Известия вузов. Математика
2019, № 10, с. 28–37

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.А. ЗАИТОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОДПРОСТРАНСТВА $P_f(X)$ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Аннотация. В работе доказано, что для компакта X пространство $P_f(X)$ является абсолютным окрестностным ретрактом тогда и только тогда, когда X является абсолютным окрестностным ретрактом. Показано, что функтор P_f сохраняет свойство компакта быть Q-многообразием или гильбертовым кирпичом, сохраняет свойство слоев отображений быть абсолютным окрестностным ретрактом в классе компактов, компактным Q-многообразием и гильбертовым кирпичом (конечной суммой гильбертовых кирпичей).

Ключевые слова: вероятностная мера, компактное Хаусдорфово пространство (компакт), ретракт, $A(N)R$-пространство.

УДК: 515.12

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-28-37

Введение

Построение общей теории бесконечномерных пространств (многообразий) повысило интерес к бесконечномерным объектам. Функтор P, переводящий произвольные компакты в выпуклые подмножества локально выпуклых пространств, поставляет такие объекты. Систематическое изучение ковариантных нормальных функторов восходит к работе [1], где выделены элементарные свойства функторов и введено понятие нормального функтора ([1], с. 17). Исследование вероятностных мер ведется на стыке по крайней мере трех математических дисциплин: топологии, функционального анализа и теории вероятностей. Этим объясняется разнообразие применяемых методов и большие возможности для приложений получаемых результатов.

Приведем необходимые понятия и факты. Напомним (например, [1], [2]), что для компакта X через $C(X)$ обозначают банахову алгебру непрерывных функций $\varphi : X \to \mathbb{R}$, снабженную поточечными алгебраическими операциями и нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)| : \ x \in X\}$. Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется *нормированным*, если $\mu(c_X) = c$, где c_X — постоянная функция, везде на X принимающая значение $c \in \mathbb{R}$. Линейный, неотрицательный и нормированный функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется *вероятностной мерой* на X. Множество всех вероятностных мер на X обозначают через $P(X)$. Легко видеть, что линейный неотрицательный функционал (в частности, вероятностная мера) μ сохраняет порядок, т. е. неравенство $\varphi \le \psi$ влечет $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$, $\varphi, \psi \in C(X)$. Поэтому, так как для всякой $\varphi \in C(X)$ справедливо $-\|\varphi\| \le \varphi \le \|\varphi\|$, то для каждой $\mu \in P(X)$ имеем $\mu(\varphi) \in [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$. Следовательно, $P(X) \subset \prod\limits_{\varphi \in C(X)} [-\|\varphi\|, \|\varphi\|] \subset \mathbb{R}^{C(X)}$. Рассмотрим $P(X)$ как подпространство

Поступила в редакцию 05.09.2018, после доработки 15.11.18. Принята к публикации 19.12.2018.

тихоновского произведения $\mathbb{R}^{C(X)}$ числовых прямых. Базу окрестностей меры $\mu \in P(X)$ образуют [2] множества вида

$$\langle \mu;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n;\ \varepsilon \rangle = \{\nu \in P(X) :\ |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Эту топологию называют *топологией поточечной сходимости*. Известно [2], что для компакта X пространство $P(X)$, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение компактов. Отображение $P(f) : P(X) \to P(Y)$, определенное равенством $P(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$, $\varphi \in C(X)$, непрерывно [1], [2]. Значит, операция P является функтором, действующим в категории Comp компактов и их непрерывных отображений. Отметим, что компакты являются объектами, а непрерывные отображения — морфизмами категории Comp. Таким образом, функтор P объект X категории Comp переводит в объект $P(X)$ этой же категории, и морфизм $f : X \to Y$ категории Comp — в морфизм $P(f) : P(X) \to P(Y)$ этой же категории.

Так как функтор P нормален, то функтор P вложение $i : A \hookrightarrow X$ переводит во вложение $P(i) : P(A) \hookrightarrow P(X)$. Иными словами, если A — замкнутое подмножество компакта X, то $P(A)$ – также замкнутое подмножество компакта $P(X)$. Вероятностная мера $\mu \in P(X)$ *сосредоточена* [2] на замкнутом подмножестве A компакта X, если $\mu(\varphi) = 0$ для всякой непрерывной функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ такой, что $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in A$. Вероятностная мера $\mu \in P(X)$ сосредоточена на замкнутом подмножестве A компакта X тогда и только тогда, когда $\mu \in P(A)$. Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера μ, называется ее *носителем* и обозначается $\operatorname{supp} \mu$. Нормальность P влечет, что функтор P сохраняет пересечения замкнутых подмножеств. Отсюда

$$\operatorname{supp} \mu = \cap\{A : A \text{ замкнуто в } X \text{ и } \mu \in P(A)\}.$$

Если носитель меры μ состоит из конечного числа элементов из X, то говорят, что μ — мера с конечным носителем. Пусть $\operatorname{supp} \mu = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда она представляется в виде аффинных комбинаций мер Дирака $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ единственным образом (с точностью до перестановок слагаемых)

$$\mu = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_n \delta_{x_n}.$$

Здесь $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, и $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Число α_i называется *барицентрической массой*, расположенной в точке x_i, $i = 1, \dots, n$. Для точки $x \in X$ мера Дирака δ_x определяется по правилу $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$. Мера Дирака δ_x сосредоточена на одноточечном множестве $\{x\}$. Через $\delta(X)$ обозначают множество всех мер Дирака на X.

Для компакта X, натурального числа n определим множество

$$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\operatorname{supp} \mu| \leq n\}.$$

Положим $P_\omega(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(X)$.

Для фиксированного натурального числа n конструкция P_n является [3] ковариантным функтором, действующим в категории компактов и их непрерывных отображений. При этом для непрерывного отображения $f : X \to Y$ компактов отображение $P_n(f) : P_n(X) \to P_n(Y)$ определяется как сужение $P_n(f) = P(f)B\Big|_{P_n(X)}$ (поэтому оно непрерывно).

Пусть X — некоторый компакт, F — функтор и $x \in F(X)$. *Степенью точки* x (обозначается $\deg(x)$) называется ([1], с. 19, определение 16) такое наименьшее натуральное число n, что x принадлежит образу $F(f)(K)$ для некоторого отображения $f : K \to X$ n-точечного пространства K. Если такое конечное n не существует, то степень x считается *бесконечной*.

Степенью функтора F называется максимум степеней всевозможных точек $x \in F(X)$ для всевозможных компактов X и обозначается $\deg F$. Легко видеть, что для каждого натурального числа n $\deg P_n = n$. Е.В. Щепиным введен функтор P_f, для которого $\deg P_f = \infty$.

Приведем конструкцию функтора P_f. Для компакта X множество $P_f(X)$ состоит из мер, носители которых конечны, причем если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, \dots, x_n$, то барицентрическая масса одной из этих точек не меньше $1 - \frac{1}{n+1}$. По определению

$$P_f(X) = \Big\{\mu \in P_\omega(X) : \quad \text{если} \quad \operatorname{supp}\mu = \{x_1, \dots, x_n\},$$
$$\text{то существует} \quad i_0 \in \{1, \dots, n\} \quad \text{такое, что} \quad \alpha_{i_0} \geq 1 - \frac{1}{n+1}\Big\}.$$

Категорные свойства функтора P_f исследованы в работах [3]–[6]. В частности показано, что функтор $P_f : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ является нормальным подфунктором функтора P вероятностных мер. Это означает, что для компакта X пространство $P_f(X)$ является компактом, лежащим в $P(X)$, и для непрерывного отображения $f : X \to Y$ отображение $P_f(f) : P_f(X) \to P_f(Y)$, определенное равенством $P_f(f)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$, является непрерывным и совпадает с сужением $P(f)\Big|_{P_f(X)}$.

По построению имеем $\delta(X) \subset P_f(X) \subset P_\omega(X)$. Иными словами, каждая мера Дирака на X является элементом $P_f(X)$ и каждая мера из $P_f(X)$ является мерой с конечным носителем. С другой стороны, $\deg P_f = \infty$. Это явление вызывает интерес к исследованию функтора P_f, однако не существует ретракции компактов вида $P_n(X)$, $n > 1$, на компакт X, хотя каждый компакт X является ретрактом компакта $P_f(X)$ (см. предложение 1).

1. Стягиваемость пространства вероятностных мер

Пусть X и Y — два компакта, лежащие в пространствах M и N соответственно, где $M, N \in AR$ (т. е. пространства M и N являются абсолютными ретрактами компактных хаусдорфовых пространств). Последовательность отображений $f_k : M \to N$, $k = 1, 2, \dots$, назовем [7] *фундаментальной последовательностью* из X в Y, если для каждой окрестности V компакта Y (в N) существует такая окрестность U компакта X (в M), что $f_k|_U = f_{k+1}|_U$ в V почти для всех k. Это значит, что существует такая гомотопия $f_k : U \times [0,1] \to V$, что $f_k(x, 0) = f_k(x)$ и $f_{k+1}(x, 1) = f_{k+1}(x)$ для всех $x \in U$. Эту фундаментальную последовательность будем обозначать через $\{f_k, X, Y\}$ или коротко через f, и будем писать $f : X \to Y$.

Скажем, что фундаментальная последовательность $f = \{f_k, X, Y\}$ порождена отображением $f : X \to Y$, если $f_k(x) = f(x)$ для всех $x \in X$ и для всех $k = 1, 2, \dots$.

Скажем, что пространства X и Y фундаментально эквивалентны, если существуют такие две фундаментальные последовательности $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что $gf = \mathrm{id}_X$ и $fg = \mathrm{id}_Y$.

Отношение фундаментальной эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому класс всех пространств распадается на попарно не пересекающиеся классы пространств, которые называются *шейпами*. Следовательно, два пространства принадлежат одному и тому же шейпу тогда и только тогда, когда они фундаментально эквивалентны. Шейп, содержащий пространство X, называют [8] *шейпом пространства* X и обозначают через $Sh(X)$. Известно, что для двух окрестностных ретрактов A и B справедливо $Sh(A) = Sh(B)$ тогда и только тогда, когда они гомотопически эквивалетны.

Напомним, что отображение $f : X \to Y$ называется *клеточно-подобным* (кратко CE) [7], если для любого компакта $A \subset Y$ прообраз $f^{-1}(A)$ является компактом и для каждой точки

$y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ имеет шейп точки (т. е. прообраз $f^{-1}(y)$ гомотопически эквивалентен точке).

Если $r : X \to F$ — ретракция и существует такая гомотопия $h : X \times [0,1] \to F$, что $h(x,0) = x$, $h(x,1) = r(x)$ для всех $x \in X$, то r называют *деформационной ретракцией*, а F — деформационным ретрактом пространства X. Деформационная ретракция $r : X \to F$ называется *сильно деформационной ретракцией*, если для гомотопии $h : X \times [0,1] \to F$ имеем $h(x,t) = x$ для всех $x \in F$ и всех $t \in [0,1]$ [8].

Возьмем произвольную меру $\mu \in P_f(X)$, $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i}$. Пусть $m_{i_0} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$. Мере μ сопоставим точку $\delta_{x_{i_0}}$ из $\delta(X)$. Полученное соответствие обозначим через r_δ^f.

Теорема 1. *Для произвольного компакта X отображение $r_\delta^f : P_f(X) \to \delta(X)$ является непрерывной, открытой, клеточноподобной (все слои стягиваемые) ретракцией.*

Доказательство. По построению $\left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_z) \cap \left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_y) = \varnothing$ при $y \neq z$, $y, z \in X$. Поэтому отображение $r_\delta^f : P_f(X) \to \delta(X)$ определено корректно. Ясно, что $r_\delta^f(\delta_x) = \delta_x$ для каждой $x \in X$, т. е. точки пространства $\delta(X)$ при отображении $r_\delta^f : P_f(X) \to \delta(X)$ остаются неподвижными. Этим установлено, что r_δ^f — ретракция.

Ясно, что слой $\left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$ компактен для каждой $x \in X$. С другой стороны, для каждой меры $\mu \in \left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$ отрезок $[\mu, \delta_x] = \{\alpha\delta_x + (1-\alpha)\mu : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ лежит в слое $\left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$.

Фиксируем слой $\left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$ и определим отображение $h : \left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x) \times [0,1] \to \left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$ по правилу $h(\mu, t) = (1-t)\delta_x + t\mu$, где $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \delta_i \in \left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$ и $t \in [0,1]$.

Отображение h является гомотопией, связывающей стационарное отображение

$$h_0 : \left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x) \to \{\delta_x\}$$

и тождественное отображение $h_1 = \mathrm{id}_{\left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)}$. Значит, каждый прообраз $\left(r_\delta^f\right)^{-1}(\delta_x)$, $x \in X$, имеет шейп точки, т. е. ретракция r_δ^f клеточноподобная. Более того, эти прообразы стягиваются к точке.

Покажем, что отображение $r_\delta^f : P_f(X) \to \delta(X)$ непрерывно. Отметим, что при варьировании мер $\mu_0 \in P(X)$, конечных $\{U_1, \ldots, U_n\}$ совокупностей ко-нуль (соответственно открытых) множеств U_i пространства (соответственно компакта) X и чисел $\varepsilon > 0$ семейство множеств вида

$$\langle \mu_0; U_1, \ldots, U_n; \varepsilon \rangle = \{\mu \in P(X) : \mu(U_i) - \mu_0(U_i) > -\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

образует [9] базу топологии слабой сходимости пространства $P(X)$.

Ясно, что $r_\delta^f(\langle \delta_x; U_1, \ldots, U_n; \varepsilon \rangle \cap \delta(X)) = \langle \delta_x; U_1, \ldots, U_n; \varepsilon \rangle \cap \delta(X)$, т. е. $r_\delta^f|_{\delta(X)}$ — открытое отображение. Поэтому далее будем рассматривать меры, носители которых состоят не менее чем из двух точек, а также (не ограничивая общности) будем считать, что $\varepsilon < 1/3$.

Пусть $\mu_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_{0i} \delta_{x_i} \in P_f(X)$, $m_{0i_0} \geq 1 - \frac{1}{k+1}$, $r_\delta^f(\mu_0) = \delta_{x_{i_0}}$. Пусть V — открытое множество такое, что $r_\delta^f(\mu_0) \in \langle V \rangle = \{\delta_x : \delta_x(V) > 0\}$.

Рассмотрим (предбазисную) окрестность

$$\langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle = \{\mu \in P(X) : \mu(V) - \mu_0(V) > -\varepsilon\} \cap P_f(X)$$

меры μ_0, где $0 < \varepsilon < 1/3$.

Пусть $\mu = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i \delta_{x_i} \in \langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle$. По построению $m_{i'} \geq 1 - \frac{1}{l+1}$ для некоторого i'. Ясно, что $\mu(V) \geq m_{i'} \geq 1 - \frac{1}{l+1}$ тогда и только тогда, когда $x_{i'} \in V$. При $x_{i'} \notin V$ имеем $\mu(V) \leq \frac{1}{l+1}$, и, следовательно, $\mu(V) - \mu_0(V) \leq \frac{1}{l+1} - \frac{k}{k+1} \leq -\frac{1}{3} < -\varepsilon$, вопреки $\mu \in \langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle$. Отсюда $x_{i'} \in V$, т. е. $r_\delta^f(\mu) = \delta_{x_{i'}} \in \langle V \rangle$. Иными словами, установлено, что $r_\delta^f(\langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle) \subset \langle V \rangle$. Таким образом, отображение r_δ^f непрерывно.

Покажем, что $r_\delta^f(\langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle) = \langle V \rangle = \{\delta_x : \delta_x(V) > 0\}$. Для произвольной точки $x \in V$ построим меру $\mu_x = m_{0i_0}\delta_x + \sum\limits_{\substack{i=1,\\ i \neq i_0}}^{k} m_{0i}\delta_{x_i}$. Тогда $\mu_0(V) - \mu_x(V) = 0$ и, следовательно, $\mu_x \in \langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Иными словами, для каждой $\delta_x \in \langle V \rangle$ установлено, что $(r_\delta^f)^{-1}(\delta_x) \cap \langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle \neq \varnothing$. Поэтому $r_\delta^f(\langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle) = \langle V \rangle$ и образ $r_\delta^f(\langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle)$ открытого в $P_f(X)$ множества $\langle \mu_0; V; \varepsilon \rangle$ открыт в $\delta(X)$. □

Предложение 1. *Для произвольного компакта X подпространство $\delta(X)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $P_f(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $h : P_f(X) \times [0,1] \to P_f(X)$, определенное корректно формулой

$$h(\mu, t) = h_t(\mu) = (1-t) \cdot \mu + t \cdot r_\delta^f(\mu), \quad (\mu, t) \in P_f(X) \times [0,1].$$

Отметим, что $h_0 = \mathrm{id}_{P_f(X)}$ и $h_1 = r_\delta^f$, т. е. h — гомотопия, связывающая отображения $\mathrm{id}_{P_f(X)}$ и r_δ^f. Далее, имеем

$$h(\delta_x, t) = (1-t) \cdot \delta_x + t \cdot r_\delta^f(\delta_x) = (1-t) \cdot \delta_x + t \cdot \delta_x = \delta_x,$$

т. е. $h_t(\delta_x) = \delta_x$ для всех $\delta_x \in \delta(X)$ и $t \in [0,1]$. Таким образом, $\delta(X)$ является сильным деформационным ретрактом компакта $P_f(X)$. □

Предложение 2. *Для любого конечного компакта X множество $P_f(X)$ является окрестностным ретрактом компакта $P(X)$.*

Доказательство. Для каждой меры Дирака δ_x, $x \in X$, построим окрестность

$$\Big\langle \delta_x; 1/2 \Big\rangle = \Big\{\mu \in P(X) : \mu(U) > 1/2 \ \text{ для всякого открытого множества } \ U \ni x\Big\}$$

и рассмотрим открытое в $P(X)$ множество $\bigcup\limits_{x \in X} \langle \delta_x; 1/2 \rangle$. Ясно, что $P_f(X) \subset \bigcup\limits_{x \in X} \langle \delta_x; 1/2 \rangle$. Кроме того, $\langle \delta_x; 1/2 \rangle \cap \langle \delta_y; 1/2 \rangle = \varnothing$ при $x \neq y$. Действительно, пусть $x \neq y$ и $\mu \in \langle \delta_x; 1/2 \rangle \cap \langle \delta_y; 1/2 \rangle$. Тогда $\mu(U) > 1/2$ и $\mu(V) > 1/2$ для всех открытых $U \ni x$ и $V \ni y$. Пусть U и V — непересекающиеся, содержащие соответственно x и y открытые множества. Имеем $\mu(U) > 1/2$ и $\mu(V) > 1/2$. Следовательно, $\mu(X) \geq \mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V) > 1/2 + 1/2 = 1$ вопреки $\mu \in P(X)$. Значит, $\langle \delta_x; 1/2 \rangle \cap \langle \delta_y; 1/2 \rangle = \varnothing$ при $x \neq y$.

Покажем, что $P_f(X)$ — ретракт множества $\bigcup\limits_{x\in X}\langle\delta_x;1/2\rangle$. Если $\nu\in\bigcup\limits_{x\in X}\langle\delta_x;1/2\rangle$, где $\nu=\sum\limits_{i=1}^{n}n_i\delta_{x_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}n_i=1$, $n_i\geq 0$, $i=1,\dots,n$, то очевидно $n_{i_0}>1/2$ для некоторого (единственного) i_0 и, следовательно, $r_\delta^f(\nu)=\delta_{x_{i_0}}$. Определим отображение $r:\bigcup\limits_{x\in X}\langle\delta_x;U;1/2\rangle\to P_f(X)$ по правилу

$$r(\nu)=\begin{cases}\frac{n}{n+1}\cdot\delta_{x_{i_0}}+\sum\limits_{\substack{i=1,\\ i\neq i_0}}^{n}\frac{n_i}{(n+1)(1-n_{i_0})}\delta_{x_i}, & \text{если } n_{i_0}<\frac{n}{n+1};\\ \sum\limits_{i=1}^{n}n_i\delta_{x_i}, & \text{если } n_{i_0}\geqslant\frac{n}{n+1}.\end{cases}$$

Отображение r определено корректно. Оно непрерывно. Кроме того, $r(\mu)=\mu$ для любой меры $\mu\in P_f(X)$. Значит, отображение r является ретракцией. □

Напомним [7], что множество $A\subset X$ называется *стягиваемым по пространству X во множество $B\subset X$*, если вложение $i_A:A\to X$ гомотопно такому отображению $f:A\to X$, что $f(A)\subset B$. Если при этом B состоит из одной точки, то говорят, что A *стягиваемо* по X.

Если существует гомотопия $h:A\times I\to A$ такая, что $h(y,0)=i_A$, и $h(y,1)=\{\text{точка}\}$, то A стягивемо по X.

Пространство X называется *локально стягиваемым в точке $x_0\in X$*, если всякая окрестность U точки x_0 содержит окрестность U_0, стягиваемую по U к точке. Пространство X называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

Теорема 2. *Функтор P_f сохраняет стягиваемость компактов, т. е. если X — стягиваемый компакт, то $P_f(X)$ — также стягиваемый компакт.*

Доказательство. Покажем больше: функтор P_f сохраняет гомотопность отображений. Пусть $h_0,h_1:X\to Y$ — гомотопные отображения, $h:X\times[0,1]\to Y$ — гомотопия, связывающая отображения h_0, h_1, т. е. $h(x,0)=h_0(x)$, $h(x,1)=h_1(x)$. Вложение $i_{t_0}:X\times\{t_0\}\to X\times I$, определенное равенством $i_{t_0}(x)=(x,t_0)$, $x\in X$, определяет вложение $P_f(i_{t_0}):P_f(X\times\{t_0\})\to P_f(X\times I)$. Для каждого $t_0\in[0,1]$ пространство $P_f(X\times\{t_0\})$ естественно гомеоморфно $P_f(X)\times\{t_0\}$. Этот гомеоморфизм можно осуществить, как легко видеть, с помощью соответствия $\mu_{t_0}\leftrightarrow(\mu,t_0)$, где $\mu_{t_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\delta_{(x_i,t_0)}\in P_f(X\times\{t_0\})$ и $\mu=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i}\in P_f(X)$.

Определим отображение $P_f(h):P_f(X)\times[0,1]\to P_f(Y)$ равенством

$$P_f(h)\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i},t\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{h(x_i,t)}.$$

Имеем

$$P_f(h)\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i},0\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{h(x_i,0)}=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{h_0(x_i)}=P_f(h_0)\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i}\right),$$

$$P_f(h)\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i},1\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{h(x_i,1)}=\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{h_1(x_i)}=P_f(h_1)\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_{x_i}\right),$$

т. е. $P_f(h)(\mu,0)=P_f(h_0)(\mu)$ и $P_f(h)(\mu,1)=P_f(h_1)(\mu)$ для любой $\mu\in P_f(X)$. Иными словами, $P_f(h)$ — гомотопия, связывающая отображения $P_f(h_0)$ и $P_f(h_1)$. Таким образом, функтор P_f сохраняет гомотопность отображений. □

2. Абсолютные окрестностные ретракты компактов и функтор P_f

Лемма. *Для компакта X множество $P_f(X)$ является окрестностным ретрактом пространства $P_\omega(X)$.*

Доказательство. Построим следующие подмножества:

$$P_{\delta/2}(X) = \{\delta_x/2 + \delta_y/2 : x, y \in X, x \neq y\} \subset P_2(X),$$

$$P_{\omega/2}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i \mu_i : \mu_i \in P_{\delta/2}(X); \sum_{i=1}^{n} m_i = 1, m_i \geq 0 \right\} \subset P_\omega(X).$$

Утверждение 1. *Для компакта X множество $P_{\frac{\delta}{2}}(X)$ является компактом.*

Доказательство. Пусть $\xi = \theta\delta_x + (1-\theta)\delta_y \in \left[P_{\frac{\delta}{2}}(X)\right]_{P_2(X)}$, $0 < \theta < 1$. Тогда существует сеть $\{\xi_\alpha = \delta_{x_\alpha}/2 + \delta_{y_\alpha}/2\} \subset P_{\delta/2}(X)$, сходящаяся к ξ относительно топологии слабой сходимости, т. е. $\xi_\alpha(\varphi) \underset{\alpha}{\to} \xi(\varphi)$ для всех функций $\varphi \in C(X)$. Так как $x \neq y$, то в силу хаусдорфовости пространства X существуют окрестности Ox и Oy такие, что $Ox \cap Oy = \varnothing$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\{x_\alpha\} \subset Ox$ и $\{y_\alpha\} \subset Oy$. Рассмотрим функцию $\varphi \in C(X)$ такую, что $\varphi(x) = \varphi(x_\alpha) = 1$, $\varphi(y) = \varphi(y_\alpha) = 0$ при всех α. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс $\alpha(\varepsilon)$, что $|(\xi - \xi_\alpha)(\varphi)| < \varepsilon$, при всех $\alpha \succ \alpha(\varepsilon)$. Отсюда

$$|(\theta\delta_x + (1-\theta)\delta_y - \delta_{x_\alpha}/2 - \delta_{y_\alpha}/2)(\varphi)| = |\theta - 1/2| < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε и из того, что правая часть последнего равенства не зависит от α, вытекает равенство $\theta = 1/2$. Следовательно, $\xi = \delta_x/2 + \delta_y/2 \in P_{\delta/2}(X)$. Отсюда $\left[P_{\delta/2}(X)\right]_{P_2(X)} \subset P_{\delta/2}(X)$, т. е. $P_{\delta/2}(X)$ замкнуто в $P_2(X)$. Так как $P_2(X)$ — компакт, то $P_{\delta/2}(X)$ — также компакт. □

Утверждение 2. *Множество $P_{\omega/2}(X)$ замкнуто в $P_\omega(X)$.*

Доказательство. Пусть $\mu = \sum\limits_{k=1}^{s} m_k \delta_{x_k} \in \left[P_{\omega/2}(X)\right]_{P_\omega(X)}$, и $\{\mu_\alpha\} \subset P_{\omega/2}(X)$ — сеть, сходящаяся к μ относительно топологии слабой сходимости, т. е. $\mu_\alpha(\varphi) \to \mu(\varphi)$ для всех функций $\varphi \in C(X)$. Пусть $\mu_\alpha = \sum\limits_{j=1}^{s_\alpha} m^\alpha_{klj} \left(\delta_{x^\alpha_{kj}}/2 + \delta_{x^\alpha_{lj}}/2\right)$, где $\{x^\alpha_{kj}\} \subset X$ — сеть, сходящаяся к x_k относительно топологии пространства X, где $k, l \in \{1, \ldots, s\}$, $m^\alpha_{klj} = m^\alpha_{lkj}$, $x^\alpha_{kj} \neq x^\alpha_{lj}$ при $k \neq l$. Отметим, что к одной и той же точке x_k может сходиться несколько сетей, например, $x^\alpha_{kj_1} \longrightarrow_\alpha x_k$, $x^\alpha_{kj_2} \longrightarrow_\alpha x_k$, и так далее. Также может случиться, что сеть стационарная. Так как $x_k \neq x_l$ при $k \neq l$, то в силу хаусдорфовости пространства X существуют окрестности Ox_k точек x_k, $k = 1, \ldots, s$, такие, что $Ox_k \cap Ox_l = \varnothing$ при $k \neq l$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\left\{x^\alpha_{kj}\right\}_\alpha \subset Ox_k$, $k = 1, \ldots, s$, $j \in \{1, \ldots, s_\alpha\}$. Имеем $\mu_\alpha = \sum\limits_{j=1}^{s_\alpha} m^\alpha_{klj} \left(\delta_{x^\alpha_{kj}}/2 + \delta_{x^\alpha_{lj}}/2\right) = \sum\limits_{k=1}^{s} \left(\sum\limits_{l} m^\alpha_{klj}/2\right) \delta_{x^\alpha_{kj}}$. Рассмотрим функцию $\varphi \in C(X)$ такую, что $\varphi(x_k) = \varphi\left(x^\alpha_{kj}\right) = \operatorname{sign}\left(m_k - \left(\sum\limits_{j,l} m^\alpha_{klj}/2\right)\right)$ при всех α. Здесь $k = 1, \ldots, s$,

$l \in \{1,\dots,s\}\setminus\{k\}$, $j \in \{1,\dots,s_\alpha\}$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс $\alpha(\varepsilon)$, что

$$|(\mu-\mu_\alpha)(\varphi)| = \left|\left(\sum_{k=1}^{s} m_k\delta_{x_k} - \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j,l} m^\alpha_{klj}/2\right)\delta_{x^\alpha_{kj}}\right)(\varphi)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{s} m_k\varphi(x_k) - \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j,l} m^\alpha_{klj}/2\right)\varphi\left(x^\alpha_{kj}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{s}\left(m_k - \sum_{j,l} m^\alpha_{klj}/2\right)\varphi\left(x_k\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{s}\left|m_k - \sum_{j,l} m^\alpha_{klj}/2\right|\right| = \sum_{k=1}^{s}\left|m_k - \sum_{j,l} m^\alpha_{klj}/2\right| < \varepsilon$$

при $\alpha \succ \alpha(\varepsilon)$. Значит, $m_k = \lim\limits_\alpha \sum\limits_{j,l} m^\alpha_{klj}/2$, $k = 1,\dots,s$, $l \in \{1,\dots,s\}\setminus\{k\}$, $j \in \{1,\dots,s_\alpha\}$. Положим $\lim\limits_\alpha m^\alpha_{klj} = m_{klj}$, $m_{kl} = \sum\limits_j m_{klj}$. Тогда $m_k = \sum\limits_l m_{kl}/2$, $k = 1,\dots,s$, $l \in \{1,\dots,s\}\setminus\{k\}$. Следовательно,

$$\mu = \sum_{k=1}^{s} m_k\delta_{x_k} = \sum_{k=1}^{s}\Big(\sum_l m_{kl}/2\Big)\delta_{x_k} = \sum_{k,l} m_{kl}\left(\delta_{x_k}/2 + \delta_{x_l}/2\right),$$

т. е. $\mu \in P_{\omega/2}(X)$. Таким образом, $P_{\omega/2}(X)$ замкнуто в $P_\omega(X)$. □

Утверждение 3. *Пусть $\mu = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i\delta_{x_i} \in P_\omega(X)$. Включение $\mu \in P_{\omega/2}(X)$ справедливо тогда и только тогда, когда $m_i \le 1/2$ при всех $i = 1,\dots,s$.*

Доказательство. По построению каждая мера $\mu \in P_{\omega/2}(X)$ представляется в виде $\mu = \sum\limits_{1\le i,j\le s} m_{ij}\left(\delta_{x_i}/2 + \delta_{x_j}/2\right)$. Так как $m_{ij} = m_{ji}$, то имеем $\mu = \sum\limits_{i=1}^{s}\Big(\sum\limits_j m_{ij}/2\Big)\delta_{x_i}$. Обозначая $m_i = \frac{1}{2}\sum\limits_j m_{ij}$ и имея в виду $\sum\limits_j m_{ij} \le \sum\limits_{1\le i,j\le s} m_{ij} = 1$, получим $m_i \le 1/2$ для всех $i = 1,\dots,s$.

Пусть теперь $\mu = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i\delta_{x_i} \in P_\omega(X)$ и $m_i \le 1/2$ для всех $i = 1,\dots,s$. Фиксируем множество $\{x_1,\dots,x_k\}$. Тогда точки вида $\delta_{x_i}/2 + \delta_{x_j}/2$, $i,j \in \{1,\dots,k\}$ являются вершинами выпуклого множества, образованного аффинной комбинацией $\sum_{i=1}^{s} m_i\delta_{x_i}$ мер Дирака δ_{x_i} и чисел m_i, $0 \le m_i \le 1/2$, $i = 1,\dots,k$, $\sum_{i=1}^{s} m_i = 1$. Следовательно, $\mu \in P_{\omega/2}(X)$. □

Переходим теперь к доказательству леммы. Множество $P_\omega(X)\setminus P_{\omega/2}(X)$ открыто в $P_\omega(X)$ и $P_f(X) \subset P_\omega(X)\setminus P_{\omega/2}(X)$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\delta_{x_i} \in P_{\omega/2}(X)$. Тогда $\alpha_{i_0} > \frac{1}{2}$ для некоторого (единственного) $i_0 \in \{1,\dots,m\}$. Построим отображение $r : P_\omega(X)\setminus P_{\omega/2}(X) \to P_f(X)$ следующим образом:

$$r\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{x_i}\right) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}\cdot\delta_{x_{i_0}} + \sum_{\substack{i=1,\\ i\ne i_0}}^{n}\frac{\alpha_i}{(n+1)(1-\alpha_{i_0})}\delta_{x_i}, & \text{если } \alpha_{i_0} < \frac{n}{n+1};\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{x_i}, & \text{если } \alpha_{i_0} \geqslant \frac{n}{n+1}. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение r является ретракцией. □

Теорема 3. *Пусть X — $A(N)R$-компакт. Тогда $P_f(X)$ — ANR-компакт.*

Доказательство. Пусть X — окрестностный ретракт некоторого компакта Y, U — открытое множество в Y такое, что $U \supset X$ и существует ретракция $r : U \to X$.

Рассмотрим открытое в $P_f(Y)$ множество $\langle U; 1/2\rangle = \{\mu \in P_f(Y) : \mu(U) > 1/2\}$. Ясно, что $P_f(X) \subset \langle U; 1/2\rangle$. Пусть $\nu \in \langle U; 1/2\rangle \subset P_f(Y)$, $\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i\delta_{y_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = 1$, $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n_{i_0} \geq \frac{n}{n+1}$. Тогда $r_f^x(\nu) = \delta_{y_{i_0}}$. Легко проверить, что $y_{i_0} \in U$ и, следовательно, $\delta_{y_{i_0}} \in \langle U; 1/2\rangle$. Положим

$$r_U^Y(\nu) = \left(n_{i_0} + \sum_{y_i \in Y \setminus U} n_i\right)\delta_{y_{i_0}} + \sum_{y_i \in U} n_i\delta_{y_i}.$$

Очевидно, $r_U^Y(\nu) \in P_f(Y)$ и $\mathrm{supp} r_U^Y(\nu) \subset U$. Кроме того, $r_U^Y(\nu) = \nu$ для всякой меры $\nu \in P_f(Y)$ такой, что $\mathrm{supp}\nu \subset U$. Легко проверить, что отображение $r_U^Y(\nu) : \langle U; 1/2\rangle \to \langle U; 1/2\rangle$ непрерывно. Положим

$$R\left(r_U^Y(\nu)\right) = \left(n_{i_0} + \sum_{y_i \in Y \setminus U} n_i\right)\delta_{r(y_{i_0})} + \sum_{y_i \in U} n_i\delta_{r(y_i)}.$$

По построению $R\left(r_U^Y(\nu)\right) \in P_f(X)$. Отображение $R\left\langle U; \frac{1}{2}\right\rangle \to P_f(X)$ определено корректно. Так как ретракция $r : U \to X$ непрерывна, то непрерывно отображение R. Легко проверить, что $R\left(r_U^Y(\nu)\right) = \nu$ для всякой меры $\nu \in P_f(X)$. Таким образом, $R \circ r_U^Y : \langle U; 1/2\rangle \to P_f(X)$ — искомая ретракция. Итак, множество $P_f(X)$ — окрестностный ретракт компакта $P_f(Y)$. Теперь применение леммы и теоремы (3.1) из [7] завершает доказательство. □

На функториальном языке теорема 3 выглядит как

Следствие 1. Функтор P_f сохраняет ANR-компакты.

Из теоремы 3 и предложения 1 вытекает основной результат работы.

Следствие 2. Пусть X — компакт. $P_f(X) \in ARN$ тогда и только тогда, когда $X \in ARN$.

Следующие утверждения также извлекаются из теоремы 3.

Следствие 3. Функтор P_f сохраняет свойство компакта быть Q-многообразием или гильбертовым кирпичом.

Следствие 4. Функтор P_f сохраняет свойство слоев отображений быть ARN-компактом, компактным Q-многообразием и гильбертовым кирпичом (конечной суммой гильбертовых кирпичей).

Автор выражает свою глубокую признательность рецензенту за выявленные им недостатки и полезные советы.

Литература

[1] Щепин Е.В. *Функторы и несчетные степени компактов*, УМН **36** (3), 3–62 (1981).
[2] Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции* (Физматлит, М., 2006).
[3] Жураев Т.Ф. *Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству*, Общая топология. Пространства и отображения (МГУ, М., 1989), 66–70.
[4] Жураев Т.Ф. *Некоторые основные свойства функтора P_f*, Вестн. МГУ. Сер. матем.-механ., № 6, 29–33 (1989).
[5] Жураев Т.Ф. *О функторе P вероятностных мер*, Вестн. МГУ. Сер. матем.-механ., № 1, 26–30 (1990).

[6] Жураев Т.Ф. *Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер* (ВИНИТИ АН СССР, М., МГУ, № 4471–В89).
[7] Борсук К. *Теория ретрактов* (Мир, М., 1971).
[8] Борсук К. *Теория шейпов* (Мир, М., 1976).
[9] Варадарайн В.С. *Меры на топологических пространствах*, Матем. сб. **55** (97) (1961).
[10] Чепмэн Т. *Лекции о Q-многообразиях* (Мир, М., 1981).

Адилбек Атаханович Заитов

Ташкентский архитектурно-строительный институт,
ул. Навои, д. 13, г. Ташкент, 100011, Узбекистан,

e-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

A.A. Zaitov

Geometrical and topological properties of a subspace $P_f(X)$ of probability measures

Abstract. We prove that for a compact X the space $P_f(X)$ is an absolute neighbourhood retract if and only if X is an absolute neighbourhood retract. Futher, we demonstrate that a functor P_f preserves the property of a compact to be Q-manifold or Hilbert cube, preserves the propetry of a map to be absolute neighbourhood retract in a class of compact, to be Q-manifold or Hilbetr cube (finite sum of Hilbert cube).

Keywords: propability measure, compact Hausdorff space (compact), retract, $A(N)R$-space.

Adilbek Atakhanovich Zaitov

Tashkent Instute of Architecture and Civil Engineering,
13 Navoi str., Tashkent, 100011 Uzbekistan,

e-mail: adilbek_zaitov@mail.ru