискретного типа. Например подсчет числа метеоров, появившихся в данном квадрате в единицу времени, позволяет определить кривую активности метеорного потока.

В теории ошибок подсчет как вид наблюдения нас не интересует. Поэтому в дальнейшем мы будем называть наблюдением совокупность измерений, произведенных над изучаемым объектом в определенный момент времени.

Любому измерению, как бы тщательно оно не было подготовлено, обязательно присущи ошибки, которые отрицательно сказываются на определении интересующих нас параметров. По происхождению различают следующие виды ошибок: личные, инструментальные, методические, ошибки модели, ошибки классификации.

Личными называются ошибки, зависящие от физических особенностей наблюдателя. Как правило, у каждого человека они имеют свою систематическую составляющую. Так у Бесселя — величайшего наблюдателя 19 века, личная ошибка составляла целую секунду. На величине и характере личной ошибки сказываются как личные качества наблюдателя, его квалификация, так и степень утомляемости, психическое состояние, т.е. факторы как постоянного действия, так и случайные. Среднюю величину личной ошибки можно определить из специальных наблюдений.

Инструментальные ошибки возникают вследствие того, что ни один прибор невозможно изготовить совершенно точно. Рассмотрим, например, меридианный круг — телескоп, установленный под определенным углом к горизонту и ориентированный вдоль меридиана точки стояния. В нем можно выделить следующие погрешности, связанные с неидеальностью изготовления:

1 — ось вокруг которой вращается инструмент, практически никогда не бавает установлена строго горизонтально (ошибка наклона), 2 — направление оси не строго совпадает с линией восток-запад (ошибка азимута), 3 — труба не точно перпендикулярна оси инструмента (каллимиционная ошибка), 4 — круг с делениями насажен на ось так, что его центр не совпадает с центром оси (ошибка эксцентриситета), 5 — расстояния между делениями угломерного круга не везде одинаковы (ошибки делений) и тому подобное.

Причины возникновения инструментальных ошибок обычно заранее анализируются, их величины определяются из спе-

циальных рядов наблюдений. Тщательное исследование инструмента предшествует любым геодезическим и астрономическим наблюдениям.

Внешние ошибки — это ошибки, связанные с влиянием на прибор внешней среды. Сюда относятся толчки, вибрация, сильный ветер, колебания температуры, изменение электромагнитных свойств среды, в которой распространяется радиолокационный сигнал и другие отклонения окружающей среды от средних, нормальных условий.

Методические ошибки — это ошибки, порожденные различными аппроксимациями, округлениями, отбрасыванием членов высших порядков в разложениях, неучетом некоторых факторов, влияющих на результаты обработки наблюдений. В современных условиях искомая величина чаще всего выступает как результат обработки измерений некоторых начальных параметров, поэтому все погрешности математической обработки выступают как методические ошибки. Они неразрывно связаны и с ошибками модели.

Ошибки модели — так называются ошибки, связанные с тем, что интересующие нас объекты или различные физические связи присутствуют в процессе обработки в виде некоторых абстрактных понятий, отражающих главные черты реальной действительности, но никогда полностью с ней не совпадающих. Например, при построении плана небольшие участки поверхности Земли можно считать плоскими, но при расстояниях более 10 км необходимо учитывать кривизну Земли. Или, рассматривая Землю в целом, как планету, можно считать ее в первом приближении шаром, во втором эллипсоидом вращения. Связывая данные измерений с определенными параметрами при помощи формул, построенных на основе той или иной модели, мы вносим в конечный результат определенные ошибки.

Ошибки классификации — они возникают тогда, когда есть возможность отнесения измеренных параметров постороннего объекта к изучаемому нами объекту или явлению. Такие ошибки легко возникают, например, при наблюдениях Исскуственных Спутников Земли, при наблюдениях метеорных потоков и спорадических метеоров. Для исключения ошибок классификации

обычно производится предварительная проверка качества и состава измерений.

По своему характеру каждая из названных ошибок может быть отнесена и к системетическим, и к случайным.

Систематической называется ошибка, выражающая существенные связи, возникающие в процессе измерений. Эта ошибка неизбежно появляется каждый раз при проведении наблюдений в тех же условиях. Именно благодаря этому систематические ошибки поддаются изучению и исключению из результатов.

Другое дело — случайные ошибки. Случайные ошибки отражают несущественные связи между предметами и явлениями. Их нельзя воспроизвести даже создавая точно такие же условия наблюдений. Случайные ошибки нельзя определить и исключить т.к. они различны как по величине, так и по знаку. Единственно, что можно сделать, это оценить влияние случайных ошибок на точность и надежность результата. Это — предмет разработок в теории вероятностей и математической статистике.

Грубая ошибка является частным случаем случайной. Как правило, это ошибка намного превосходящая заданные характеристики прибора. Обычно она связана с резким нарушением условий эксперимента, поломкой прибора, ошибкой в алгоритме вычислений, просчетом наблюдателя. К грубым ошибкам, в частности, относятся ошибки классификации.

По своему типу принято различать измерения прямые и косвенные, а по точности — равноточные и неравноточные.

Если неизвестная величина определяется из наблюдений, то такие наблюдения называются прямыми или непосредственными.

Примером таких измерений являтся измрние углов плоского треугольника теодолитом, измерение длин линий дальномером. Однако часто измерить искомую величину напрямую невозможно. Тогда из наблюдений получают другие величины, связанные с неизвестной некоторой математической зависимостью, а затем вычисляют искомое. Такие измерения называются косвенными или посредственными. Например, площадь полигона определяется по измеренным сторонам, широ-

та точки наблюдения — по измеренным зенитным расстояниям звезд в меридиане.

Измерения считаются равноточными, если они произведены в одинаковых условиях: одним и тем же лицом, одним инструментом, одним и тем же методом, при практически неизменных внешних условиях.

Если хотябы одно из этих условий нарушено, результаты имеют разную точность. Такие измерения и называются неравноточными.

ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Допустим, что для определения величины X произведено n измерений, в результате которых получены значения x_1, x_2, ... x_n. Все наблюдения независимы, равноточны, свободны от систематических ошибок.

Наиболее вероятное, или наивероятнейшее, значение искомой величины есть обычное среднее арифметическое из полученных результатов:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}, i = 1, \dots n$$

Отклонение каждого измерения от среднего арифметического называется наивероятнейшей случайной ошибкой, или наивероятнейшим отклонением, или невязкой:

$$v_i = \overline{x} - x_i$$

О точности измерений можно приближенно судить по рассеянию результатов измерений. Чем больше расходятся ошибки, т.е. чем больше их рассеяние, тем ниже точность наблюдений.

Точность одного измерения характеризуется средней квадратичной ошибкой:

$$\sigma_i = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2_i}{n - 1}}$$

Однако σ_i не является ошибкой какого либо конкретного измерения, это есть среднеее квадратическое значение ошибок отдельных измерений.

Чтобы иметь представление о возможных отклонениях среднего арифметического $\overline{x}$ от истинного значения x, вводится понятие средней квадратичной ошибки среднего арифметического.

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum v^2_i}{n(n - 1)}} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}$$

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КОСВЕННЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Предположим, что нам надо найти величину U, измерить которую мы не можем. Однако

$$U = f(z_1, z_2, \dots z_n)$$

Каждая из величин z_1, ... z_n получается как среднее арифметическое из ряда наблюдений и имеет свою среднюю квадратическую ошибку σ_i.

Тогда средняя квадратическая ошибка U вычислится так:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\sigma_2\right)^2 + \dots \left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\sigma_n\right)^2$$

ОБРАБОТКА РЯДА НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ. ПОНЯТИЕ ВЕСА

В практике астрономических и геодезических работ нередко бывает необходимо объединить разнородные ряды наблюдений. Это особенно характерно для астрометрии, где для получения надежных результатов обрабатываются наблюдения за десятки лет, сделанные, как правило, разными авторами. В геодезии и других областях астрономии чаще объединяются

наблюдения, сделанные разными инструментами или разными методами. Так например, в небесной механике при определении орбит комет и астероидов всегда используются наблюдения, произведенные на разных обсерваториях по всему Земному шару.

Другой случай характерен для геодезической астрономии. Он возникает, например, при определении широты и долготы точки из наблюдений звезд. Все, что сделано в течении одной ночи, это работа наблюдателя на одном инструменте, одним и тем же методом, обычно в равных погодных условиях. Поэтому все наблюдения одной ночи обычно можно считать равноточными. Однако следующие серии наблюдений могут быть сделаны другим человеком или на другом инструменте. В таком случае встает вопрос об объединении не самих наблюдений, а выводов из отдельных серий по каждой ночи, обработанных как равноточные и имеющих свое наивероятнейшее значение и его среднюю квадратичную ошибку.

Именно для характеристики точности, надежности используемых величин и вводится понятие веса P. Вес — это цифровая оценка качества наблюдений. Введение веса — задача почти всегда чрезвычайно тонкая. Существуют по крайней мере 3 общепринятых способа его вычисления:

1. Если в обработке участвуют величины x_i, полученные как средние арифметические из равноточных рядов, и известны σ_i — их средние квадратические ошибки, то вес P задается следующим образом:

$$Pi = \frac{\sigma^2_0}{\sigma^2_i}, \text{ где } \sigma_0 \text{ — произвольное число.}$$

Смысл его заключается в том, что при $\sigma^2_i = \sigma^2_0$ $p = 1$, т.е. σ_0 — средняя квадратичная ошибка измерения, вес которого равен 1.

Чаще всего говорят более коротко: σ_0 — это средняя квадратичная ошибка единицы веса.

2. Если известно, по какому числу наблюдений получено каждое значение x_i, то за вес этих величин можно принять

$$p = m_i/n, \text{ где } n = \sum m_i \text{ , k — число групп.}$$

3. В тех случаях, когда используются сами наблюдения, а не результаты предварительной обработки нескольких рядов, в которых они равноточны только внутри каждого ряда, невозможно использовать оба названные ранее способа. Тогда веса назначаются исследователем в известной мере произвольно, но так, чтобы более точные наблюдения имели большие веса.

Из определения веса следует, во-первых, что вес неравноточных наблюдений обратно пропорционален квадратам их средних квадратичных ошибок. Во-вторых, вес - число относительное, т.е. все веса можно умножить или разделить на одно и тоже число.

Этим последним свойством раньше, до введения в практику вычислений персональных компьютеров, пользовались довольно широко. Действительно, умножив все веса на специально выбранный коэффициент, можно перевести их из дробных в целые числа, что облегчает ручные вычисления.

Определение наивероятнейшего значения из ряда неравноточных измерений: пусть x_i — измерения, веса которых p_i, $i = 1 \ldots n$. Наиболее вероятное значение искомой величины

$$A = \frac{\sum (p_i x_i)}{\sum p_i}$$

называется средним взвешенным.

Найдя отклонения $V_i = A - X_i$, можно определить и среднюю квадратичную ошибку единицы веса

$$\sigma^2_0 = \frac{\sum (p_i V_i)^2}{n - 1},$$

среднюю квадратичную ошибку наблюдения с весом p_i:

$$\sigma^2_i = \frac{\sum (p_i V_i)^2}{p_i(n - 1)},$$

среднюю квадратичную ошибку среднего взвешенного

$$\sigma^2 = \frac{\sum (p_i V_i)^2}{(K - 1) \sum p_i}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Большаков В.Д., Гайдаев П.А.* Теория математической обработки геодезических измерений. 1977, М., Недра, 367 с.

2. *Дьяконов В.П.* Применение персональных ЭВМ и программирование на языке БЕЙСИК. 1989, М., Радио и связь, 288 с.

3. *Покровский Г.Б., Ананьева М.П.* Программирование на языке БЕЙСИК. 1987, Казань, Изд. КГУ, 199 с.

4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. 1980, М., Мир, 280 с.