УДК 510.5

О ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННОЙ СВОДИМОСТИ Σ_2^0-МНОЖЕСТВ

Д.Х. Зайнетдинов, И.Ш. Калимуллин

Аннотация

Исследованы свойства lm-сводимости множеств, принадлежащих классу Σ_2^0. В частности, доказано существование несравнимых Σ_2^0-множеств относительно lm-сводимости. Кроме того, построена бесконечная равномерная последовательность несравнимых Σ_2^0-множеств относительно lm-сводимости, показано также отсутствие наибольшего Σ_2^0-множества относительно рассматриваемой сводимости.

Ключевые слова: вычислимые функции, Σ_2^0-множества, предельно монотонные функции, предельно монотонные множества.

Введение

Обозначим через $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ множество неотрицательных целых чисел. Функция $f : \omega \to \omega$ называется *предельно монотонной*, если существует вычислимая функция $\varphi(x, s)$ такая, что для всех $x \in \omega$

1) $f(x) = \lim\limits_{s\to\infty} \varphi(x, s)$;

2) $\varphi(x, s) \leqslant \varphi(x, s + 1)$ $\forall s \in \omega$.

Множество $A \subseteq \omega$ будем называть *предельно монотонным*, если $A = \emptyset$ или оно является областью значения некоторой предельно монотонной функции.

Пусть дано множество натуральных чисел $X \in 2^\omega$. *Спектром предельной монотонности* (иногда будем называть его просто *спектром* и обозначать как $\mathrm{lmSp}(A)$) множества A называется класс всех множеств $X \in 2^\omega$ таких, что A является предельно монотонным множеством относительно некоторой функции $\varphi(x, s)$ такой, что $\varphi \leqslant_T X$.

В обозначениях и терминологии мы придерживаемся в основном монографии [1]. Мы имеем дело с множествами и функциями, заданными на множестве ω. Для обозначения множества всех конечных последовательностей над ω используется запись $\omega^{<\omega}$. На множестве $\omega^{<\omega}$ для любых двух строк x и y определим их покомпонентный порядок, а именно $x_1x_2\dots x_n \preccurlyeq y_1y_2\dots y_n$ тогда и только тогда, когда $x_1 \leqslant y_1$ & $x_2 \leqslant y_2$ & ... & $x_n \leqslant y_n$. После этого мы можем вычислимо отождествить множество всех строк, заданных на ω, с множеством натуральных чисел, то есть можем задать взаимно-однозначное отображение $\omega^{<\omega} \rightleftharpoons \omega$. Тогда под записью $B^{<\omega}$ будем понимать множество номеров строк $x_1x_2\dots x_n$ таких, что $x_1 \in B,\ x_2 \in B,\ \dots,\ x_n \in B$.

В работе [2] введено понятие сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, согласованное с понятием Σ-определимости в допустимых множествах. Обозначим через $\mathcal{F}_A$ семейство начальных сегментов $\{\{x \mid x < n\} \mid n \in A\}$. В соответствии с работой [2] определим lm-сводимость множеств как Σ-сводимость соответствующих начальных сегментов, а именно $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_A \leqslant_\Sigma \mathcal{F}_B$. В настоящей статье нам будет удобнее пользоваться эквивалентным понятием lm-сводимости.

Определение 1. Будем говорить, что $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$, если $A = \{\theta(x),\ x \in B^{<\omega}\}$, где $\theta(x)$ – предельно монотонная функция, которая является монотонной по своим аргументам, то есть если $\theta(y)\downarrow$ и $x \preccurlyeq y$, то $\theta(x)\downarrow$ и $\theta(x) \leqslant \theta(y)$.

Определение 2. Будем говорить, что $A \equiv_{\mathrm{lm}} B$, если $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$ и $B \leqslant_{\mathrm{lm}} A$. Отметим, что отношение $\leqslant_{\mathrm{lm}}$ рефлексивно и транзитивно, так что $\equiv_{\mathrm{lm}}$ является отношением эквивалентности.

Предельно монотонной степенью (или, иначе, lm-степенью) множества A назовем класс эквивалентности $\deg(A) = \{B : B \equiv_{\mathrm{lm}} A\}$. В дальнейшем lm-степенью множеств будем обозначать строчными полужирными буквами **a**, **b**, **c**. Через $\mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$ обозначим класс всех lm-степеней. Степени из $\mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$ образуют частичный порядок относительно отношения $\deg(A) \leqslant \deg(B)$ тогда и только тогда, когда $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$. Будем записывать $\deg(A) < \deg(B)$, если $A <_{\mathrm{lm}} B$, то есть если $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$ и $B \nleqslant_{\mathrm{lm}} A$.

Во втором параграфе настоящей статьи мы докажем, что каждый счетный частичный порядок вкладывается в $\mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$.

Покажем сейчас отсутствие наибольшего Σ_2^0-множества относительно lm-сводимости, используя свойства спектра предельно монотонных Σ_2^0-множеств. Для этого воспользуемся следующими двумя теоремами, доказательства которых можно найти в работе [3].

Теорема 1. *Если $S \in \Sigma_2^0$, то спектр множества S содержит низкую степень.*

Теорема 2. *Множество $X \leqslant_T \emptyset'$ не является 2-низким тогда и только тогда, когда X принадлежит спектру каждого множества $S \in \Sigma_2^0$.*

Отсюда, как следствие из этих теорем, непосредственно вытекает следующий результат, устанавливающий отсутствие наибольшего Σ_2^0-множества относительно lm-сводимости.

Следствие 1. *Не существует наибольшего Σ_2^0-множества относительно* lm-*сводимости*[1].

Доказательство. Из приведенных выше определений спектра и lm-сводимости нетрудно видеть, что если $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$ и B является предельно монотонным множеством относительно функции $\varphi(x,s)$, где $\varphi \leqslant_T X$, то A также является предельно монотонным множеством относительно некоторой функции $\varphi \leqslant_T X$. Отсюда непосредственно следует, что спектр предельной монотонности множества B содержится в спектре предельной монотонности множества A, то есть $\mathrm{lmSp}(B) \subseteq \mathrm{lmSp}(A)$. Далее, применяя теорему 1, получим, что если $B \in \Sigma_2^0$, то для класса low всех низких множеств имеет место включение $\mathrm{low} \subseteq \mathrm{lmSp}(B)$. Из теоремы 2 следует, что для класса Nonlow_2 всех не 2-низких множеств имеет место равенство $\mathrm{Nonlow}_2 = \bigcap\limits_{A \in \Sigma_2^0} (\mathrm{lmSp}(A) \restriction \emptyset')$, где под выражением $\mathrm{lmSp}(A) \restriction \emptyset'$ понимается множество элементов спектра $\mathrm{lmSp}(A)$, T-сводящихся к $\emptyset'$. Кроме того, известно, что каждая низкая степень является также и 2-низкой. Таким образом, если предположить, что B является наибольшим Σ_2^0-множеством относительно lm-сводимости, то получим $\mathrm{lmSp}(B) = \bigcap\limits_{A \in \Sigma_2^0} (\mathrm{lmSp}(A))$. Рассмотрим теперь последнее равенство в ограничении на $\emptyset'$, то есть $\mathrm{lmSp}(B) \restriction \emptyset' = \bigcap\limits_{A \in \Sigma_2^0} (\mathrm{lmSp}(A) \restriction \emptyset')$. В итоге

[1]Авторы настоящей статьи благодарны М.Х. Файзрахманову за высказанные идеи, которые легли в основу доказательства данного результата.

получим противоречие с тем, что класс низких множеств содержится в классе не 2-низких множеств:

$$\mathrm{low} \subseteq \mathrm{lmSp}(B) \restriction \emptyset' = \bigcap_{A \in \Sigma^0_2} (\mathrm{lmSp}(A) \restriction \emptyset') = \mathrm{Nonlow}_2.$$

□

Основные результаты, на которые мы будем опираться при изучении свойств предельно монотонной сводимости, представлены в работах [4] и [5]. Далее докажем лемму, которая будет полезна нам во втором параграфе настоящей статьи.

Лемма 1. *Если A является бесконечным Σ^0_2-множеством и существует бесконечное множество B, содержащееся в A, то $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$.*

Доказательство. Пусть A – бесконечное Σ^0_2-множество и существует бесконечное множество $B \subseteq A$. Так как A является Σ^0_2-множеством, то существует такая вычислимая функция h, что для каждого $a \in \omega$ имеем

$$a \in A \Longleftrightarrow W_{h(a)} \text{ конечно.}$$

Зафиксируем вычислимый набор пар $\{(x_k, a_k)\}_{k\in\omega}$ таких, что x_k – непустая строка $x_k = b_{k,0}b_{k,1}\ldots b_{k,s_k-1} \in \omega^{<\omega}$ и $a_k < b_{k,0}$. Для того чтобы показать, что $A \leqslant_{\mathrm{lm}} B$, определим предельно монотонную функцию $\theta(x_k, s)$, которая задает множество A в следующем виде:

$$A = \{\theta(x_k, s),\ x_k \in B^{<\omega},\ s \in \omega,\ k \in \omega\}.$$

Определим искомую функцию в виде

$$\theta(x_k, s) = \begin{cases} a_k, & \text{если } W_{h(a_k),s} \subseteq W_{h(a_k),s_k}, \\ b_{k,0} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Докажем, что $\theta(x_k) = \lim\limits_{s\to\infty} \theta(x_k, s)$ является предельно монотонной аппроксимацией для множества A. В самом деле, во-первых, заметим, что для всех $k, s \in \omega$ справедливо соотношение $\theta(x_k, s) \leqslant \theta(x_k, s+1)$. Во-вторых, легко увидеть, что $\max\limits_{s\in\omega} \theta(x_k, s)$ существует для всех $k \in \omega$, так как $\max\limits_{s\in\omega} \theta(x_k, s) \leqslant b_{k,0}$.

Теперь предположим, что $a \in A$. Так как множество B бесконечно, то существует такое k, что $x_k \in B^{<\omega}$, $b_{k,0} > a_k$, где $a = a_k$ и $W_{h(a_k)} = W_{h(a_k),s_k}$. Тогда для любой длины s строки x_k имеем $W_{h(a_k),s} \subseteq W_{h(a_k),s_k}$. Поэтому $\lim\limits_{s\to\infty} \theta(x_k, s) = a_k = a$.

Допустим, что $a \notin A$. Тогда множество $W_{h(a)}$ должно быть бесконечным. Выберем k, s такие, что $\theta(x_k, s) = a$ и $x_k \in B^{<\omega}$. Тогда существует $s' \geqslant s$, для которого $W_{h(a_k),s'} \nsubseteq W_{h(a_k),s_k}$. В итоге имеем, что $\theta(x_k, s') = b_{k,0} > a$ для всех $s' \geqslant s$. Отсюда вытекает, что $a \neq \lim\limits_{s\to\infty} \theta(x_k, s)$ для всех номеров $k \in \omega$. □

1. Существование пары несравнимых множеств

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости.

Теорема 3. *Существуют такие Σ^0_2-множества A и B, что $A \nleqslant_{\mathrm{lm}} B$ и $B \nleqslant_{\mathrm{lm}} A$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_e(x, t)$, где $e \in \omega$ – равномерное перечисление всех частично вычислимых функций φ таких, что если значение $\varphi(x, t')$ определено для любого шага $t' \geqslant t$, тогда значение функции $\varphi(x,t)$ определено и на всех предыдущих шагах t и $\varphi(x,t) \leqslant \varphi(x,t')$.

Далее, на шаге s нашей конструкции мы определим конечные множества A_s и B_s таким образом, чтобы $A(y) = \lim\limits_{s\to\infty} A_s(y)$ и $B(y) = \lim\limits_{s\to\infty} B_s(y)$ для любого y.

Сформулируем условия, которые в дальнейшем будем именовать *требованиями* R_{2e} и R_{2e+1}, которым должны удовлетворять множества A и B:

$$R_{2e}: \quad (\forall x \in B^{<\omega})\ [f_{2e}(x) = \lim_{t\to\infty} \varphi_{2e}(x,t) < \omega] \implies A \neq \mathrm{rng}\,(f_{2e});$$

$$R_{2e+1}: \quad (\forall x \in A^{<\omega})\ [f_{2e+1}(x) = \lim_{t\to\infty} \varphi_{2e+1}(x,t) < \omega] \implies B \neq \mathrm{rng}\,(f_{2e+1}).$$

Стратегия удовлетворения только одного требования R_{2e} состоит в том, чтобы на шаге s выбрать произвольное число m_{2e}. Затем поместить его в A, то есть положить $A_s(m_{2e}) = 1$. При этом требование R_{2e} будет удовлетворено, так как $A_s(m_{2e}) = 1$ и $f_{2e}(x)\uparrow$. Если на более позднем шаге t_0 мы найдем $x \in B^{<\omega}$ такой, что $\varphi_{2e}(x,t_0) = m_{2e}$, тогда для выполнения требования R_{2e} необходимо удалить m_{2e} из A, то есть полагаем $A(\varphi_{2e}(x,t)) = 0$ для любого $t \geqslant t_0$. Итак, имеем либо $A_s(m_{2e}) = 1$ и $f_{2e}(x)\uparrow$, либо $f_{2e}(x)\downarrow$ и $A_s(\varphi_{2e}(x,t)) = 0$.

Построение множеств A и B.

На шаге s мы пытаемся определить значения параметров m_e, x_e и $n_e = \varphi(x_e, s)$ для всех требований R_e. Каждый из параметров может быть также неопределен.

Шаг 0. Пусть $A_0 = B_0 = \emptyset$, считаем все параметры неопределенными.

Шаг $s > 0$. Для каждого подшага $i = 0,1,2,\ldots,s-1$ мы выполняем следующие действия:

Подшаг $i = 2e$.

1. Если $m_{2e}\uparrow$, тогда в качестве m_{2e} берем наименьший номер в $\omega^{[e]}$, больший, чем все m_j, $j < e$, который не запрещен никаким требованием. При этом требование R_{2e} запрещает m_{2e} в A. Полагаем $A_s(m_{2e}) = 1$ и выполняем следующий подшаг или, если $i = s-1$, то переходим к шагу $s+1$.

2. Допустим, что $x_{2e}\uparrow$, $n_{2e}\uparrow$ и существует $x \in B^{<\omega}$ такой, что $\varphi_{2e}(x,s) = m_{2e}$. Тогда определим $x_{2e} = x$ и $n_{2e} = m_{2e}$. Следовательно, получаем, что $x_{2e}\downarrow$ и $\varphi_{2e}(x_{2e},s) = m_{2e}$. Тогда удаляем m_{2e} из A, то есть $A_s(m_{2e}) = 0$. Требование R_{2e} запрещает все элементы строки $x \in B^{<\omega}$ в множестве B. Выполняем следующий подшаг или, если $i = s-1$, переходим к шагу $s+1$.

3. Пусть теперь $x_{2e} \in B^{<\omega}$, $n_{2e} = \varphi_{2e}(x_{2e},s)$. Полагаем $A_s(n_{2e}) = 0$. Если окажется, что n_{2e} запрещен требованием R_j для $j > 2e$, то полагаем все параметры и запреты для всех требований R_j при $j > 2e$ неопределенными.

Подшаг $i = 2e+1$. Проводим те же действия, что и при $i = 2e$, но меняем A и B местами. Если такого i не существует, то полагаем $A_{s+1} = A_s$, $B_{s+1} = B_s$ и $x_e^{s+1} = x_e^s$ и $n_e^{s+1} = n_e^s$ для любого e.

Если окажется, что $A_s(y)$ или $B_s(y)$ остаются неопределенными для некоторого y к концу шага s, то полагаем, что $A_s(y) = A_{s-1}(y)$ и $B_s(y) = B_{s-1}(y)$ соответственно. Шаг s завершен.

Для завершения доказательства теоремы докажем несколько промежуточных утверждений.

Предложение 1. *Начиная с некоторого шага, значение каждого параметра m_e больше не меняется.*

Доказательство. Предположим, что утверждение справедливо для любого $i < e$. Пусть s_0 – такой шаг, на котором каждое значение m_i, $i < e$ уже достигло своего предела; значение x_i уже определено, элементы строки x_i уже запрещены требованием R_i, $i < e$. Пусть $k \geqslant e$ – наименьшее число, которое не запрещено этими требованиями и не совпадает ни с одним из этих конечных пределов $\lim\limits_{s\to\infty} n_{i,s} = \lim\limits_{s\to\infty} \varphi_i(x_i, s) < \infty$. Пусть $s_1 > s_0$ – такой шаг, что для всех $s \geqslant s_1$ $\varphi_i(x_i, s) \neq k$ для всех $i < e$. Тогда после шага s_1 значение $m_e \leqslant k$ не может быть изменено. □

Предложение 2. *Если* $f_{2e}(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_{2e}(x,t)$ *существует для любого* $x \in \in B^{<\omega}$, *то* $A \neq \operatorname{rng}(f_{2e})$.

Доказательство. Предположим противное, то есть существует e такое, что $A = \operatorname{rng}(f_{2e})$. Пусть s_0 – наименьший шаг, на котором все числа m_i, $i \leqslant 2e$, достигают своего предела. Тогда на некотором более позднем шаге $s > s_0$ нам необходимо выполнить второй пункт из конструкции для построения множеств A и B, иначе получим, что $A(m_{2e}) = 1$, но $m_{2e} \notin \operatorname{rng}(f_{2e})$. Пусть $m_{2e} = \varphi_{2e}(x_{2e}, s)$, здесь шаг s понимается как минимальный номер шага, использующийся во втором пункте конструкции. Следовательно, для шага $t > s$ имеем $n_{2e} = \varphi_{2e}(x_{2e}, t)$ и $A_t(n_{2e}) = 0$. Таким образом, получаем, что $A_t(\varphi_{2e}(x_{2e}, t)) = A_t(f_{2e}) = 0$. Это противоречит тому, что $A = \operatorname{rng}(f_{2e})$. □

Аналогичные рассуждения приводят к справедливости следующего утверждения.

Предложение 3. *Если* $f_{2e+1}(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_{2e+1}(x,t)$ *существует для любого* $x \in A^{<\omega}$, *то* $B \neq \operatorname{rng}(f_{2e+1})$.

Предложение 4. *Для любого* y *существует* $\lim\limits_{s\to\infty} A_s(y)$. Кроме того, $A(y) = = \lim\limits_{s\to\infty} A_s(y)$ и A является Σ^0_2-множеством.

Доказательство. Для того чтобы все числа m_{2e} для различных требований были различными, выберем в качестве параметра m_{2e} для требования R_{2e} числа y из $\omega^{[2e]} = \{\langle x, i\rangle : i = 2e\}$. Пусть s_0 – наименьший шаг, на котором каждое значение m_j, $j \leqslant 2e$, уже достигло своего предела. Поскольку y можно поместить в $A^{<\omega}$, если только $y = m_{2e}$, то $A(y)$ после шага s_0 может измениться не более одного раза. Поэтому A будет Σ^0_2-множеством. □

Предложение 5. *Для любого* y *существует* $\lim\limits_{s\to\infty} B_s(y)$. *Кроме того,* $B(y) = = \lim\limits_{s\to\infty} B_s(y)$ *и* B *является* Σ^0_2*-множеством.*

Доказательство. Необходимо провести рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве предложения 4, только вместо $2e$ и A используем $2e+1$ и B соответственно. □

Этим утверждением завершается доказательство теоремы в целом. □

2. Бесконечная последовательность несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости

В данном параграфе мы обобщим результат, полученный в первом параграфе, а именно построим бесконечную равномерную последовательность несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости.

Теорема 4. *Существует такая равномерная последовательность бесконечных* Σ_2^0*-множеств* $\{A_i\}_{i\in\omega}$, *что* $A_i \not\leqslant_{\mathrm{lm}} \bigcap\limits_{j\neq i} A_j$, *причём* $\bigcap\limits_{j\in\omega} A_j$ *бесконечно и* $x \in A_i$ *при* $x < i$.

Доказательство. Пусть $\varphi_e(x,t)$, где $e \in \omega$ – равномерное перечисление всех частично вычислимых функций φ таких, что если значение $\varphi(x,t')$ определено для любого шага $t' \geqslant t$, то значение функции $\varphi(x,t)$ определено и на всех предыдущих шагах t и $\varphi(x,t) \leqslant \varphi(x,t')$.

На шаге s нашей конструкции мы определяем конечные множества $A_{i,s}$ таким образом, чтобы $A_i(y) = \lim\limits_{s\to\infty} A_{i,s}(y)$ для любого y.

В ходе построения множеств A_i будем следить за тем, чтобы предикат "$x \in A_i$" принадлежал классу Σ_2^0, иными словами, множество $\bigoplus A_i = \{\langle x,i\rangle : x \in A_i \ \& \ i \in \omega\}$ должно принадлежать классу Σ_2^0-множеств.

Для каждой пары $\langle e,i\rangle$ и для любого $k \in \omega$ удовлетворяем требованиям $R_{\langle e,i\rangle}$ и P_k, которые зададим в следующем виде:

$$R_{\langle e,i\rangle}: \ \left(\forall x \in \Big(\bigcap_{j\neq i} A_j\Big)^{<\omega} \Big[f_e(x) = \lim_{t\to\infty} \varphi_e(x,t) < \omega\Big]\right) \implies A_i \neq \mathrm{rng}\,(f_e);$$

$$P_k: \ \max \bigcap_{i\in\omega} A_i \geqslant k.$$

Стратегия удовлетворения единственного требования $R_{\langle e,i\rangle}$ состоит в том, чтобы на шаге s прикрепить к $R_{\langle e,i\rangle}$ потенциального «свидетеля» $m_{\langle e,i\rangle}$. Затем поместить его в A_i, то есть положить $A_{i,s}(m_{\langle e,i\rangle}) = 1$. При этом требование $R_{\langle e,i\rangle}$ будет удовлетворено, так как $A_{i,s}(m_{\langle e,i\rangle}) = 1$ и $f_e(x)\uparrow$. Если на более позднем шаге t_0 мы найдем такой элемент $x \in \Big(\bigcap\limits_{j\neq i} A_j\Big)^{<\omega}$, что $\varphi_e(x,t_0) = m_{\langle e,i\rangle}$, тогда для выполнения требования $R_{\langle e,i\rangle}$ необходимо удалить $m_{\langle e,i\rangle}$ из A_i, то есть положить $A_i(\varphi_e(x,t)) = 0$ для любого $t \geqslant t_0$. Итак, имеем, что либо $A_i(m_{\langle e,i\rangle}) = 1$ и $f_e(x)\uparrow$, либо $f_e(x)\downarrow$ и $A_i(\varphi_e(x,t)) = 0$.

Построение множеств A_i, $i \in \omega$.

На шаге s мы пытаемся определить значения параметров $m_{\langle e,i\rangle}$, $x_{\langle e,i\rangle}$ и $n_{\langle e,i\rangle} = \varphi(x_{\langle e,i\rangle}, s)$ для всех требований $R_{\langle e,i\rangle}$. Каждый из параметров может быть также неопределен.

Шаг 0. Пусть $A_{i,0} = \emptyset$ и полагаем все параметры неопределенными.

Шаг $s > 0$. Для каждого подшага $l = 0,1,2,\ldots,s-1$ мы выполняем следующие действия.

Подшаг $l = 2\langle e,i\rangle + 1$.

1. Если $m_{\langle e,i\rangle}\uparrow$, то в качестве $m_{\langle e,i\rangle} > i$ берем наименьший номер в $\omega^{[e]}$, больший, чем все $m_{\langle j,i\rangle}$, $j < e$, и который не запрещен никаким требованием. При этом требование $R_{\langle e,i\rangle}$ запрещает $m_{\langle e,i\rangle}$ в A_i. Полагаем $A_{i,s}(m_{\langle e,i\rangle}) = 1$ и выполняем следующий подшаг или, если $l = s-1$, то переходим к шагу $s+1$.

2. Допустим, что $x_{\langle e,i\rangle}\uparrow$, $n_{\langle e,i\rangle}\uparrow$ и существует $x \in \Big(\bigcap\limits_{j\neq i} A_j\Big)^{<\omega}$, для которого $\varphi_{\langle e,i\rangle}(x,s) = m_{\langle e,i\rangle}$. Полагаем $x_{\langle e,i\rangle} = x$ и $n_{\langle e,i\rangle} = m_{\langle e,i\rangle}$. Следовательно, получаем, что $x_{\langle e,i\rangle}\downarrow$ и $\varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, s) = m_{\langle e,i\rangle}$. Тогда исключаем $m_{\langle e,i\rangle}$ из A_i, то есть $A_{i,s}(m_{\langle e,i\rangle}) = 0$. А значит, требование $R_{\langle e,i\rangle}$ запрещает все элементы строки $x \in \Big(\bigcap\limits_{j\neq i} A_j\Big)^{<\omega}$ в множестве $x \in \Big(\bigcap\limits_{j\neq i} A_j\Big)$. Выполняем следующий подшаг или, если $l = s-1$, переходим к шагу $s+1$.

3. Пусть теперь $x_{\langle e,i\rangle} \in \Big(\bigcap\limits_{j\neq i} A_j\Big)^{<\omega}$, $n_{\langle e,i\rangle} = \varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, s)$. Полагаем $A_{i,s}(n_{\langle e,i\rangle}) = 0$. Если окажется, что $n_{\langle e,i\rangle}$ и t_k запрещены требованиями $R_{\langle j,i\rangle}$ и P_q для $j > e$ и $q > k$, то объявляем все параметры и запреты для всех требований $R_{\langle j,i\rangle}$ и P_q при $j > e$ и $q > k$ неопределенными.

Подшаг $l = 2k + 2$. Для удовлетворения требований P_k проводим следующие действия: выбираем наименьшее число $t_k \geqslant k$ и помещаем его в каждое A_i. При этом требование P_k запрещает t_k во всех A_i, $i \in \omega$. Полагаем $A_{i,s}(t_k) = 1$ и выполняем следующий подшаг или, если $l = s - 1$, то переходим к шагу $s + 1$.

Если окажется, что $A_{i,s}(y)$ остается неопределенным для некоторого y к концу шага s, то полагаем, что $A_{i,s}(y) = A_{i,s-1}(y)$. Шаг s завершен.

Для завершения доказательства теоремы докажем несколько промежуточных утверждений.

Предложение 6. *Начиная с некоторого шага, значение каждого параметра* $m_{\langle e,i\rangle}$ *больше не меняется.*

Доказательство. Предположим, что утверждение справедливо для любого $j < e$. Пусть s_0 – такой шаг, на котором каждое значение $m_{\langle j,i\rangle}$, $j < e$ достигло своего предела; значение $x_{\langle j,i\rangle}$ определено, элементы строки $x_{\langle j,i\rangle}$ запрещены требованием $R_{\langle j,i\rangle}$, $j < e$. Пусть $k \geqslant e$ – наименьшее число, которое не запрещено этими требованиями и не совпадает ни с одним из конечных пределов $\lim\limits_{s\to\infty} n_{\langle j,i\rangle,s} = \lim\limits_{s\to\infty} \varphi_{\langle j,i\rangle}(x_{\langle j,i\rangle}, s) < \infty$. Пусть $s_1 > s_0$ – такой шаг, что $\varphi_{\langle j,i\rangle}(x_{\langle j,i\rangle}, s_1) > k$ для всех $j < e$, для которых $\varphi_{\langle j,i\rangle}(x_{\langle j,i\rangle}, s) = \infty$. Тогда после шага s_1 значение $m_{\langle e,i\rangle} \leqslant k$ не меняется. □

Предложение 7. *Для любого* y *существует* $\lim\limits_{s\to\infty} A_{i,s}(y)$. Кроме того, $A_i(y) = \lim\limits_{s\to\infty} A_{i,s}(y)$, и $\bigoplus_i A_i = \{\langle x,i\rangle : x \in A_i \ \&\ i \in \omega\}$ является Σ^0_2-множеством.

Доказательство. Для того чтобы числа $m_{\langle e,i\rangle}$ из различных требований были различными, выберем в качестве параметра $m_{\langle e,i\rangle}$ для требования $R_{\langle e,i\rangle}$ числа y из $\omega^{[e]} = \{\langle x,i\rangle : i = e\}$. Пусть s_0 – такой шаг, на котором каждое значение $m_{\langle j,i\rangle}$, $j < e$, уже достигло своего предела. Поскольку любое y можно поместить в A_i, если только $y = m_{\langle j,i\rangle}$, $j < e$, то после шага s_0 мы можем только исключить элемент из A_i. Таким образом, $A_i(y)$ после шага s_0 может измениться не более одного раза. Поэтому $\bigoplus_i A_i$ будет Σ^0_2-множеством. □

Предложение 8. *Если* $f_e(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_e(x,t)$ *существует для любого* $x_{\langle e,i\rangle} \in \Big(\bigcap\limits_{j\neq i} A_j\Big)^{<\omega}$, *то* $A_i \neq \mathrm{rng}\,(f_e)$ *для всех* $i \in \omega$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует e такое, что $A_i = \mathrm{rng}\,(f_e)$. Пусть s_0 – наименьший шаг, на котором каждое значение $m_{\langle j,i\rangle}$, $j \leqslant e$ достигло своего предела. Тогда на некотором более позднем шаге $s > s_0$ нам необходимо выполнить второй пункт из конструкции для построения множеств $\{A_i\}_{i\in\omega}$, иначе получим, что $A_i(m_{\langle e,i\rangle}) = 1$, но $m_{\langle e,i\rangle} \notin \mathrm{rng}\,(f_e)$. Пусть $m_{\langle e,i\rangle} = \varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, s)$, здесь шаг s понимается как минимальный номер шага, использующийся во втором пункте конструкции. Следовательно, для шага $t > s$ имеем $n_{\langle e,i\rangle} = \varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, t)$ и $A_{i,t}(n_{\langle e,i\rangle}) = 0$. Таким образом, получаем, что $A_{i,t}(\varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, t)) = A_{i,t}(f_e) = 0$. Получили противоречие с предположением, что $A = \mathrm{rng}\,(f_e)$. □

Предложение 9. $\max \bigcap_{i\in\omega} A_i \geqslant k$ *для любого* $k \in \omega$.

Доказательство. Пусть s_0 – такой шаг, на котором каждое значение $m_{\langle e,i\rangle}$, $\langle e,i\rangle < k$, достигло своего предела; значение $x_{\langle e,i\rangle}$ определено, элементы строки $x_{\langle e,i\rangle}$ запрещены требованием $R_{\langle e,i\rangle}$, $\langle e,i\rangle < k$. Пусть $t_k \geqslant k$ – наименьшее число, которое не запрещено этими требованиями и не совпадает ни с одним из этих конечных пределов $\lim_s n_{\langle e,i\rangle,s} = \lim_s \varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, s) < \infty$. Пусть $s_1 > s_0$ – такой шаг, что для всех $s \geqslant s_1$ $\varphi_{\langle e,i\rangle}(x_{\langle e,i\rangle}, s) \neq k$ для всех $\langle e,i\rangle < k$. Тогда после шага s_1 значение $t_k \in \bigcap_{i\in\omega} A_i$ не меняется. □

Таким образом, теорема 4 полностью доказана. □

Покажем теперь, что для любого счётного частично-упорядоченного множества $\mathcal{P} = (P, \leqslant_P)$ существует сохраняющее порядок 1:1 отображение из P в $\mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$, где $\mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$ – это класс всех lm-степеней. Поскольку каждое счётное частично-упорядоченное множество вкладывается в вычислимый частичный порядок, мы можем считать, что $P = \omega$, и $\leqslant_P$ является вычислимым отношением.

Определим отображение $f : \omega \to \mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$, полагая

$$f(i) = \mathbf{b}_i = \deg(B_i) = \deg(\cap A_k : k \leqslant_P i),$$

где $B_i = \bigcap_{k\leqslant_P i} A_k$. Из теоремы 4 вытекает, что $x \in B_i$ для любых x и i в том и только том случае, когда $(\forall k \leqslant x)[k \leqslant_P i \implies x \in A_k]$, так что $B_i \in \Sigma^0_2$ для каждого i.

Наша задача показать, что если $i \leqslant_P j$, то $B_i \leqslant_{\mathrm{lm}} B_j$, и если $i \nleqslant_P j$, то $B_i \nleqslant_{\mathrm{lm}} B_j$. Для этого сформулируем и докажем следующие утверждения.

Предложение 10. *Если* $i \leqslant_P j$, *то* $B_i \leqslant_{\mathrm{lm}} B_j$.

Доказательство. Если $i \leqslant_P j$, тогда $B_j = \bigcap_{k\leqslant_P j} A_k \subseteq B_i = \bigcap_{k\leqslant_P i} A_k$, где B_i и B_j принадлежат классу Σ^0_2-множеств. Далее, применяя лемму 1, получим $B_i = \bigcap_{k\leqslant_P i} A_k \leqslant_{\mathrm{lm}} B_j = \bigcap_{k\leqslant_P j} A_k$. □

Предложение 11. *Если* $i \nleqslant_P j$, *то* $B_i \nleqslant_{\mathrm{lm}} B_j$.

Доказательство. По теореме 4 имеем $A_i \nleqslant_{\mathrm{lm}} \bigcap_{k\neq i} A_k$. Применяя снова лемму 1, можно получить следующую цепочку неравенств:

$$B_i = \bigcap_{k\leqslant_P i} A_k \geqslant_{\mathrm{lm}} A_i \nleqslant_{\mathrm{lm}} \bigcap_{k\neq i} A_k \geqslant_{\mathrm{lm}} \bigcap_{k\leqslant_P j} A_k = B_j.$$

Следовательно, $B_i \nleqslant_{\mathrm{lm}} B_j$. Так как в противном случае, если бы между B_i и B_j существовала lm-сводимость, то и в цепочке приведенных выше неравенств присутствовала бы lm-сводимость, то есть мы имели бы $A_i \leqslant_{\mathrm{lm}} \bigcap_{k\neq i} A_k$, а это неверно. □

Из всех полученных во втором параграфе результатов можно сделать следующий вывод.

Следствие 2. *Каждый счетный частичный порядок вкладывается в* $\mathbf{S}_{\mathrm{lm}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-31389, 12-01-97008, 14-01-31200) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных – докторов наук МД-4838.2013.1.

Summary

D.Kh. Zainetdinov, I.Sh. Kalimullin. On Limitwise Monotonic Reducibility of Σ_2^0-Sets.

In this paper, we study the properties of lm-reducibility of sets belonging to the class of Σ_2^0-sets. In particular, we prove the existence of incomparable Σ_2^0-sets with respect to lm-reducibility. In addition, we construct an infinite uniform sequence of incomparable Σ_2^0-sets relative to lm-reducibility and show that every countable partial order can be embedded into the class of all lm-degrees of Σ_2^0-sets.

Keywords: computable functions, Σ_2^0-sets, limitwise monotonic functions, limitwise monotonic sets.

Литература

1. *Соар Р.И.* Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств / Пер. с англ. – Казань: Казан. матем. о-во, 2000. – 576 с.

2. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31–53.

3. *Калимуллин И.Ш., Файзрахманов М.Х.* Спектры предельной монотонности Σ_2^0-множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 2. – С. 107–116.

4. *Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A.* Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141, No 9. – P. 3275–3289.

5. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38, No 2. – P. 165–178.

Поступила в редакцию
27.01.14

Зайнетдинов Дамир Хабирович – аспирант кафедры алгебры и математической логики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *damir.zh@mail.ru*

Калимуллин Искандер Шагитович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *ikalimul@gmail.com*