

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО  
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 010301 «Математика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
( Бакалаврская работа )

**«ФУНКЦИЯ КВАДРАТА РАССТОЯНИЯ»**

**Работа завершена:** "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2015г.

Студент группы 05-103 Шарафутдинова Дина Шамилевна \_\_\_\_\_

**Работа допущена к защите:** "\_\_\_" \_\_\_\_\_ 2015г.

Научный руководитель:

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Шурыгин Вадим Васильевич \_\_\_\_\_

Заведующий кафедрой:

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Шурыгин Вадим Васильевич \_\_\_\_\_

Рецензент:

\_\_\_\_\_

Дата, время защиты: \_\_\_\_\_ Оценка защиты: \_\_\_\_\_

Казань 2015

# Содержание

Введение	2
1 Параметризованные кривые	3
2 Функция квадрата расстояния	7
3 Функция квадрата расстояния и кривизна	15
4 Функция квадрата расстояния на пространственной кривой	18
Список литературы	20
Приложение	21

# Введение

При изучении строения кривых линий на плоскости и в пространстве используются различные функции, определенные на кривых линиях. Наиболее важными такими функциями являются функции кривизны и кручения и их производные по натуральному параметру.

Целью работы является изучение свойств функции квадрата расстояния, заданной на кривой линии и применение этой функции при изучении геометрии кривых линий на плоскости и в пространстве.

Первый параграф работы посвящен изложению некоторых сведений из теории кривых. Здесь приводятся определения  $k$ -точечного касания кривой и множества  $F^{-1}(0)$ , определяются вершины кривой, приводятся примеры вершин высших порядков.

В § 2 вводится функция квадрата расстояния на кривой, устанавливается связь наличия вершин у кривой с обращением в нуль производных функции квадрата расстояния. Здесь устанавливаются вершины у улиток Паскаля и эпициклоид.

В § 3 условия, которым должны удовлетворять вершины кривой представлены в терминах кривизны и ее производных, установлено расположение кривой и ее соприкасающихся окружностей в вершинах, доказаны другие утверждения.

В § 4 исследуется функция квадрата расстояния на пространственной кривой. В пространстве функция квадрата расстояния измеряет степень касания кривой со сферами, проходящими через данную точку кривой.

# 1 Параметризованные кривые

**Определение.** *Параметризованной кривой* в евклидовом вещественном пространстве  $\mathbb{R}^n$  (в работе будут рассматриваться случаи  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ ) называется гладкое отображение [2]

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

где  $I$  — некоторый открытый интервал в  $\mathbb{R}$ .

Кривая  $\gamma$  называется *регулярной*, если не существует ни одного  $t \in I$ , для которого

$$\gamma'_1(t) = \gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0.$$

Переменная  $t$  называется параметром,  $\gamma(t)$  — точка кривой, соответствующая значению параметра  $t$ .

*Вектором скорости* кривой  $\gamma$  в точке  $t$  называется вектор

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t)).$$

Вектор скорости кривой обозначается также следующим образом  $\frac{d\gamma}{dt}$ .

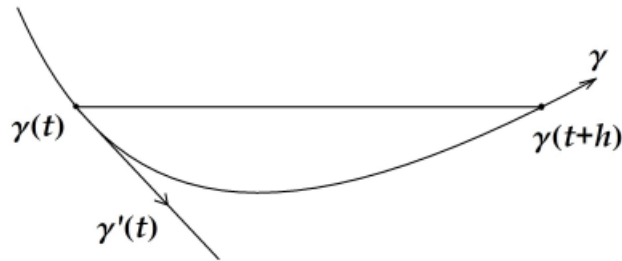


Рис. 1. Касательный вектор

Длина вектора  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  равна  $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ .

*Единичным касательным вектором* регулярной кривой  $\gamma$  в точке  $t$  или в точке  $\gamma(t)$  называется вектор

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{(\|\gamma'(t)\|)}.$$

Также его называют касательным ортом.

*Скоростью кривой*  $\gamma$  в точке  $t$  называется длина  $\|\gamma'(t)\|$ . Если  $\|\gamma'(t)\| = 1$  для любого  $t$ , то  $\gamma$  — кривая единичной скорости.

*Касательной к кривой*  $\gamma$  в точке  $t_0$  является прямая, которая проходит через  $\gamma(t_0)$  и направлена в сторону вектора  $T(t_0)$ .

**Определение.** Рассматриваем кривую  $\gamma$  и множество

$$F^{-1}(0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

точек, удовлетворяющих уравнению  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ , где  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Говорят, что множество  $F^{-1}(0)$  и кривая имеют  $k$ -точечное касание при  $t = t_0$ , если функция  $g$ , определенная равенством

$$g(t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) = F(\gamma(t)),$$

удовлетворяет условиям

$$g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0, \quad g^{(k)}(t_0) \neq 0,$$

где символом  $g^{(k)}(t_0)$  обозначается значение производной функции  $g^{(k)}$  порядка  $k$  от функции  $g(t)$  при  $t = t_0$ .

Также говорят, что порядок касания в этом случае равен  $k$ .

В случае, когда условие  $g^{(k)} \neq 0$  отбрасывается, говорят, что имеется не менее чем  $k$ -точечное касание или что порядок касания  $\geq k$ .

В частности, если  $n = 2$ , множество  $F^{-1}(0)$  задается уравнением

$$F(x_1, x_2) = 0. \tag{1}$$

Подставляя уравнения кривой  $\gamma(t)$  в левую часть уравнения (1), получим функцию

$$g(t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

1) Если  $g(t_0) = 0$  и  $g'(t_0) \neq 0$ , то кривая  $\gamma$  и множество  $F^{-1}(0)$  имеют одно-точечное касание.

2) Если  $g(t_0) = g'(t_0) = 0$  и  $g''(t_0) \neq 0$ , то кривая  $\gamma$  и множество  $F^{-1}(0)$  имеют двух-точечное касание.

3) Если  $g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = 0$  и  $g'''(t_0) \neq 0$ , то кривая  $\gamma$  и множество  $F^{-1}(0)$  имеют трех-точечное касание и т. д.

Соприкасающаяся окружность плоской кривой [1], [3] является пределом окружности, проходящей через три неограниченно сближающиеся точки кривой. В общей ситуации эта окружность имеет трех-точечное касание с кривой.

**Определение.** *Простой вершиной* плоской кривой  $\gamma$  называется точка  $p = \gamma(t_0)$ , отвечающая значению параметра  $t_0$ , для которого существует окружность, имеющая четырех-точечное касание с кривой при  $t = t_0$ . При этом говорят, что кривая имеет вершину в точке  $t_0$  или в точке  $p$ .

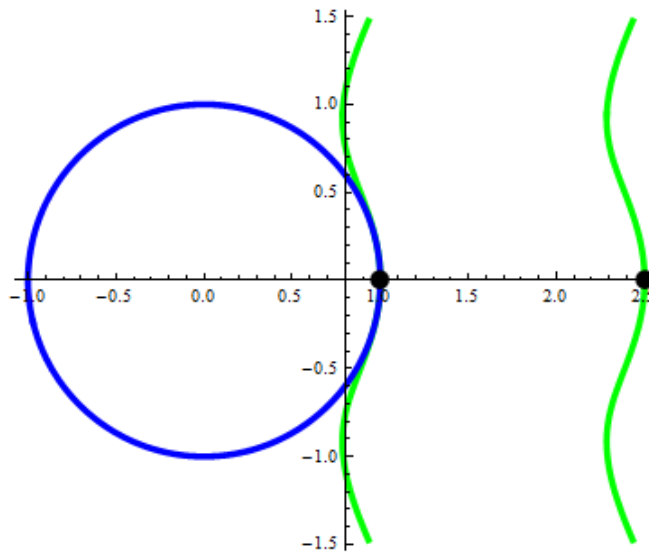


Рис. 2. Простая вершина.

**Определение.** *Высшей или вырожденной вершиной* плоской кривой  $\gamma$  называется точка  $p = \gamma(t_0)$ , отвечающая значению параметра  $t_0$ , для которого существует окружность, имеющая не менее чем пяти-точечное касание с кривой при  $t = t_0$ . При этом говорят, что кривая имеет высшую вершину в точке  $t_0$  или в точке  $p$ .

На рис. 3 продемонстрированы кривые, имеющие с соприкасающейся окружностью пяти-точечное и семи-точечное касание. Для удобства одновременно изображаются кривые, полученные из исходных сдвигом вдоль нормали.

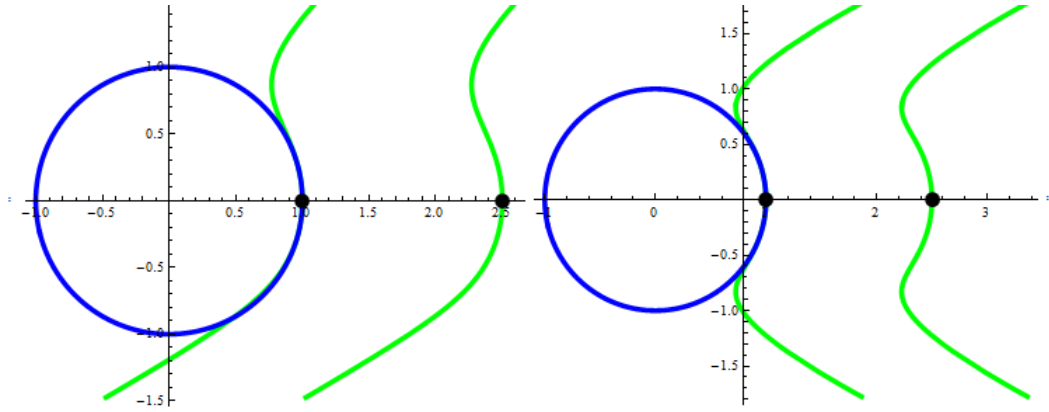


Рис. 3. Высшие вершины.

Пусть  $\alpha : I \ni t \mapsto \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  — кривая единичной скорости на плоскости и  $T(s)$  — ее касательный вектор. Орт нормали  $N(s)$  получается из  $T(s)$  поворотом против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ . Если  $\alpha(s) = (X(s), Y(s))$ , то

$$T(s) = (X'(s), Y'(s)), \quad N(s) = (-Y'(s), X'(s)).$$

Имеют место следующие формулы, выражающие производные  $T'$ ,  $N'$  через векторы  $T$  и  $N$ , называемые *формулами Серре-Френе для плоских кривых* [1], [3]:

$$T' = \varkappa(s)N, \quad N' = -\varkappa(s)T, \quad (2)$$

где  $\varkappa(s)$  — кривизна кривой  $\alpha$  в точке  $\alpha(s)$ .

Для заданной кривой  $\alpha$  имеем

$$T' = \alpha'' = (X'', Y'') = \varkappa N.$$

Умножая скалярно обе части на вектор  $N = (-Y', X')$ , получим формулу для вычисления кривизны

$$\varkappa(s) = X'(s)Y''(s) - X''(s)Y'(s).$$

Для регулярной кривой

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (X(t), Y(t)),$$

заданной функцией произвольного параметра, кривизну  $\kappa(t)$  можно найти следующим образом. Поскольку

$$T(t) = (X'(t), Y'(t)) / ((X'(t))^2 + (Y'(t))^2)^{1/2},$$

$$N(t) = (-Y'(t), X'(t)) / ((X'(t))^2 + (Y'(t))^2)^{1/2},$$

то

$$\kappa(t) = \frac{X'Y'' - X''Y'}{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

## 2 Функция квадрата расстояния

**Определение.** Функцией квадрата расстояния от точки  $u \in \mathbb{R}^n$  до кривой  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется функция  $f_d : I \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная равенством

$$f_d(t) = \|\gamma(t) - u\|^2 = (\gamma(t) - u)(\gamma(t) - u). \quad (4)$$

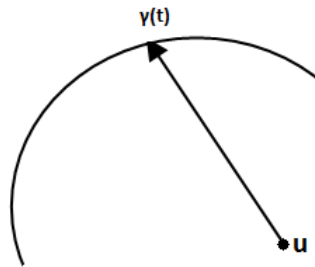


Рис. 4. Функция квадрата расстояния

**Предложение.** Пусть  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  — кривая на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а  $\omega$  — окружность с центром в точке  $u \in \mathbb{R}^2$ , проходящая через точку  $\gamma(t_0)$ .



Тогда кривая  $\gamma$  имеет при  $t = t_0$   $k$ -точечное касание с окружностью  $\omega$  в том и только том случае, когда функция  $f_d$  квадрата расстояния от точки  $u$  на  $\gamma$  удовлетворяет условиям

$$f_d^{(i)}(t_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad f_d^{(k)}(t_0) \neq 0.$$

В частности,  $\gamma$  имеет простую вершину при  $t = t_0$  тогда и только тогда, когда условия выполнены для  $k = 4$ , и  $\gamma$  имеет высшую вершину при  $t = t_0$  тогда и только тогда, когда эти условия выполнены для некоторого  $k \geq 5$  или же  $f_d^{(i)}(t_0) = 0$  при всех  $i$ .

**Доказательство предложения.** Действительно, окружность  $\omega$  представляет собой множество  $F^{-1}(0)$  для функции

$$F = (x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 - (\gamma_1(t_0) - u_1)^2 - (\gamma_2(t_0) - u_2)^2,$$

откуда

$$g(t) = F(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\gamma_1(t) - u_1)^2 + (\gamma_2(t) - u_2)^2 - (\gamma_1(t_0) - u_1)^2 - (\gamma_2(t_0) - u_2)^2, \quad (5)$$

а функция квадрата расстояния  $f_d(t)$  от  $u$  на  $\gamma$  имеет вид:

$$f_d(t) = (\gamma_1(t) - u_1)^2 + (\gamma_2(t) - u_2)^2 \quad (6)$$

Поскольку функции (5) и (6) отличаются на постоянную величину, их производные функции любого порядка совпадают.  $\square$

**Предложение.** Пусть кривая  $\gamma$  задана уравнением

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = Y(t) \quad \text{и} \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0. \quad (7)$$

Тогда точка  $(0, 0)$  является вершиной, тогда и только тогда, когда  $Y''(0) \neq 0$  и  $Y'''(0) = 0$ ; эта вершина простая тогда и только тогда, когда  $Y^4(0) \neq 3(Y''(0))^3$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию квадрата расстояния до  $\gamma$  от некоторой точки  $u$  и вычислим ее производные по  $t$  при  $t = 0$ . Имеем:

$$f_d = (t - u_1)^2 + (Y(t) - u_2)^2.$$

Продифференцировав, получаем:

$$\begin{aligned} f'_d(t) &= 2(t - u_1) + 2(Y(t) - u_2)Y'(t), \\ f''_d &= 2 + 2(Y'(t))^2 + (Y(t) - u_2)Y''(t), \\ f'''_d &= 2(3Y'(t)Y''(t) + (Y(t) - u_2)Y'''(t)), \\ f_d^{(4)} &= 2\left(3(Y''(t))^2 + Y'(t)Y'''(t) + Y'Y'''' + (Y(t) - u_2)Y^{(4)}(t)\right). \end{aligned}$$

Далее,  $f'(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $u_1 = 0$ .

Из выражения для второй производной при  $t = 0$  получаем  $f''(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $2 - 2u_2Y''(0) = 0$ . Это может выполняться только при  $Y''(0) \neq 0$  и  $u_2 = 1/Y''(0)$ .

Из выражения для третьей производной при  $t = 0$  получаем, что  $f'''_d(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $Y'''(0)/Y''(0) = 0$ , то есть когда  $Y'''(0) = 0$ .

Из выражения для четвертой производной при  $t = 0$  получаем, что  $f_d^{(4)}(0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $3Y''(0)^2 - Y^{(4)}(0)/Y''(0) = 0$ , то есть когда  $Y^{(4)}(0) = 3Y''(0)^3$ .  $\square$

Кривые, заданные уравнениями

$$x = a \cos t + \cos 2t + 1, \quad y = a \sin t + \sin 2t, \quad (8)$$

при различных значениях параметра  $a$ , называются *улитками Паскаля*.

**Предложение.** Кривая (8) имеет вершины при значениях параметра  $t$ , которые удовлетворяют уравнению

$$\sin t(a \cos t + 2) = 0.$$

### Доказательство.

Рассмотрим функцию  $f_d$  квадрата расстояния от общей точки плоскости  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  и запишем первые три производные в виде линейных комбинаций от  $u, v$  и  $1$  (с коэффициентами, зависящими от  $t$ ).

$$f_d = (a \cos t + \cos 2t + 1 - u)^2 + (a \sin t + \sin 2t - v)^2,$$

$$f'_d = u(2a \sin t + 8 \cos t \sin t) + v(-2a \cos t - 4 \cos 2t) - 4a \sin t - 8 \cos t \sin t = 0,$$

$$f''_d = u(2a \cos t + 8 \cos 2t) + v(2a \sin t + 16 \cos t \sin t) - 4a \cos t - 8 \cos 2t = 0,$$

$$f'''_d = u(-2a \sin t - 32 \cos t \sin t) + v(2a \cos t + 16 \cos 2t) + 4a \sin t + 32 \cos t \sin t = 0.$$

Выпишем определитель основной матрицы этой системы линейных уравнений.

$$\begin{vmatrix} 2a \sin t + 8 \cos t \sin t & -2a \cos t - 4 \cos 2t & -4a \sin t - 8 \cos t \sin t \\ 2a \cos t + 8 \cos 2t & 2a \sin t + 16 \cos t \sin t & -4a \cos t - 8 \cos 2t \\ -2a \sin t - 32 \cos t \sin t & 2a \cos t - 16 \cos 2t & 4a \sin t + 32 \cos t \sin t \end{vmatrix}$$

Вычислим определитель с помощью пакета Mathematica и получим уравнение для вершин. Приравняем его к нулю и найдем при каких  $t$  будут решения.

$$\sin t(a \cos t + 2) = 0.$$

При  $2 < a < 4$  имеются вершины, при  $a = 2$  кривая нерегулярна в точке  $t = \pi$  — имеет острие (точку возврата).

В качестве следующего примера использования функции квадрата расстояния для нахождения вершин кривой рассмотрим эпициклоиды. Эпициклоида — это кривая, описываемая фиксированной точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности при условии, что окружности расположены по разные стороны от общей касательной.

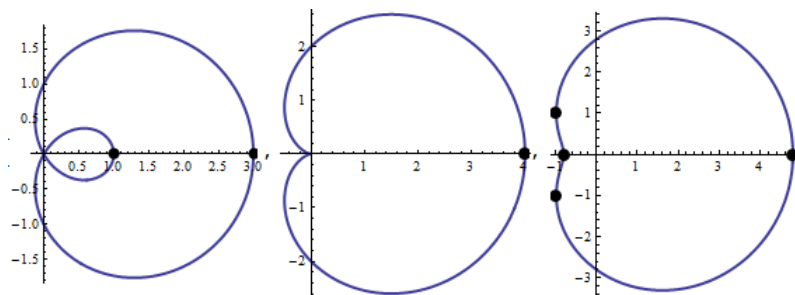


Рис. 5. Вершины при  $a = 1$ ,  $a = 2$ ,  $a = 2.8$ .

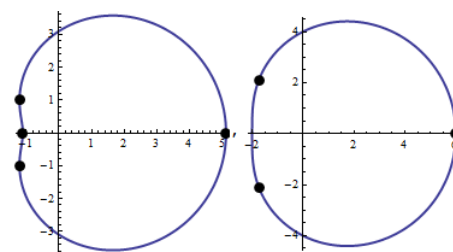


Рис. 6. Вершины при  $a = 3.1$ ,  $a = 4$ .

Выведем уравнение эпициклоиды. Будем пользоваться векторной круговой функцией

$$\vec{e}(t) = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t.$$

Имеем (см. рис. 7):

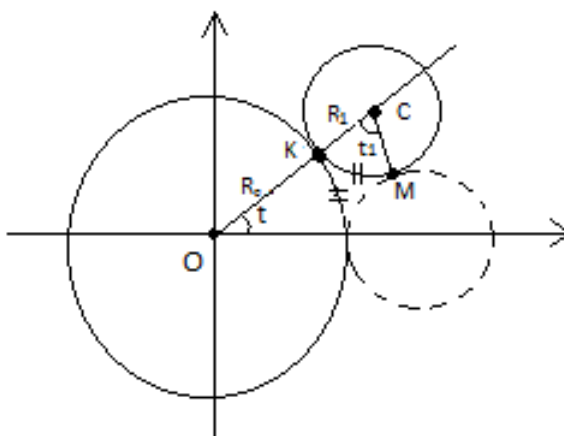


Рис. 7. Качение окружности по окружности.

$$\vec{OC} = (R_0 + R_1)\vec{e}(t), \quad \vec{CM} = |\vec{CM}|\vec{e}(\varphi) = R_1\vec{e}(\varphi).$$

Поскольку качение происходит без скольжения, то  $t_1 R_1 = t R_0$  и  $t_1 = t R_0 / R_1$ . Поэтому

$$\overrightarrow{CK} = R_1 \bar{e}(\pi + t), \quad \overrightarrow{CM} = R_1 \bar{e}(\pi + t + t_1),$$

откуда

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = (R_0 + R_1) \bar{e}(t) + R_1 \bar{e}(\pi + t + t_1) = \\ &= (R_0 + R_1) \bar{e}(t) + R_1 \bar{e} \left( \pi + \frac{(R_0 + R_1)}{R_1} t \right). \end{aligned}$$

Окончательно в координатах получаем следующие уравнения эпициклоиды:

$$\begin{cases} x = (R_0 + R_1) \cos t - R_1 \cos \left( \frac{R_1 + R_0}{R_1} t \right), \\ y = (R_0 + R_1) \sin t - R_1 \sin \left( \frac{R_1 + R_0}{R_1} t \right), \end{cases}$$

Для удобства сделаем замену

$$R_1 = b, \quad \frac{R_1 + R_0}{R_1} = a,$$

тогда уравнение эпициклоиды примет вид

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = (ab) \cos t - b \cos at, \\ y = (ab) \sin t - b \sin at, \end{cases}$$

Запишем функцию квадрата расстояния и приравняем нулю ее первые 3 производные в общей ситуации. Имеем:

$$\begin{cases} (\alpha - u) \alpha' = 0, \\ (\alpha - u) \alpha'' + (\alpha')^2 = 0, \\ (\alpha - u) \alpha''' + \alpha' \alpha'' + 2\alpha' \alpha'' = 0, \end{cases} \quad (9)$$

Для существования вершин у кривой  $\alpha$  необходимо, чтобы система уравнений (9) имела решение. Заменив  $\alpha - u = w$ , перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} w \alpha' = 0, \\ w \alpha'' = -(\alpha')^2, \\ w \alpha''' = -3\alpha' \alpha'', \end{cases} \quad (10)$$

Первые два столбца матрицы системы (10) образованы координатами производных функции  $\alpha$ , поэтому матрица системы (10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & 0 \\ \alpha''_1 & \alpha''_2 & -(\alpha')^2 \\ \alpha'''_1 & \alpha'''_2 & -3\alpha'\alpha'' \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Система (10) имеет решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы (11) равен нулю.

Для эпициклоиды имеем

$$\begin{cases} \alpha'_1 = -ab \sin t + ab \sin at & \alpha'_2 = ab \cos t - ab \cos at \\ \alpha''_1 = -ab \cos t + a^2b \cos at & \alpha''_2 = -ab \sin t + a^2b \sin at \\ \alpha'''_1 = ab \sin t - a^3b \sin at, & \alpha'''_2 = -ab \cos t - a^3b \cos at, \end{cases}$$

$$-(\alpha')^2 = -((-ab \sin t + ab \sin at)^2 + (ab \cos t - ab \cos at)^2) =$$

$$2a^2b^2(-1 + \cos(t - at)),$$

$$-3\alpha'\alpha'' = -3((-ab \sin t + ab \sin at)(-ab \cos t + a^2b \cos at) +$$

$$(ab \cos t - ab \cos at)(-ab \sin t + a^2b \sin at)) =$$

$$3(-1 + a)a^2b^2 \sin(t - at).$$

Вычисляя определитель (11) для рассматриваемого случая с помощью пакета Mathematica, получим уравнение для нахождения вершин

$$2a^4(-1 + a^2)b^4 \sin^2\left(\frac{t - at}{2}\right) \sin(t - at) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим несколько случаев и найдем вершины в конкретных случаях.

1. Пусть  $R_1 = R_0 = r$ . Тогда  $a = 2$ ,  $b = r$ , получаем уравнение кардиоиды

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = 2r \cos t - r \cos 2t, \\ y = 2r \sin t - r \sin 2t. \end{cases}$$

Уравнение (12) принимает вид

$$\sin^2(t/2) \sin t = 0.$$

Его решения  $t = \pi k$  дают особую точку  $(1, 0)$  и вершину  $(-3, 0)$ , см. рис. 8.

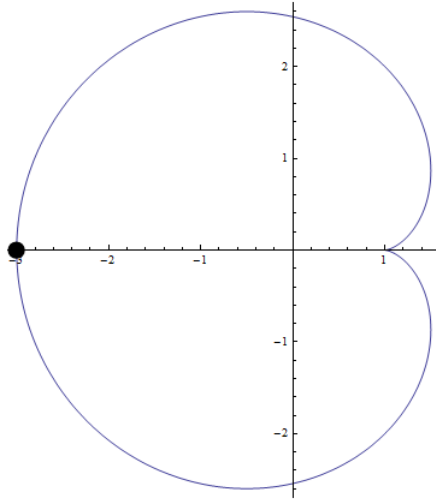


Рис. 8. Вершина при  $R_1 = R_0$ .

2.  $R_1 = (1/2)R_0$ ,  $a = 3$ . В этом случае кривая имеет уравнение

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = \frac{3}{2}r \cos t - \frac{r}{2} \cos 3t, \\ y = \frac{3}{2}r \sin t - \frac{r}{2} \sin 3t. \end{cases}$$

Уравнение (12) принимает вид

$$\sin^2 t \sin 2t = 0.$$

Его решения  $t = (\pi/2)k$  дают особые точки  $(\pm 1, 0)$  и вершины  $(0, \pm 2)$ , см. рис. 9.

3.  $R_1 = (1/3)R_0$ ,  $a = 4$ . В этом случае кривая имеет уравнение

$$\gamma(t) : \begin{cases} x = (4/3)r \cos t - (r/2) \cos 4t, \\ y = (4/3)r \sin t - (r/2) \sin 4t, \end{cases}$$

Уравнение (12) принимает вид

$$\sin^2(3/2)t \sin 3t = 0.$$

Его решения  $t = (\pi/3)k$  дают особые точки  $(\pm 1, 0)$  и вершины  $(0, \pm 2)$ , см. рис. 10.

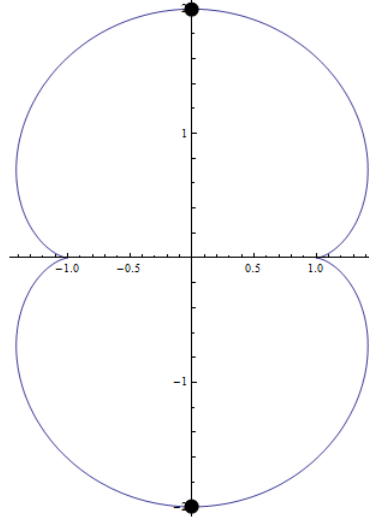


Рис. 9. Вершины при  $R_1 = (1/2)R_0$ .

### 3 Функция квадрата расстояния и кривизна

Пусть  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  — кривая единичной скорости и

$$f_d(s) = (\alpha(s) - u)(\alpha(s) - u)$$

— функция квадрата расстояния на кривой  $\alpha$  от точки  $u$ . Выразим производные функции  $f_d$  через векторы  $T$  и  $N$ , пользуясь формулами Серре–Френе (2). Имеем:

$$f'_d(s) = 2(\alpha - u)\alpha' = 2(\alpha - u)T,$$

$$f''_d(s) = 2T^2 + 2(\alpha - u)(\varkappa N) = 2 + 2\varkappa(\alpha - u)N,$$

$$f'''_d(s) = 2\varkappa'(\alpha - u)N - 2\varkappa^2(\alpha - u)T,$$

$$f_d^{(4)} = 2\varkappa''(\alpha - u)N + 2\varkappa'\alpha'N + 2\varkappa'(\alpha - u)(-\varkappa T) - 2\varkappa\varkappa'(\alpha - u)T - 2\varkappa^2\alpha'T - 2\varkappa^2(\alpha - u)(-\varkappa N) = -3\varkappa\varkappa'(\alpha - u)T - 2\varkappa^2 + 2(\varkappa'' - \varkappa^3)\alpha - u)N.$$

Запишем условия обращения в нуль первых нескольких производных от  $f$  по  $s$ .

$$f'_d(s) = 0 \iff \alpha - u = \lambda N \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$



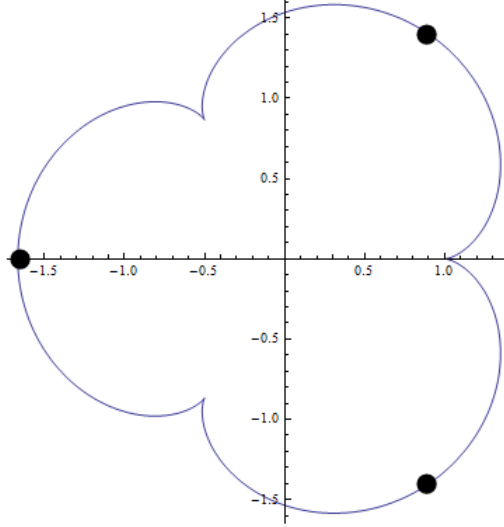


Рис. 10. Вершины при  $R_1 = (1/3)R_0$ .

то есть точка  $u$  лежит на нормали к  $\alpha$ , проходящей через точку  $\alpha(s)$ ;

$$f'_d(s) = f''_d(s) = 0 \iff \varkappa \neq 0, u = \alpha + N/\varkappa;$$

$$f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0 \iff \varkappa \neq 0, u = \alpha + N/\varkappa, \varkappa'(s) = 0.$$

Четыре первые производные обращаются в нуль

$$f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = f^{(4)}_d(s) = 0$$

тогда и только тогда, когда дополнительно к уже полученным выше условиям выполняется

$$-2\varkappa^2 + 2(\alpha - u)N(\varkappa'' - \varkappa^3) = 0,$$

что в силу того, что  $u - \alpha = N/\varkappa$ , эквивалентно обращению в нуль второй производной  $\varkappa''(s)$ .

В итоге получаем следующие утверждения.

**Предложение.** Если  $\varkappa(s) \neq 0$ , то существует единственная окружность, имеющая в точке  $\alpha(s)$  не менее чем трехточечное касание с  $\alpha$ . Ее центр расположен в точке

$$\alpha(s) + \frac{1}{\varkappa(s)}N(s).$$

Эта окружность называется соприкасающейся окружностью.

**Предложение.** Окружность из предыдущего предложения имеет не менее чем четырех-точечное касание с кривой  $\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\varkappa'(s) = 0$ .

Эта окружность имеет не менее чем пяти-точечное касание с кривой  $\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\varkappa'(s) = \varkappa''(s) = 0$ .

**Предложение.** Точка  $\alpha(s)$  является вершиной кривой  $\alpha$  тогда и только тогда, когда  $\varkappa(s) \neq 0$ ,  $\varkappa'(s) = 0$ .

**Предложение.** Пусть  $u = \alpha(s) + \lambda N(s)$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{R}$  и что  $\varkappa(s) > 0$ . Тогда функция  $f$  имеет в точке  $\alpha(s)$  максимум, если  $\lambda > 1/\varkappa(s)$  и минимум, если  $\lambda < 1/\varkappa(s)$ .

**Доказательство.** Имеем  $f_d''(s) = 2 + 2\varkappa(\alpha - u)N$ , поэтому

$$f_d''(s) < 0 \iff 1 + \varkappa(-\lambda) < 0 \iff \lambda > 1/\varkappa.$$

□

**Предложение.** Пусть  $\alpha(s)$  — простая вершина. Если кривизна имеет в точке  $\alpha(s)$  локальный максимум, то в некоторой окрестности точки  $\alpha(s)$  кривая расположена вне соприкасающейся окружности, а если кривизна имеет в точке  $\alpha(s)$  локальный минимум, то в некоторой окрестности точки  $\alpha(s)$  кривая расположена внутри соприкасающейся окружности.

**Доказательство.** Действительно, если  $u$  — центр соприкасающейся окружности, то четвертая производная функции квадрата расстояния имеет вид

$$f_d^{(4)} = -2\varkappa^2 - 2(\varkappa''/\varkappa) + 2\varkappa^2 = -2(\varkappa''/\varkappa).$$

Если  $\varkappa'' > 0$ , то  $f_d^{(4)} < 0$  и

$$(\alpha(s) - u)^2 = \frac{1}{\varkappa(s)^2} - \frac{1}{12} \frac{\varkappa''(s)}{\varkappa(s)} \Delta s^4 + \dots < \frac{1}{\varkappa(s)^2}, \quad (13)$$

то есть в точках минимума кривизны расстояние до кривой от центра кривизны меньше радиуса кривизны.

Если же  $\kappa'' < 0$ , то  $f_d^{(4)} > 0$  и в формуле (13) знак неравенства меняется на противоположный и расстояние до кривой от центра кривизны оказывается больше радиуса кривизны.  $\square$

В качестве примера могут служить соприкасающиеся окружности в вершинах эллипса, см. рис. 11.

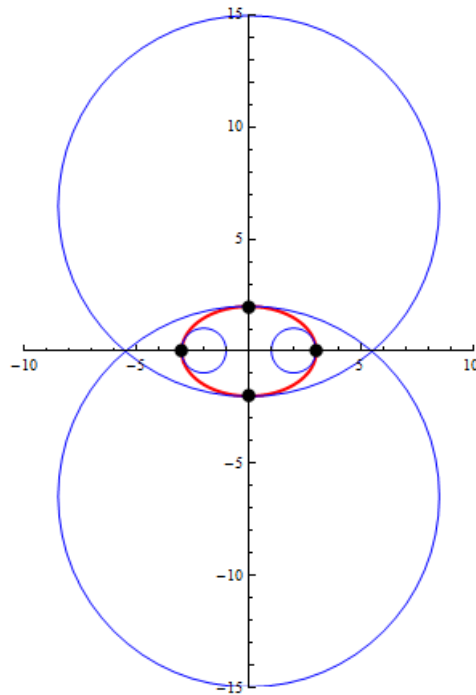


Рис. 11. Соприкасающиеся окружности в вершинах эллипса.

## 4 Функция квадрата расстояния на пространственной кривой

Пусть теперь  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  — это кривая единичной скорости в пространстве. Имеют место следующие формулы Серре–Френе:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s), \quad N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \quad B'(s) = -\tau(s)N(s),$$

где  $\tau(s)$  — это кручение кривой  $\gamma$ .

Аналогично предыдущему вычислим производные функции квадрата расстояния

$$f_d(s) = (\alpha(s) - u)^2 = (\alpha(s) - u)(\alpha(s) - u).$$

Имеем:

Продифференцировав формулу, получаем:

$$f'_d(s) = 2(\alpha - u)\alpha' = 2(\alpha - u)T,$$

$$f''_d(s) = 2 + 2(\alpha - u)\varkappa N,$$

$$f'''_d(s) = 2(\alpha - u)\varkappa' N + 2(\alpha - u)(-\varkappa T + \tau B)\varkappa.$$

Следовательно,

$$f'_d(s) = 0 \iff u = \lambda N + \mu B,$$

то есть  $u$  принадлежит нормальной плоскости в точке  $s$ ;

$$f'_d(s) = f''_d(s) = 0 \iff u = \alpha + \varkappa^{-1}N + \mu B$$

(в точке  $s$ ) при некотором  $\mu \in \mathbb{R}$ ;

$$f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0 \iff \tau \neq 0 \text{ и } u = \alpha + \frac{N}{\varkappa} - \frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \tau} B$$

при условии, что кручение не равно нулю. Либо, при  $\tau = \varkappa' = 0$ ,

$$u = \alpha + \frac{N}{\varkappa} + \mu B.$$

Функция квадрата расстояния от  $u$  измеряет степень касания кривой со сферой с центром в  $u$ , проходящей через данную точку кривой, поскольку она отличается лишь на константу от функции

$$g(s) = (\alpha(s) - u)^2 - (\alpha(s_0) - u)^2.$$

**Предложение.** Если  $\varkappa(s) \neq 0$  и  $\tau(s) \neq 0$ , то существует единственная сфера имеющая не менее чем четырех-точечное касание с кривой  $\alpha$  при данном значении параметра  $s$ .

Эта сфера называется *соприкасающейся сферой* (или сферой кривизны) в точке  $s$ , а ее центр  $u$  — центром сферической кривизны в точке  $s$ .

## Список литературы

- [1] Брус Д., Джиблин П. *Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей*. М.: Мир, 1988. 262 с.
- [2] Мищенко, А. С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. М.: Изд. Лань, 2010.
- [3] Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии*. М., 1958. 244 с.
- [4] Фавар Ж. *Курс локальной дифференциальной геометрии*. М., 1960. 558 с.
- [5] Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*.: Cambridge University Press, 1992.
- [6] Gray A., Abbena E., Salamon S. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*; Champman & Hall-CRC, 2006. 984p.
- [7] *Toponogov V. A. Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Birkhäuser, Boston, 2006.

# Приложение

## Построение вершин на улитках

```
{ParametricPlot[{Cos[t] + Cos[2 t] + 1, Sin[t] + Sin[2 t]},  
{t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  
  Epilog -> {PointSize[0.05], Point[{1, 0}], Point[{3, 0}]},  
ParametricPlot[{2 Cos[t] + Cos[2 t] + 1, 2 Sin[t] + Sin[2 t]},  
{t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  
  Epilog -> {PointSize[0.05], Point[{4, 0}]},  
ParametricPlot[{2.8 Cos[t] + Cos[2 t] + 1,  
  2.8 Sin[t] + Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  
  Epilog -> {PointSize[0.05], Point[{4.8, 0}], Point[{-0.8, 0}],  
    Point[{-1, 1}], Point[{-1, -1}]},  
ParametricPlot[{3.1 Cos[t] + Cos[2 t] + 1,  
  3.1 Sin[t] + Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  
  Epilog -> {PointSize[0.05], Point[{5.1, 0}], Point[{-1.1, 0}],  
    Point[{-1.2, 1}], Point[{-1.2, -1}]},  
ParametricPlot[{4 Cos[t] + Cos[2 t] + 1, 4 Sin[t] + Sin[2 t]},  
{t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> Thick,  
  Epilog -> {PointSize[0.05], Point[{6, 0}], Point[{-1.7, 2.1}],  
    Point[{-1.7, -2.1}]}}
```

## Построение вершин на эпициклоидах

```

R_1=R_0=r
D[{2 r Cos[t] - r Cos[2 t]}, {t, 1}]
D[{2 r Cos[t] - r Cos[2 t]}, {t, 2}]
D[{2 r Cos[t] - r Cos[2 t]}, {t, 3}]
D[{2 r Sin[t] - r Sin[2 t]}, {t, 1}]
D[{2 r Sin[t] - r Sin[2 t]}, {t, 2}]
D[{2 r Sin[t] - r Sin[2 t]}, {t, 3}]
mat = {{-Sin[t] + Sin[2 t], Cos[t] - Cos[2 t],
        0}, {-Cos[t] + 2 Cos[2 t], -Sin[t] + 2 Sin[2 t],
        2 Cos[t] - 2}, {Sin[t] - 4 Sin[2 t], - Cos[t] +
        4 Cos[2 t], -3 Sin[t]}};
FullSimplify[
  Det[mat]]
ParametricPlot[{2 Cos[t] - Cos[2 t], 2 Sin[t] - Sin[2 t]},
{t, 0, 2 Pi}, Epilog -> {PointSize[0.04], Point[{-3, 0}]}]
ParametricPlot[{2 Cos[t] - Cos[2 t], 2 Sin[t] - Sin[2 t]},
{t, 0, 2 Pi}, Epilog -> {PointSize[0.04],
  Point[{{-3, 0}, {1, 0}, {1, 2}, {1, -2}}]}}];
R_1=1/2R_0=1/2r
D[{3/2 r Cos[t] - r/2 Cos[3 t]}, {t, 1}]
D[{3/2 r Cos[t] - r/2 Cos[3 t]}, {t, 2}]
D[{3/2 r Cos[t] - r/2 Cos[3 t]}, {t, 3}]
D[{3/2 r Sin[t] - r /2 Sin[3 t]}, {t, 1}]
D[{3/2 r Sin[t] - r /2 Sin[3 t]}, {t, 2}]
D[{3/2 r Sin[t] - r /2 Sin[3 t]}, {t, 3}]

```

```

Expand[-((-3/2) r Sin[t] + 3/2 r Sin[3 t])^2 + (3/2 r Cos[t] -
3/2 r Cos[3 t])^2), t]
Expand[-3 ((-3/2) r Sin[t] + 3/2 r Sin[3 t]) (-3/2)
r Cos[t] +9/2 r Cos[3 t]) + (3/2 r Cos[t] -
3/2 r Cos[3 t]) (-3/2) r Sin[t] + 9/2 r Sin[3 t]), t]
D[{4/3 r Cos[t] - r/3 Cos[4 t]}, {t, 1}];
R_1=1/3R_0=1/3r
D[{4/3 r Cos[t] - r/3 Cos[4 t]}, {t, 2}]
D[{4/3 r Cos[t] - r/3 Cos[4 t]}, {t, 3}]
D[{4/3 r Sin[t] - r /3 Sin[4 t]}, {t, 1}]
D[{4/3 r Sin[t] - r /3 Sin[4 t]}, {t, 2}]
D[{4/3 r Sin[t] - r /3 Sin[4 t]}, {t, 3}]
Expand[-((-4/3) r Sin[t] + 4/3 r Sin[4 t])^2 + (4/3 r Cos[t] -
4/3 r Cos[4 t])^2), t]
Expand[-3 ((-4/3) r Sin[t] + 4/3 r Sin[4 t]) (-4/3) r Cos[t] +
16/3 r Cos[4 t]) + (4/3 r Cos[t] -
4/3 r Cos[4 t]) (-4/3) r Sin[t] + 16/3 r Sin[4 t]), t]
mat = {{-3/2) r Sin[t] + 3/2 r Sin[3 t],
3/2 r Cos[t] - 3/2 r Cos[3 t],
0}, {-3/2) r Cos[t] + 9/2 r Cos[3 t], -3/2) r Sin[t] +
9/2 r Sin[3 t], -9 r^2 Sin[t]^2}, {3/2 r Sin[t] -
27/2 r Sin[3 t], -3/2) r Cos[t] +
27/2 r Cos[3 t], -27 r^2 Cos[t] Sin[t]}};
FullSimplify[
Det[mat]]
ParametricPlot[{3/2 Cos[t] - 1/2 Cos[3 t],
3/2 Sin[t] - 1/2 Sin[3 t]}, {t, 0, 2 Pi},

```



```

Epilog -> {PointSize[0.04], Point[{{0, -2}, {0, 2}}]}]
mat = {{-(4/3) r Sin[t] + 4/3 r Sin[4 t],
        4/3 r Cos[t] - 4/3 r Cos[4 t],
        0}, {-(4/3) r Cos[t] + 16/3 r Cos[4 t], -(4/3) r Sin[t] +
        16/3 r Sin[4 t],
        32/9 r^2 (-1 + Cos[3 t])}, {4/3 r Sin[t] -
        64/3 r Sin[4 t], -(4/3) r Cos[t] +
        64/3 r Cos[4 t], -16 r^2 Sin[3 t]}};
FullSimplify[
  Det[mat]]
ParametricPlot[{{(4/3)*Cos[t] - (1/3)* Cos[4 t], (4/3)*
  Sin[t] - (1/3)* Sin[4 t]}, {t, 0, 2 Pi},
  Epilog -> {PointSize[0.04],
  Point[{{-1.65, 0}, {1.06*5/6, 1.06*(1/6 + 2/Sqrt[3])},
  {1.06*5/6, 1.06*(-1/6 - 2/Sqrt[3])}}]}]}]

```

## Соприкасающиеся окружности эллипса

```
u[t_] = (Sqrt[2]/2) + (Sqrt[402]/8) Cos[t];
v[t_] = (-13 Sqrt[2]/8) + (Sqrt[402]/8) Sin[t];
okr[t_] = \[Sqrt]((3*Cos[t] - 2 Cos[t]^3)^2 + (2 Sin[t] +
    13/2*Sin[t]^3)^2);
plot1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 Pi},
    PlotRange -> {{-10, 10}, {-15, 15}}, PlotStyle -> {Red, Thick},
    Epilog -> {PointSize[0.03],
    Point[{{0, 2}, {0, -2}, {3, 0}, {-3, 0}}]};
plot2 = ParametricPlot[{w[t], q[t]}, {t, 0, 2 Pi},
    PlotRange -> {{-10, 10}, {-15, 15}}, PlotStyle -> Thick];
plot3 =
    Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Circle[{w[Pi/2], q[Pi/2]},
    okr[Pi/2]]};
plot4 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
    Circle[{w[-Pi/2], q[-Pi/2]}, okr[-Pi/2]]};
plot5 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
    Circle[{w[2 Pi], q[2 Pi]}, okr[2 Pi]]};
plot6 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Circle[{w[Pi], q[Pi]},
    okr[Pi]]};
Show[{plot1, plot3, plot4, plot5, plot6}]
```