УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2022, Т. 164, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 43–59 ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.946.9 doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.43-59

О НЕКВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССАХ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Г.С. Балашова

Национально-исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, 111250, Россия

Аннотация

В работе исследована связь двух положительных логарифмически выпуклых последовательностей $\{\widehat{M}_n\}$ и $\{M_n\}$, определяющих соответственно классы Карлемана бесконечно дифференцируемых на множестве J функций и последовательностей $\{b_n\}$, задающих значения самой функции и всех ее производных в некоторой точке $x_0 \in J$. Получены результаты более общие, чем ранее известные, а также предложены явные конструкции искомых функций с оценкой норм самих функций и их n производных в пространствах Лебега $L_r(J)$ не только для классического случая $r = \infty$, но и для любых $r \geqslant 1$. Очевидно, что всегда $M_n \leqslant \widehat{M}_n$. В работе указаны последовательности $\{\widehat{M}_n\}$, для которых имеет место равенство, и приведены конкретные примеры.

Ключевые слова: неквазианалитические классы Карлемана, логарифмически выпуклая, последовательность условия, существование, функция, удовлетворяющая, конструкция, регуляризация, основные индексы

Работа посвящена изучению зависимости двух положительных логарифмически выпуклых числовых последовательностей $\{\widehat{M}_n\}$ и $\{M_n\}$. Последовательность $\{\widehat{M}_n\}$ определяет неквазианалитический класс $\mathbb{C}_J\{\widehat{M}_n\}$ ограниченных бесконечно дифференцируемых на множестве J функций, удовлетворяющих условию

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L_r} \leqslant K_1^n \widehat{M}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_{L_r(J)}$ – норма в пространстве Лебега, $1 \leqslant r \leqslant \infty$; $K_1 = K_1(f)$ – положительная постоянная, зависящая только от функции $f(x)$.

Последовательность $\{M_n\}$ определяет класс последовательностей $B\{M_n\}$, для каждой из которых существует положительная постоянная $K_2(\{b_n\}) = K_2$ такая, что

$$|b_n| \leqslant K_2^n M_n, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{2}$$

Задача. Состоит в нахождении условий на последовательности $\{M_n\}$ и $\{\widehat{M}_n\}$, при которых для любой последовательности $\{b_n\} \in B\{M_n\}$ существует функция $f(x) \in \mathbb{C}_J\{\widehat{M}_n\}$ такая, что

$$f^{(n)}(0) = b_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x = 0 \in J. \tag{3}$$

В такой постановке заведомо $M_n \leqslant \widehat{M}_n$, при этом логично выяснить, при каких условиях имеет место равенство $M_n = \widehat{M}_n$.

Рассмотрим сначала классический случай $r=\infty$, то есть

$$\|f^{(n)}(x)\| = \max_{x\in J}|f^{(n)}(x)| \leqslant K_1^{n+1}\widehat{M}_n, \qquad n=0,1,\dots . \tag{4}$$

Будем пользоваться критерием неквазианалитичности класса $\mathbb{C}_J\{\widehat{M}_n\}$, установленным С. Мандельбройтом (см. [1]), имеющим вид

$$\lim_{n\to\infty}\widehat{M}_n^{1/n} = \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widehat{M}_n}{\widehat{M}_{n+1}} < \infty. \tag{5}$$

Сформулированная задача была предметом исследований таких известных математиков, как Т. Банг [2], Л. Карлесон [3], Б.С. Митягин [4], Л. Эренпрайс [5], Г.А. Джанашия [6], Г. Уэйд [7] и др.

В 1946 г. Т. Банг показал: если $\widehat{M}_n$ удовлетворяет условию (5), то в качестве последовательности $\{M_n\}$ можно взять

$$M_n = \prod_{v=1}^{n} r_v^{-1}, \quad n=1,2,\dots, \quad r_v = \sum_{j=v}^{\infty}\frac{\widehat{M}_j}{\widehat{M}_{j+1}}.$$

Из этого результата следует, что для класса последовательностей $\{M_n = n^{\alpha n}\}$, $\alpha>1$, достаточно положить $\{\widehat{M}_n = n^{(\alpha+1)n}\}$.

В 1961 г. Л. Карлесон [3], А. Эренпрайс [5], Б.С. Митягин [4], а в 1962 г. Г.А. Джанашания [6] независимо друг от друга показали, что $M_n = \widehat{M}_n$ в случае $\{\widehat{M}_n = n^{\alpha n}\}$, $\alpha>1$. В работе Л. Карлесона доказана более общая

Теорема. *Пусть последовательность $\{\widehat{M}_n\}$ удовлетворяет условию (5) и*

$$W(x) = 2\sup_{n\geqslant 0}\Big\{n\log|x| - \log\widehat{M}_n\Big\} + \log(1+x^2),$$

$$\mu(s) = \frac{1}{2\pi}\int_R \frac{s}{s^2+t^2}\,W(t)\,dt.$$

Тогда для всякой последовательности

$$\{b_n\}\in B\{M_n\}, \quad M_n = \sup_{s>0}\exp\big[(n+1/2)\log s - \mu(s)\big]$$

существует функция $f(x)\in\mathbb{C}_R\{\widehat{M}_n\}$, удовлетворяющая условию (3).

Пользуясь этой теоремой, Л. Карлесон кроме решения задачи для последовательности $\{M_n = n^{\alpha n}\}$, $\alpha>1$, установил, что для последовательности $\{M_n\} = \{(n\ln n)^n\}$ в качестве $\{\widehat{M}_n\}$ можно взять $\{(n\ln^2 n)^n\}$.

В работах Г. Уэйда [7] и Н.М. Зобина [8] получены соотношения между последовательностями $\{M_n\}$ и $\{\widehat{M}_n\}$, при которых сформулированная задача имеет решение, однако они трудно проверяемы. В 1986 г. М.Д. Бронштейн [9] доказал

Теорема. *Пусть логарифмически выпуклая последовательность $\{M_n\}$ удовлетворяет условию (5) и существует постоянная $K=K(i)$ такая, что*

$$\sum_{j=i}^{\infty} M_j M_{j+1}^{-1} \leqslant K M_i M_{i+1}^{-1}, \quad M_{i+j}\leqslant K^{i+j}M_iM_j, \quad i,j=1,2,\dots .$$

Тогда для любой последовательности $\{b_n\}\in B\{M_n\}$ существует функция $f(x)\in\mathbb{C}_R\{M_n\}$, удовлетворяющая условию (3), то есть $\widehat{M}_n = M_n$.

Отметим, что для последовательности $\{M_n = n^{\alpha n}\}$, $\alpha > 1$, условия этой теоремы выполнены. Однако, например, для последовательностей $\{M_n = n^n \ln^{\alpha n} n\}$ или $\{M_n = 2^{n^\alpha}\}$, $\alpha > 1$, удовлетворяющих соотношению (5), условия данной теоремы не выполняются, то есть о разрешимости поставленной задачи ничего сказать нельзя.

Теперь представим наши результаты.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{M_n\}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n M_{n+1}^{-1} < \infty. \tag{6}$$

Тогда для любой последовательности $\{b_n\} \in B\{M_n\}$ и для любого числа $\alpha > 1$ существует функция $f(x) \in \mathbb{C}_R\{\widehat{M}_n\}$,

$$\widehat{M}_n = n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k^{\alpha n}} \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

удовлетворяющая условию (3).

В доказательстве теоремы 1 используется следующая известная (см. [1])

Лемма А. *Пусть $\mu_0 = 1$, $\mu_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, – произвольная последовательность такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \delta < \infty,$$

где $\delta > 0$ – некоторое число. Тогда для любого числа $\delta_1 \geqslant 0$ существует функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}^\infty(R)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \varphi(x) = 1, \quad |x| < \delta_1; \\ &\text{б)}\quad \varphi(x) = 0, \quad \text{если } |x| \geqslant \delta_1 + 2\delta; \\ &\text{в)}\quad \max_{\delta_1 \leqslant |x| \leqslant \delta_1 + 2\delta} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant \prod_{j=0}^{n} \mu_j^{-1}, \quad n = 0, 1, \ldots. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Носит конструктивный характер. Зафиксируем некоторое число $\alpha > 1$ и определим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k x^k}{k!} \varphi_k(d_k x) + b_0 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) + b_0, \tag{9}$$

где $\varphi_k(x)$ – функции, построенные по лемме с $\delta_1 = 0$,

$$\mu_n^{(k)} = (n+k)^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

$$d_k = A_1 \frac{M'_{k+1}}{M'_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $M'_k = k^{-\alpha k} M_k$, постоянная A_1 зависит от числа α и будет выбрана ниже. Из условий (8), (10) следует оценка для длины носителей функций $\varphi_k(x)$:

$$|\operatorname{supp} \varphi_k(x)| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha} < 2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x+k)^\alpha} = A_2(\alpha) k^{1-\alpha}. \tag{12}$$

Покажем, что функция $f(x)$, определенная формулой (9), есть искомая. Для этого с помощью соотношений (8), (11), (12), тождества $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{n!}{i!(n-i)!} \equiv 2^n$ и формулы Стирлинга [10] получим оценку

$$|v_k^{(n)}(x)| = \left| \left(\frac{b_k x^k}{k!} \varphi_k(d_k x) \right)^{(n)} \right| = \left| \frac{b_k}{k!} \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^k)^{(i)} \varphi_k^{(n-i)}(d_k x) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|b_k|}{k!} \sum_{i=0}^{\min(n,k)} C_n^i k^i \left(A_2 \frac{k^{1-\alpha}}{d_k} \right)^{k-i} d_k^{n-i} \left(\frac{(k+n-i)!}{k!} \right)^{\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|b_k|}{k!} A_2^k \sum_{i=0}^{\min(n,k)} C_n^i k^i d_k^{n-k} k^{(1-\alpha)k} k^{-(1-\alpha)i} A_2^{-i} \left(\frac{(k+n-i)!(n-i)!}{k!(n-i)!} \right)^{\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|b_k| A_2^k d_k^{n-k}}{k! k^{(\alpha-1)k}} \sum_{i=0}^{n} C_n^i k^{\alpha i} 2^{(k+n-i)\alpha} (n-i)^{(n-i)\alpha} A_2^{-i} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^{\alpha n} |b_k| d_k^{n-k} (2^\alpha A_2)^k}{k! k^{(\alpha-1)k}} \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left(\frac{k^\alpha}{2^\alpha A_2} \right)^i n^{\alpha(n-i)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^{\alpha n} |b_k| d_k^{n-k} (2^\alpha A_2 e)^k}{k^{\alpha k}} \left(\frac{k^\alpha}{2^\alpha A_2} + n^\alpha \right)^n. \quad (13)$$

Представим

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| = \sum_{k=1}^{n} |v_k^{(n)}(x)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (14)$$

Оценим Σ_2, используя условие (2), соотношения (7), (11), (13) и замечая, что

$$2^\alpha A_2 = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha - 1} > 1 \quad \text{и} \quad M_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k} \right)^{n-k} < M_n$$

для всех n и k. Последнее неравенство есть следствие следующих эквивалентных неравенств и логарифмической выпуклости последовательности $\{M_k\}$:

$$M_k^{k-n+1} < M_n M_{k+1}^{k-n}, \quad (k-n+1) \ln M_k < \ln M_n + (k-n) \ln M_{k+1},$$
$$\frac{\ln M_k - \ln M_n}{k-n} < \frac{\ln M_{k+1} - \ln M_k}{1}.$$

Получим

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^{\alpha n} |b_k| d_k^{n-k} (2^\alpha A_2 e)^k}{k^{\alpha k}} (k^\alpha + n^\alpha)^n \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(\alpha+1)n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{K_1^k M_k}{k^{\alpha k}} \left(\frac{A_1 M_{k+1} k^{\alpha k}}{(k+1)^{\alpha(k+1)} M_k} \right)^{n-k} (2^\alpha A_2 e)^k k^{\alpha n} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(\alpha+1)n} A_1^n M_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^\alpha A_2 e K_1 A_1^{-1})^k \frac{(k+1)^{\alpha(k+1)k} k^{\alpha k n} k^{\alpha n}}{k^{\alpha k^2} k^{\alpha k} (k+1)^{\alpha(k+1)n}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha+1)n} A_1^n M_n \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^\alpha A_2 e K_1 A_1^{-1})^k \frac{(1+1/k)^{\alpha k(k+1)}}{(1+1/k)^{\alpha n(k+1)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha+1)n} e^{-\alpha n} A_1^n M_n e^\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^\alpha A_2 e^{1+\alpha} K_1 A_1^{-1})^k. \quad (15)$$

До сих пор не было ограничений на A_1. Выбирая

$$A_1 = 2^{\alpha+1} A_2 e^{1+\alpha} K_1,$$

из (15) установим, что

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{2^{(\alpha+1)n}}{e^{\alpha n}} M_n e^\alpha A_1^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{\alpha n} e^\alpha A_1^n M_n. \quad (16)$$

Далее оценим

$$\Sigma_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |v_k^{(n)}(x)| \leqslant 2^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} (2^\alpha A_2 e)^k \frac{|b_k| d_k^{n-k}}{k^{\alpha k}} (k^\alpha + n^\alpha)^n \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} (2^\alpha A_2 e)^k \frac{|b_k| d_k^{n-k}}{k^{\alpha k}} = (2^{2\alpha+1} A_2 e K_1)^n M_n +$$

$$+ 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_1^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2^\alpha A_2 e K_1}{A_1}\right)^k \frac{M_k}{k^{\alpha k}} \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant (2^{2\alpha+1} A_2 e K_1)^n M_n + 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_1^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2e^\alpha}\right)^k M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{\alpha n} A_1^n M_n + 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_1^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2e^\alpha}\right)^k M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k}. \quad (17)$$

Подставляя оценки (16) и (17) в (14), получаем

$$\max_{x\in R} |f^{(n)}(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{\alpha n} e^\alpha A_1^n M_n + \left(\frac{2}{e}\right)^{\alpha n} A_1^n M_n +$$

$$+ 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_1^n \sum_{k=1}^{n-1} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k} = \left(\frac{2n}{e}\right)^{\alpha n} A_1^n \frac{M_n}{n^{\alpha n}} (e^\alpha + 1) +$$

$$+ 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_1^n \sum_{k=1}^{n-1} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k} \leqslant 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_1^n \sum_{k=1}^{n} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k} =$$

$$= K_2^n n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k}, \quad (18)$$

где $K_2 = 2^{\alpha+1} A_1 = 2^{2(\alpha+1)} e^{\alpha+1} \dfrac{2}{\alpha-1} K_1$.

Следующая цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^{n} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k}\right)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k^{\alpha k}} \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{n-k} \left(\frac{k^{\alpha k}}{(k+1)^{\alpha(k+1)}}\right)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{n-k} \frac{(1+1/k)^{\alpha k}}{(1+1/k)^{\alpha k(n-k)+\alpha n}\, k^{\alpha n}} \leqslant e^\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k^{\alpha n}} \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{n-k} \quad (19)$$

завершает доказательство теоремы 1. □

Следствие 1. *Если последовательность* $\{M_n\}$ *такова, что для некоторого* $\alpha > 1$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n^{\alpha n}}{M_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k^{\alpha n}} \left(\frac{M_{k+1}}{M_k} \right)^{n-k} \right)^{1/n} = K < \infty$$

или для некоторого $\alpha > 1$ *последовательность* $\{M_k k^{-\alpha k}\}$ *логарифмически выпукла, то для нее задача разрешима с* $\widehat{M}_n = M_n$.

Доказательство. Первое из этих утверждений сразу следует из соотношений (19) и (7). Для доказательства второго воспользуемся оценкой (18) и логарифмической выпуклостью последовательности $\{M'_k\}$. Тогда получим

$$\widehat{M}_n = n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k} \right)^{n-k} \leqslant n^{\alpha n} n M'_n < 2^n M_n,$$

что и доказывает справедливость следствия 1. □

Пример 1. Для последовательности $\{M_n\} = \{(n^\alpha \ln^\beta n)^n\}$, где $\alpha > 1$, $\beta \geqslant 0$, поставленная задача имеет решение с $\widehat{M}_n = M_n$.

При $\beta = 0$ получается результат, установленный Л. Карлесоном, Л. Эренпрайсом, Б.С. Митягиным и Г.А. Джанашия.

Пример 2. Для последовательности $\{M_n\} = \{a^{n^\alpha} (n^\beta \ln^\gamma n)^n\}$, где $a > 1$, $\alpha > 1$, $\beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, задача также разрешима с $\widehat{M}_n = M_n$.

Следствие 2. *Для произвольной логарифмически выпуклой последовательности* $\{M_n\}$ *в качестве* $\{\widehat{M}_n\}$ *можно брать последовательность* $\{n^{\alpha n} M_n\}$, *где* $\alpha > 1$ *– любое число.*

Доказательство. Из теоремы 1 (см. соотношение (19)) следует, что

$$\widehat{M}_n = n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} M'_k \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k} \right)^{n-k} = n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{k^{\alpha k}} \left(\frac{M_{k+1} k^{\alpha k}}{M_k (k+1)^{\alpha(k+1)}} \right)^{n-k}.$$

Используя логарифмическую выпуклость последовательности $\{M_n\}$, получаем

$$\widehat{M}_n \leqslant n^{\alpha n} M_n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^{\alpha k}}{(k+1)^{\alpha(k+1)}} \right)^{n-k} \frac{1}{k^{\alpha k}} \leqslant n^{\alpha n} M_n \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha k} \leqslant 2 n^{\alpha n} M_n.$$

Следствие 2 доказано. □

Следствие 3. *Если последовательность* $\{\widehat{M}_n\}$, *определяющая класс* $\mathbb{C}_R\{\widehat{M}_n\}$, *такова, что для некоторого* $\alpha > 1$

$$\lim_{n\to\infty} (\widehat{M}_n n^{-\alpha n})^{1/n} = \infty, \tag{20}$$

то для любой последовательности $\{b_n\}$, *удовлетворяющей условию*

$$|b_n| \leqslant K^n n^{\alpha n} (\widehat{M}_n n^{-\alpha n})^c, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

существует функция из класса $\mathbb{C}_R\{\widehat{M}_n\}$, *обладающая свойством* (3).

Доказательство. Условие (20) позволяет для последовательности $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$ сделать выпуклую регуляризацию посредством логарифмов $(\widehat{M}_n n^{-\alpha n})^c$ (см. [1]). В силу следствия 1 для всякой последовательности $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию (21), существует функция $f(x)$, для которой справедливо (3) и

$$\max_{x\in R}|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n n^{\alpha n}\left(\frac{\widehat{M}_n}{n^{\alpha n}}\right)^c. \tag{22}$$

Поскольку $\widehat{M}_n^c \leqslant \widehat{M}_n$, то

$$n^{\alpha n}\left(\frac{M_n}{n^{\alpha n}}\right)^c \leqslant n^{\alpha n}\,\frac{\widehat{M}_n}{n^{\alpha n}} = \widehat{M}_n. \tag{23}$$

Неравенства (22) и (23) доказывают справедливость следствия 3. □

Следствие 4. *Если последовательность* $\{\widehat{M}_n\}$ *удовлетворяет условию* (20) *при некотором* $\alpha > 1$ *и последовательность основных индексов* $\{n_i\}$ (*см.* [1]) *для выпуклой регуляризации посредством логарифмов последовательности* $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$ *такова, что для некоторого* $K > 0$ *и для всех* i *выполняется неравенство*

$$n_{i+1}^{n_{i+1}} n_i^{-n_i} < K^{n_i}, \tag{24}$$

то для нее поставленная задача разрешима с $M_n = \widehat{M}_n$.

Доказательство. Из следствия 3 следует, что достаточно установить следующее неравенство:

$$\widehat{M}_n \leqslant K^n n^{\alpha n}(\widehat{M}_n n^{-\alpha n})^c \tag{25}$$

с некоторой постоянной $K > 0$. В силу условия (24) для всякого n: $n_i \leqslant n \leqslant n_{i+1}$ имеют место соотношения

$$n_i^{\alpha n_i} \leqslant n^{\alpha n} \leqslant n_{i+1}^{\alpha n_{i+1}} \leqslant K^{\alpha n_i} n_i^{\alpha n_i} \leqslant K^{\alpha n} n^{\alpha n}. \tag{26}$$

Оценим правую часть в (25), используя неравенства (26) и логарифмическую выпуклость последовательности $\{\widehat{M}_n\}$:

$$\begin{aligned} n^{\alpha n}\left(\frac{\widehat{M}_n}{n^{\alpha n}}\right)^c &= \frac{\widehat{M}_{n_i}^{(n_{i+1}-n)/(n_{i+1}-n_i)}\,\widehat{M}_{n_{i+1}}^{(n-n_i)/(n_{i+1}-n_i)}\,n^{\alpha n}}{n_i^{\alpha n_i\,(n_{i+1}-n)/(n_{i+1}-n_i)}\,n_{i+1}^{\alpha n_{i+1}\,(n-n_i)/(n_{i+1}-n_i)}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{\widehat{M}_{n_i}^{(n_{i+1}-n)/(n_{i+1}-n_i)}\,\widehat{M}_{n_{i+1}}^{(n-n_i)/(n_{i+1}-n_i)}\,K^{-\alpha n}\,n_{i+1}^{\alpha n_{i+1}}}{n_{i+1}^{\alpha n_{i+1}}} \geqslant K^{-\alpha n}\widehat{M}_n. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует справедливость (25) и следствия 4. □

Следствие 5. *Пусть последовательность* $\{\widehat{M}_n\}$ *такова, что для некоторого* $\alpha > 1$ *последовательность* $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$ *почти логарифмически выпукла, то есть для основных индексов* $\{n_i\}$ (*см.* [1]) *при ее выпуклой регуляризации посредством логарифмов*

$$\sup_i (n_{i+1} - n_i) = q < \infty. \tag{27}$$

Тогда для нее рассматриваемая задача разрешима с $M_n = \widehat{M}_n$.

Доказательство. Достаточно показать, что из условия (27) следует выполнение неравенства (24). В самом деле, в силу (27) и простых оценок имеем

$$n_{i+1}^{n_{i+1}} n_i^{-n_i} \leqslant \frac{(n_i+q)^{n_i+q}}{n_i^{n_i}} \leqslant (n_i+q)^q \left(1+\frac{q}{n_i^{n_i}}\right)^{n_i} \leqslant n_i^q K(q) \leqslant K^{n_i},$$

следовательно, следствие 5 доказано. □

Таким образом, для широкого класса последовательностей $\{M_n\}$, растущих не медленнее, чем $\{n^{\alpha n}\}$, $\alpha > 1$, доказано, что $\{\widehat{M}_n\} = \{M_n\}$, то есть сформулированная задача решена. Для последовательностей, растущих медленнее $\{n^{\alpha n}\}$ с $\alpha > 1$, например $\{M_n\} = \{(n \ln^\beta n)^n\}$, $\beta > 0$, теорема 1 может быть уточнена. Заметим, что указанные последовательности при $0 < \beta \leqslant 1$ не удовлетворяют условию (6), однако из результатов Г.В. Бадаляна (см. [11]) следует, что задача продолжения последовательности из класса $B\{M_n\}$ может быть решена только в неквазианалитическом классе.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{b_n\}$ такова, что для некоторого $\alpha > 0$ и $\beta \geqslant 0$*

$$|b_n| \leqslant K_1^n (n \ln_s^\alpha n \ln_{s+m}^\beta n)^n. \tag{28}$$

Здесь $\ln_s n$ означает s раз итерированный логарифм, $s \geqslant 1$ – любое целое число, $m = 1, 2, \ldots$. Итерированные логарифмы рассматриваются для аргументов, при которых они определены и строго положительны. Тогда существует функция $f(x) \in \mathbb{C}_R\{\widehat{M}_n\}$, где

$$\widehat{M}_n = (n \ln_s^{\alpha+1} n \ln_{s+m}^\beta n)^n (\ln n \ln\ln n \ldots \ln_{s-1} n)^n,$$

удовлетворяющая условию (3).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай последовательности $\{M_n\} = \{(n \ln^\alpha n \ln\ln^\beta n)^n\}$ и покажем, что для нее $\{\widehat{M}_n\} = \{(n \ln^{\alpha+1} n \ln\ln^\beta n)^n\}$. По лемме А построим функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, с $\delta_1 = 0$ и последовательностями

$$\mu_n^k = ((n+k)\ln^{\alpha+1}(n+k)\ln\ln^\beta(n+k))^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Установим порядок убывания длины носителей этих функций при $k \to \infty$:

$$|\operatorname{supp} \varphi_k(x)| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^k = 2\sum_{n=1}^{\infty} ((n+k)\ln^{\alpha+1}(n+k)\ln\ln^\beta(n+k))^{-1}. \tag{30}$$

Сумма ряда (30) оценивается величиной интеграла

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(k+x)\ln^{\alpha+1}(k+x)\ln\ln^\beta(k+x)} = (-\alpha \ln^\alpha(k+x)\ln\ln^\beta(k+x))^{-1}\Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^\infty \frac{dx}{(k+x)\ln^{1+\alpha}(k+x)\ln\ln^{1+\beta}(k+x)} = \frac{1}{\alpha \ln^\alpha k \ln\ln^\beta k} -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^\infty \frac{dx}{(k+x)\ln^{1+\alpha}(k+x)\ln\ln^{1+\beta}(k+x)} < \frac{1}{\alpha \ln^\alpha k \ln\ln^\beta k},$$

поэтому
$$|\operatorname{supp}\varphi_k(x)| \leqslant \frac{2}{\alpha}\ln^{-\alpha}k\ln\ln^{-\beta}k. \tag{31}$$

Докажем справедливость неравенства
$$\prod_{k=p_0}^{p}\ln_s(n+k) \leqslant K^{n+p}(s)\prod_{k=p_0}^{p}\ln_s k. \tag{32}$$

Здесь константа $K(s)$ не зависит от n и p, а p_0 выбрано так, чтобы $\ln_{s+1}k$ был положительным для всех $k \geqslant p_0$. Прологарифмируем обе части неравенства (32) и оценим левую часть сверху

$$\sum_{k=p_0}^{p}\ln_{s+1}(n+k) \leqslant \int\limits_{p_0}^{p+1}\ln_{s+1}(x+n)\,dx =$$
$$= x\ln_{s+1}(n+x)\Big|_{p_0}^{p+1} - \int\limits_{p_0}^{p+1}x\,d\ln_{s+1}(x+n) \leqslant (p+1)\ln_{s+1}(n+p+1), \tag{33}$$

а правую часть оценим снизу

$$(n+p)\ln K(s) + \sum_{k=p_0}^{p}\ln_{s+1}k \geqslant (n+p)\ln K(s)+$$
$$+\int\limits_{p_0}^{p}\ln_{s+1}x\,dx = (n+p)\ln K(s) + x\ln_{s+1}x\Big|_{p_0}^{p} - \int\limits_{p_0}^{p}\frac{dx}{\ln x\cdots\ln_s x} \geqslant$$
$$\geqslant (n+p)\ln K(s) + (p-p_0)\ln_{s+1}p - (p-p_0) >$$
$$> (n+p)(\ln K(s)-1) + (p-p_0)\ln_{s+1}p. \tag{34}$$

Из теоремы Лагранжа следует, что
$$(p+1)(\ln_{s+1}(n+p+1) - \ln_{s+1}p) \leqslant \frac{(p+1)(n+1)}{p\ln p\cdots\ln_s p} \leqslant n+1 < n+p.$$

Поэтому при соответствующем выборе $K(s)$ получаем
$$n+p < (n+p)(\ln K(s)-1) - (p_0-1)\ln_{s+1}p,$$

откуда следует справедливость неравенства (32) ($K(s)$ достаточно выбрать так, чтобы неравенство выполнялось для $p = p_0$, так как для $p > p_0$ оно тем более будет выполняться). Положим
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k!}\,x^k\varphi_k(dx) + b_0 \equiv \sum_{k=1}^{\infty}v_k(x) + b_0,$$

где постоянная d будет выбрана ниже. Пользуясь свойствами функций $\varphi_k(x)$ (см. лемму А) и формулами (31), (32), оценим

$$|v_k^{(n)}(x)| = \frac{|b_k|}{k!}\,(x^k\varphi_k(dx))^{(n)} = \frac{|b_k|}{k!}\sum_{i=0}^{\min(n,k)}C_n^i(x^k)^{(i)}\varphi_k^{(n-i)}(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|b_k|}{k!}\sum_{i=0}^{\min(n,k)}C_n^i k^i\left(\frac{K_3}{\ln^{\alpha}k\ln\ln^{\beta}k\cdot d}\right)^{k-i}\frac{(k+n-i)!}{k!}\,d^{n-i}\times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-i} \ln^{\alpha+1}(j+k) \ln\ln^{\beta}(j+k) \leqslant \frac{K_3^k |b_k| d^{n-k}}{k!(\ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k)^k} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n} C_n^i (k \ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k)^i K_3^{-i} 2^{n+k-i} (n-i)! (K(1)K(2))^{n+k-i} \times$$
$$\times \prod_{j=p_0}^{n-i} \ln^{\alpha+1} j \ln\ln^{\beta} j \leqslant (2K(1)K(2))^{n+k} K_3^k \frac{|b_k| d^{n-k}}{k!(\ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k)^k} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{n} C_n^i (2K_3 K(1)K(2))^{-i} (k \ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k)^i (n \ln^{\alpha+1} n \ln\ln^{\beta} n)^{n-i} \leqslant$$
$$\leqslant (2K(1)K(2))^{n+k} K_3^k \frac{|b_k| d^{n-k}}{k!} \frac{\left(\dfrac{k \ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k}{2K_3 K(1)K(2)} + n \ln^{\alpha+1} n \ln\ln^{\beta} n\right)^n}{(\ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k)^k}. \quad (35)$$

Замечая, что

$$\max_{x \in R} |f^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| = \sum_{k=0}^{n} |v_k^{(n)}(x)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| = \Sigma' + \Sigma'',$$

и используя соотношения (28) и (35), получаем

$$\Sigma'' = \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (2K(1)K(2))^{n+k} K_3^k \frac{|b_k| d^{n-k} \left(\dfrac{k \ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k}{2K_3 K(1)K(2)} + n \ln^{\alpha+1} n \ln\ln^{\beta} n\right)^n}{k!(\ln^{\alpha} k \ln\ln^{\beta} k)^k} \leqslant$$

$$\leqslant \left(2dK(1)K(2)\left(\frac{1}{2K_3 K(1)K(2)} + 1\right)\right)^n \times$$
$$\times \sum_{k=n+1}^{\infty} (2K(1)K(2)K_1K_3 d^{-1})^k \frac{k^k}{k!} (k \ln^{\alpha+1} k \ln\ln^{\beta} k)^n. \quad (36)$$

Полагая $d = 2K(1)K(2)K_1K_3e^2$, из (36) получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k^{(n)}(x)| \leqslant K^n \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k} (k \ln^{\alpha+1} k \ln\ln^{\beta} k)^n. \quad (37)$$

Установим скорость роста при $n \to \infty$ выражения, стоящего в правой части неравенства (37):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-k} (k \ln^{\alpha+1} k \ln\ln^{\beta} k)^n \leqslant \int_n^{\infty} e^{-x} x^n \ln^{(\alpha+1)n} x \ln\ln^{\beta n} x dx =$$

$$= -e^{-x} x^n \ln^{(\alpha+1)n} x \ln\ln^{\beta n} x \Big|_n^{\infty} + \int_n^{\infty} e^{-x} \Big\{ n x^{n-1} (\ln^{\alpha+1} x \ln\ln^{\beta} x)^n +$$

$$+ x^{n-1}(\alpha+1)n\ln^{(\alpha+1)n-1}x\ln\ln^{\beta n}x + x^{n-1}\ln^{(\alpha+1)n-1}x\beta n\ln\ln^{\beta n-1}x\Big\}dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n}n^n\ln^{(\alpha+1)n}n\ln\ln^{\beta n}n - 3\gamma n e^{-x}x^{n-1}(\ln^{\alpha+1}x\ln\ln^{\beta}x)^n\Big|_n^\infty +$$
$$+ (3\gamma)^2 n^2\int_n^\infty e^{-x}x^{n-2}\ln^{(\alpha+1)n}x\ln\ln^{\beta n}x\,dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n}(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n(1+3\gamma+\cdots+(3\gamma)^{n-1}) +$$
$$+ (3\gamma)^n n^n\int_n^\infty e^{-x}(\ln^{\alpha+1}x\ln\ln^{\beta}x)^n\,dx, \quad (38)$$

где $\gamma = \max(\alpha+1,\beta)$.

Оценим интеграл в правой части неравенства (38)

$$\int_n^\infty e^{-x}(\ln^{\alpha+1}x\ln\ln^{\beta}x)^n\,dx = -e^{-x}(\ln^{\alpha+1}x\ln\ln^{\beta}x)^n\Big|_n^\infty +$$
$$+ \int_n^\infty e^{-x}x^{-1}\Big((\alpha+1)n\ln^{(\alpha+1)n-1}x\ln\ln^{\beta n}x + \beta n\ln^{(\alpha+1)n-1}x\ln\ln^{\beta n-1}x\Big)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n}(\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n + 2\gamma\int_n^\infty e^{-x}\ln^{(\alpha+1)n-1}x\ln\ln^{\beta n}x\,dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n}(\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n\sum_{k=0}^{[(\alpha+1)n]+1}(2\gamma)^k + (2\gamma)^{(\alpha+1)n}\int_n^\infty e^{-x}\ln\ln^{\beta n}x\,dx \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n}(\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n(2\gamma)^{(\alpha+1)n-2} +$$
$$+ (2\gamma)^{(\alpha+1)n}e^{-n}\ln\ln^{\beta n}n(1+\beta+\cdots+\beta^{\beta n-1}) \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n}(\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n(2\gamma)^{(\gamma+1)n}. \quad (39)$$

Здесь $[(\alpha+1)n]$ означает целую часть числа.

Используя соотношения (39) и (38), из (36) получаем

$$\sum_{k=n+1}^\infty |v_k^{(n)}(x)| \leqslant K^n(e^{-n}(3\gamma)^n(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n +$$
$$+ (3\gamma)^n e^{-n}(2\gamma)^{(\gamma+1)n}n^n(\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n) \leqslant K^n(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n. \quad (40)$$

Теперь оценим сумму Σ', используя соотношения (35), (28), формулу Стирлинга и выражение для d:

$$\Sigma' = \sum_{k=1}^n |v_k^{(n)}(x)| = |v_n^{(n)}(x)| + \sum_{k=1}^{n-1}|v_k^{(n)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant (2K(1)K(2))^{2n}K_3^n K_1^n\,\frac{n^n}{n!}\,K_4^n(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^{\beta}n)^n +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(2K(1)K(2))^{n+k}K_3^kK_1^k\frac{k^k}{k!}d^{n-k}K_4^n(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^\beta n)^n\leqslant$$

$$\leqslant\Big\{(2K(1)K(2))^{2n}(K_1K_3K_4)^ne^n+(2K(1)K(2)K_4d)^n\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n-1}(2K(1)K(2)K_3K_1ed^{-1})^k\Big\}(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^\beta n)^n\leqslant K^n(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^\beta n)^n. \quad (41)$$

Объединяя формулы (40) и (41), устанавливаем, что

$$\max_{x\in R}|f^{(n)}(x)|\leqslant K^n(n\ln^{\alpha+1}n\ln\ln^\beta n)^n,$$

откуда следует справедливость теоремы для случая $s=1$.

Для произвольного $s>1$ доказательство теоремы проводится аналогично с той лишь разницей, что в построении функций $\varphi_k(x)$ используется последовательность

$$\mu_n^k=(n+k)\ln(n+k)\ln\ln(n+k)\cdots\ln_{s-1}(n+k)\ln_s^{\alpha+1}(n+k)\ln_{s+m}^\beta(n+k),\quad n=1,2,\dots.$$

Таким образом, теорема 2 доказана. □

Замечание 1. При $s=1$, $m=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$ из теоремы 2 получаем результат Л. Карлесона [3].

Перейдем к рассмотрению поставленной задачи для случая норм в лебеговом пространстве $L_r(R)$ при $1\leqslant r<\infty$ (см. формулу (1)).

Отметим, что построенная в теореме 1 бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ финитна, то есть отлична от нуля на конечном отрезке $[-a;a]$, поэтому

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L_r(R)}=\|f^{(n)}(x)\|_{L_r(-a;a)}<K\|f^{(n)}(x)\|_{C(-a;a)}.$$

Следовательно, оценка (1) с $\{\widehat{M}_n\}$, определенной по формуле (7), также будет верна. Наша цель состоит в улучшении этой оценки.

Теорема 3. *Пусть $\{M_n''\}$ – логарифмически выпуклая последовательность, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M_n''}{M_{n+1}''}<\infty$. Тогда для любой последовательности $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию* (2) *с*

$$M_n=(M_{n+1}'')^{1/r}(M_n'')^{1-1/r},\quad n=1,2,\dots, \quad (42)$$

и для любого $\alpha>1$ существует функция $f(x)$, $x\in R$, обладающая свойствами (3), (1) *с*

$$\widehat{M}_n=n^{\alpha n}\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k''}{k^{\alpha n}}\left(\frac{M_{k+1}''}{M_k''}\right)^{n-k},\quad n=1,2,\dots. \quad (43)$$

Если же для некоторого $\alpha>1$ последовательность $\{M_n''n^{-\alpha n}\}$ логарифмически выпукла, то $\{\widehat{M}_n\}=\{M_n''\}$.

Доказательство. Носит конструктивный характер. Введем функцию

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_kx^k}{k!}\,\varphi_k(d_kx)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(x),$$

здесь функции $\varphi_k(x)$ определены так же, как в теореме 1,

$$d_k = A_1 \frac{M'_{k+1}}{M'_k}, \quad M'_k = \frac{M''_k}{k^{\alpha k}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

При таком определении функций $v_k(x)$ было установлено (см. (13)), что

$$\max_{x \in \operatorname{supp} \varphi_k(d_k x)} |v_k^{(n)}(x)| \leqslant 2^{\alpha n} |b_k| d_k^{n-k} k^{-\alpha k} (2^\alpha A_2 e)^k \left(\frac{k^\alpha}{2^\alpha A_2} + n^\alpha \right)^n .$$

Поскольку $v_k(x) \equiv 0$ для $x \overline{\in} \operatorname{supp} \varphi_k(d_k x)$ и верно (12), то

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L_r(R)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k^{(n)}(x)\|_{L_r(R)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \max_{x \in R} |v_k^{(n)}(x)| \, |\operatorname{supp} \varphi_k(d_k x)|^{1/r} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\alpha n} \sum_{k=1}^{\infty} (2^\alpha A_2 e)^k \frac{|b_k|}{k^{\alpha k}} d_k^{n-k} (k^\alpha + n^\alpha)^n A_2^{1/r} k^{(1-\alpha)/r} d_k^{-1/r} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (44)$$

Оценим отдельно Σ_1 и Σ_2, пользуясь соотношениями (42) и (43):

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{(k+n)\alpha} (A_2 e)^k \frac{|b_k| d_k^{n-k}}{k^{\alpha k}} (k^\alpha + n^\alpha)^n A_2^{1/r} k^{(1-\alpha)/r} d_k^{-1/r} \leqslant$$
$$\leqslant (A_1^{-1} A_2)^{1/r} 2^{n(\alpha+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^\alpha A_2 e K_1)^k \frac{(M''_{k+1})^{1/r} (M''_k)^{1-1/r} k^{\alpha n}}{k^{\alpha k} k^{(\alpha-1)/r} A_1^k} A_1^n \times$$
$$\times \left(\frac{M''_{k+1}}{M''_k} \right)^{n-k} \left(\frac{k^{\alpha k}}{(k+1)^{\alpha(k+1)}} \right)^{n-k} \left(\frac{M''_k}{M''_{k+1}} \right)^{1/r} \left(\frac{(k+1)^{\alpha(k+1)}}{k^{\alpha k}} \right)^{1/r} \leqslant$$
$$\leqslant A_1^{n-1/r} A_2^{1/r} 2^{n(\alpha+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^\alpha A_2 e K_1 A_1^{-1})^k M''_k \left(\frac{M''_{k+1}}{M''_k} \right)^{n-k} \times$$
$$\times \frac{(1+1/k)^{\alpha k^2} k^{\alpha n} (1+1/k)^{\alpha k/r} (k+1)^{\alpha/r}}{(1+1/k)^{\alpha k n} (k+1)^{\alpha(n-k)} k^{\alpha k} k^{(\alpha-1)r}} \leqslant$$
$$\leqslant A_1^{n-1/r} A_2^{1/r} 2^{n(\alpha+1)} M''_n e^{\alpha(1+1/r)} e^{-\alpha n} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^\alpha A_2 K_1 A_1^{-1} e^{1+\alpha})^k k^{1/r} \leqslant$$
$$\leqslant A_1^{n-1/r} A_2^{1/r} 2^{n(\alpha+1)} e^{\alpha(1+1/r)} e^{-\alpha n} (n+1)^{1/r} 2^{-n} M''_n. \quad (45)$$

Последнее неравенство в (45) получено при $A_1 = 2^{\alpha+1} A_2 K_1 e^{1+\alpha}$.

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{(k+n)\alpha} \frac{|b_k| (A_2 e)^k d_k^{n-k} (k^\alpha + n^\alpha) A_2^{1/r}}{k^{\alpha k} d_k^{1/r} K^{(\alpha-1)/r}} \leqslant$$
$$\leqslant A_1^n 2^{n(\alpha+1)} n^{\alpha n} A_2^{1/r} \sum_{k=1}^{n} (2^\alpha A_2 e K_1 A_1^{-1})^k \frac{(M''_{k+1})^{1/r} (M''_k)^{1-1/r}}{k^{\alpha k} k^{(\alpha-1)/r}} \times$$
$$\times \left(\frac{M'_{k+1}}{M'_k} \right)^{n-k} \left(\frac{M''_k (k+1)^{\alpha(k+1)}}{A_1 M''_{k+1} k^{\alpha k}} \right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant A_1^n 2^{(\alpha+1)n} n^{\alpha n} A_2^{1/r} A_1^{-1/r} \sum_{k=1}^{n} (2e^{\alpha})^{-k} M_k' \left(\frac{M_{k+1}'}{M_k'}\right)^{n-k} (k+1)^{\alpha/r} e^{\alpha/r} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\alpha/r} A_1^n 2^{(\alpha+1)n} A_2^{1/r} A_1^{-1/r} n^{\alpha n} \sum_{k=1}^{n} M_k' \left(\frac{M_{k+1}'}{M_k'}\right)^{n-k}. \quad (46)$$

Учитывая, что $M_n'' \leqslant n^{\alpha n} \sum\limits_{k=1}^{n} M_k' \left(\frac{M_{k+1}'}{M_k'}\right)^{n-k}$, используя оценки (44)–(46) и повторяя рассуждения, приведенные в конце доказательства теоремы 1 (см. неравенство (17)), устанавливаем существование такой постоянной $K_2 > 0$, что для функции $f(x)$ справедливо неравенство (1) с последовательностью $\{\widehat{M}_n\}$, определяемой формулой (43). Первая часть теоремы доказана.

Если же для некоторого $\alpha > 1$ последовательность $\{M_n'' n^{-\alpha n}\}$ логарифмически выпукла, то, как и в следствии 1, получаем, что $\{\widehat{M}_n\} = \{M_n''\}$.

Теорема доказана. □

Следствие 6. *Пусть последовательность $\{M_n''\}$ такова, что для некоторого $\alpha > 1$*

$$\lim_{n\to\infty} (M_n'' n^{-\alpha n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (M_n')^{1/n} = \infty. \quad (47)$$

Тогда для всякой последовательности $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию (2) с

$$M_n = n^{\alpha n} ((M_{n+1}')^c)^{1/r} ((M_n')^c)^{1-1/r}, \quad (48)$$

существует функция $f(x)$, обладающая свойством (3) и

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L_r(R)} \leqslant K_2^n M_n''. \quad (49)$$

Доказательство. Прежде всего преобразуем и оценим правую часть соотношения (48):

$$n^{\alpha n} \left(\left((n+1)^{-\alpha(n+1)} M_{n+1}''\right)^c\right)^{1/r} \left((n^{-\alpha n} M_n'')^c\right)^{1-1/r} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha n/r} \frac{1}{(n+1)^{\alpha/r}} \left((n+1)^{\alpha(n+1)} \left((n+1)^{-\alpha(n+1)} M_{n+1}''\right)^c\right)^{1/r} \times$$

$$\times \left(n^{\alpha n} \left(n^{-\alpha n} M_n''\right)^c\right)^{1-1/r} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha/r} \left((n+1)^{\alpha(n+1)} \left((n+1)^{-\alpha(n+1)} M_{n+1}''\right)^c\right)^{1/r} \left(n^{\alpha n} \left(n^{-\alpha n} M_n''\right)^c\right)^{1-1/r}. \quad (50)$$

Сопоставляя (50), (48) и используя теорему 3, получаем, что существует такая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (3), что

$$\|f^{(n)}(x)\|_{L_r(R)} \leqslant K_2^n n^{\alpha n} (n^{-\alpha n} M_n'')^c. \quad (51)$$

Из известного соотношения $N_n^c \leqslant N_n$ и неравенства (51) следует справедливость (48). □

Следствие 7. *Пусть логарифмически выпуклая последовательность $\{\widehat{M}_n\}$ такова, что для некоторого $\alpha > 1$ $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$ почти логарифмически выпукла. Тогда для всякой последовательности $\{b_n\}$, удовлетворяющей условию (2) с последовательностью $\{M_n\} = \{\widehat{M}_{n+1}^{1/r} \widehat{M}_n^{1-1/r}\}$, существует функция $f(x)$, обладающая свойствами (3) и (1).*

Доказательство основывается на неравенстве

$$\widehat{M}_n \leqslant K_3^n n^{\alpha n} (\widehat{M}_n n^{-\alpha n})^c, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

для почти логарифмической выпуклой последовательности $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$, которое доказывается так же, как неравенство (25).

Замечание 2. При $r = 1$ из (42) следует, что $M_n = M''_{n+1}$. Если, кроме этого, предположить, что последовательность $\{\widehat{M}_n n^{-\alpha n}\}$ почти логарифмически выпукла для некоторого $\alpha > 1$, то из теоремы 3 вытекает

Следствие 8. *Пусть дана последовательность* $\{M_n\}$*, удовлетворяющая условию* (6)*, такая, что для некоторого* $\alpha > 1$ *последовательность* $\{M_n n^{-\alpha n}\}$ *почти логарифмически выпукла. Тогда для всякой последовательности* $\{b_n\}$*, удовлетворяющей условию*

$$|b_n| \leqslant K_1^n M_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

существует такая функция $f(x) \in C_R\{M_n\}$*, что для нее выполнено соотношение* (3).

Литература

1. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Гостехиздат, 1955. – 268 с.
2. *Bang T.* On quasi-analytiske Funktioner: Thesis. – Kjøbenhavn: Nyt Nordisk Forlag, Arnold Busck, 1946. – 101 p.
3. *Carleson L.* On universal moment problems // Math. Scand. – 1961. – V. 9, No 1b. – P. 197–206.
4. *Митягин Б.С.* О бесконечно дифференцируемой функции с заданными значениями производных в точке // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 2. – С. 289–292.
5. *Erenpreis L.* The Punctual and Local Images of Quasi-Analytic and Non-Quasi-Analytic Classes. – Princeton, N. J.: Inst. Adv. Study, 1961. – 20 p.
6. *Джанашия Г.А.* О задаче Карлемана для классов функций Жеврея // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 2. – С. 259–262.
7. *Wahde G.* Interpolation on non-quasi-analytic classes of infinitely differentiable functions // Math. Scand. – 1967. – V. 20, No 1. – P. 19–31.
8. *Зобин Н.М.* Теоремы продолжения и представления для пространств типа Жеврея // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 212, № 6. – С. 1280–1283.
9. *Бронштейн М.Д.* Продолжение функций в неквазианалитических классах Карлемана // Изв. вузов. Матем. – 1986. – № 12. – С. 10–12.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1969. – 800 с.
11. *Бадалян Г.В.* О классификации и представлении бесконечно дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1970. – Т. 34, Вып. 3. – С. 584–620.

Поступила в редакцию
07.06.2021

Балашова Галина Сергеевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики

Национально-исследовательский университет «Московский энергетический институт»
ул. Красноказарменная, д. 14, г. Москва, 111250, Россия
E-mail: *balashovags@mpei.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 1, pp. 43–59

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.43-59

On Non-Quasianalytic Classes of Infinitely Differentiable Functions

G.S. Balashova

National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, 111250 Russia
E-mail: *balashovags@mpei.ru*

Received August 31, 2021

Abstract

This article investigates the connection between two positive logarithmically convex sequences $\{\widehat{M}_n\}$ and $\{M_n\}$, which define respectively the Carleman classes of functions infinitely differentiable on the set J and sequences $\{b_n\}$ specifying the values of the function itself and all its derivatives at some point $x_0 \in J$. The results obtained are more general than those previously known, and explicit constructions of the required functions are proposed with estimates for the norms of the functions themselves and their n derivatives in the Lebesgue spaces $L_r(J)$, not only for the classical case $r = \infty$ but also for any $r \geqslant 1$. Obviously, $M_n \leqslant \widehat{M}_n$ is always observed. Here the sequences $\{\widehat{M}_n\}$, for which equality holds, are indicated and specific examples are given.

Keywords: non-quasianalytical Carleman classes, logarithmically convex, condition sequence, existence, function, satisfying, construction, regularization, fundamental indices

References

1. Mandelbrojt S. *Primykayushchie ryady. Regulyarizatsiya posledovatel'nostei. Primeneniya* [Adjacent Series. Regularization of Sequences. Applications]. Moscow, Gostekhizdat, 1955. 268 p. (In Russian)

2. Bang T. On quasi-analytiske Funktioner. *Thesis.* Kjøbenhavn, Nyt Nordisk Forlag, Arnold Busck, 1946. 101 p. (In Danish)

3. Carleson L. On universal moment problems. *Math. Scand.*, 1961, vol. 9, no. 1b, pp. 197–206.

4. Mityagin B.S. Approximate dimension and bases in nuclear spaces. *Russ. Math. Surv.*, 1961, vol. 16, no. 4, 59–127. doi: 10.1070/RM1961v016n04ABEH004109.

5. Erenpreis L. *The Punctual and Local Images of Quasi-Analytic and Non-Quasi-Analytic Classes*. Princeton, N. J., Inst. Adv. Study, 1961. 20 p.
6. Janashia G.A. Carleman's problem for the class of Gevrey functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, vol. 145, no. 2, pp. 259–262. (In Russian)
7. Wahde G. Interpolation on non-quasi-analytic classes of infinitely differentiable functions. *Math. Scand.*, 1967, vol. 20, no. 1, pp. 19–31.
8. Zobin N.M. Extension and representation theorems for Gevrey type spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1973, vol. 212, no. 6, pp. 1280–1283. (In Russian)
9. Bronshtein M.D. Continuation of functions in nonquasianalytic Carleman classes. *Russ. Math.*, 1986, vol. 30, no. 12, pp. 11–14.
10. Fichtenholz G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A Course in Differential and Integral Calculus]. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1969. 800 p. (In Russian)
11. Badaljan G.V. On classification and representation of infinitely differentiable functions. *Izv. Math.*, 1970, vol. 4, no. 3, pp. 587–626. doi: 10.1070/IM1970v004n03ABEH000923.

⟨ ***Для цитирования*:** *Балашова Г.С.* О неквазианалитических классах бесконечно дифференцируемых функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 1. – С. 43–59. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.43-59. ⟩

⟨ ***For citation*:** Balashova G.S. On non-quasianalytic classes of infinitely differentiable functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 1, pp. 43–59. doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.43-59. (In Russian) ⟩