

УДК 532+681.3

ЛАМИНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТАНДЕМА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

A.B. Mazo, I.B. Morenko

Аннотация

Численно исследовано обтекание тандема круговых цилиндров ламинарным потоком вязкой жидкости при числах Рейнольдса порядка 100. Показано, что существует критическое расстояние между обтекаемыми телами, когда все характеристики течения меняются скачком. Детально изучены свойства течения при бифуркации.

Введение

Экспериментальные и численные исследования обтекания тандема цилиндров потоком вязкой жидкости при высоких [1–3] и умеренных числах Рейнольдса [4, 5] обнаружили необычную зависимость характеристик потока от расстояния G между обтекаемыми телами.

Как известно, ламинарное обтекание одиночного цилиндра при $Re \sim 10^2$ сопровождается периодическим сходом вихрей с его поверхности и формированием в следе за телом системы вихрей, называемой дорожкой Кармана. При этом интегральные характеристики обтекания, такие, как коэффициенты сопротивления C_D и подъемной силы C_L , испытывают автоколебания во времени.

В работах [4, 5] говорится о критическом расстоянии между телами G^* , разделяющем два принципиально различных типа обтекания. При $G < G^*$ (докритический режим) цилиндр, расположенный выше по потоку (в дальнейшем будем называть его первым цилиндром), обтекается без автоколебаний, а при $G > G^*$ наблюдается синхронизация срыва вихрей с первого и второго цилиндров. При этом значения коэффициентов C_D и C_L существенно зависят от режима обтекания.

Результаты цитируемых выше работ получены на основе ограниченного набора исходных параметров течения и не дают полного понимания механизмов смены режима обтекания. Настоящая статья посвящена детальному численному анализу ламинарного течения около тандема цилиндров в окрестности точки бифуркации $G = G^*$.

Методика расчетов

В основу математической модели течения вязкой жидкости положим уравнения Навье–Стокса в переменных функция тока ψ – завихренность ω , записанные в декартовой системе координат x, y :

$$-\Delta\psi = \omega; \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \Delta \omega; \quad x, y \in D, \quad t > 0. \quad (2)$$

Здесь u, v – компоненты вектора скорости \mathbf{V} , причем среднее значение продольной скорости u равно единице, а число Рейнольдса Re вычислено по радиусу цилиндра. Поле давления $p(x, y, t)$ может быть определено на любой фиксированный момент времени t , если на этот момент известны функции u, v . Уравнение для давления имеет вид

$$\Delta p = -2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (3)$$

В качестве расчетной области D выбирается прямоугольник, ограниченный горизонтальными линиями $y = \pm H$, входным вертикальным сечением $x = -L_1$, выходным сечением $x = L_2$ и двумя единичными окружностями γ_1, γ_2 , представляющими собой поверхности помещенных в жидкость цилиндров. Во входном сечении задается однородное течение с единичной скоростью

$$x = -L_1 : \psi = (y + H), \omega = 0.$$

На горизонтальных границах канала ставятся условия

$$y = -H : \psi = 0, \omega = 0; \quad y = H : \psi = 2H, \omega = 0,$$

выражающие симметрию течения и свободное скольжение жидкости по «стенкам». На выходе $x = L_2$ задаются мягкие граничные условия $\partial/\partial x = 0$.

В работе [6] были получены универсальные соотношения, позволяющие вычислять значения ω и ψ на обтекаемых поверхностях, и, тем самым, решена проблема постановки граничных условий для уравнений (1), (2) при моделировании нестационарного обтекания произвольной системы тел. В нашем случае, когда тела неподвижны, значения функции тока на поверхностях цилиндров γ_1, γ_2 определяются с помощью вспомогательных гармонических функций η_1, η_2 по формулам

$$x, y \in \gamma_i : \psi_i = \frac{1}{2\pi} \left\{ -Q \int_{-L_1}^{L_2} \frac{\partial \eta_i(x, H)}{\partial y} dx + \int_D \eta_i \omega dxdy \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Здесь $Q = \psi(H) - \psi(-H) = 2H$ – расход жидкости. Вспомогательные функции η_i удовлетворяют краевым задачам

$$\Delta \eta_i = 0, \quad (x, y) \in D; \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

$$x = -L_1, L_2, (x, y) \in \gamma_{k \neq i} : \frac{\partial \eta_i}{\partial n} = 0;$$

$$y = \pm H : \eta_i = 0;$$

$$(x, y) \in \gamma_i : \frac{\partial \eta_i}{\partial n} = 1.$$

Развитый в [6] подход удобен в численной реализации тем, что простые задачи вида (5) для η_1, η_2 достаточно решить один раз, до начала решения системы уравнений (1), (2).

Соотношения (4) рассматриваются как главные граничные условия для уравнения (1) на внутренних границах, тогда как условия Неймана $\partial\psi/\partial n = 0$ (условия прилипания) используются для определения граничных значений завихренности. В работе [6] для этого используется интегральное тождество

$$\int_D \omega \eta dxdy = \int_D \nabla \psi \cdot \nabla \eta dxdy, \quad (6)$$

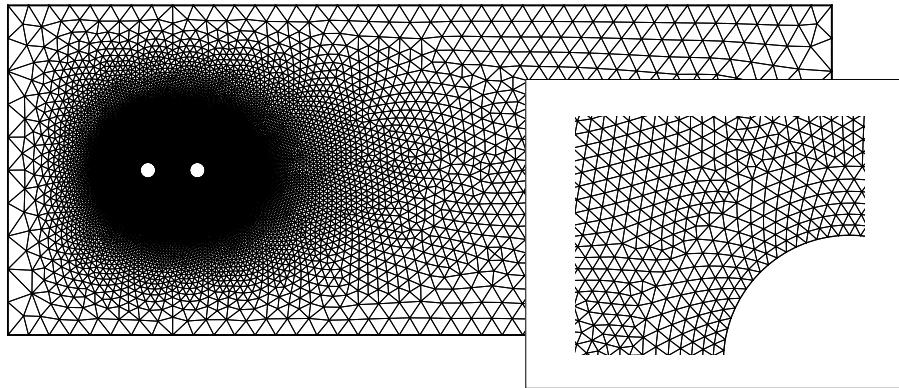


Рис. 1. Расчетная сетка конечных элементов

в котором $\eta(x, y)$ – произвольная пробная функция, а ψ – решение уравнения (1) с граничными условиями Дирихле (4). След решения задачи (6) на границах γ_i используется в качестве главных граничных условий для уравнения переноса завихренности (2).

Границными условиями для уравнения (3) на поверхностях цилиндров служат соотношения Пирсона [7]

$$(x, y) \in \gamma_i : \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial \tau}. \quad (7)$$

Здесь n и τ – внешняя нормаль и касательная к контуру γ_i .

В качестве начальных условий для нестационарной задачи задавалось потенциальное течение, описываемое соотношениями

$$\begin{aligned} t = 0 : & \omega \equiv 0; \Delta \psi = 0; \\ (x, y) \in \gamma_1, \gamma_2 : & \psi = Q/2; \\ x = -L_1, y = \pm H : & \psi = (y + H); \\ x = L_2 : & \partial \psi / \partial n = 0. \end{aligned}$$

В работе [8] математическая модель вида (1)–(6) применялась для расчета обтекания пары вращающихся цилиндров в канале; там же изложен итерационный алгоритм численного решения задачи, основанный на методе конечных элементов.

В представленных ниже вычислительных экспериментах мы использовали данную методику и основанную на ней программу расчета, а также программный комплекс Gambit–Fluent, при помощи которого проводилось численное интегрирование уравнений Навье–Стокса в естественных переменных $u – v – p$. Расчетные сетки в двух методах расчета были одинаковыми, граничные условия – эквивалентными. Результаты расчета продемонстрировали вполне удовлетворительное согласие результатов по всем параметрам течения; наибольшее расхождение (до 10%) наблюдалось в значениях чисел Струхала Sh. Хорошее совпадение результатов, полученных с использованием двух различных методик, позволяет надеяться на их достоверность.

Результаты моделирования

Безграничный поток жидкости моделировался прямоугольной областью D с параметрами $L_1 = -20$, $L_2 = 80$, $H = 20$, что обеспечивало пренебрежимо малое

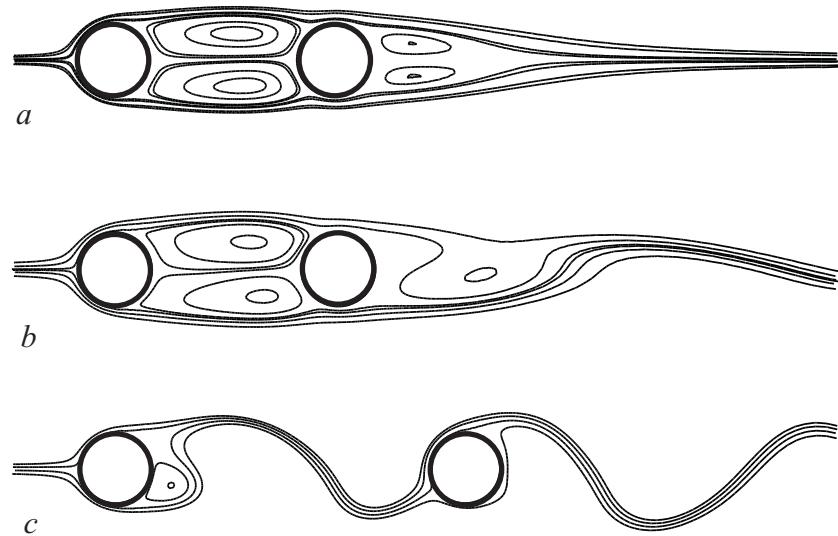


Рис. 2. Линии тока при докритическом и посткритическом режиме: а) $G = 6$, $Re = 100$; б) $G = 6$, $Re = 200$; в) $G = 10$, $Re = 200$

влияние внешних границ на численное решение задачи. Использовалась нерегулярная треугольная конечноэлементная сетка с существенным стущением узлов в окрестности обтекаемых тел. Отношение площадей наибольшего и наименьшего элементов составляет порядка 3000. На поверхности каждого цилиндра расположены по 72 точки. Расчетная сетка содержит около 19 000 узлов и 38 000 элементов; пример показан на рис. 1. Для решения задачи (3), (7) на базе этой сетки строилась сетка 10-узловых треугольных элементов с кубическими базисными функциями; количество узлов этой сетки возрастает до 150 000.

Численное моделирование процесса обтекания вязкой жидкостью тандема круговых цилиндров проводилось при числах Рейнольдса $Re = 100, 200$; величина межцентрового расстояния G варьировалась в диапазоне от 3 до 10. Решение нестационарной задачи проводилось, начиная с $t = 0$, с шагом по времени 0.01 и продолжалось до момента достижения стационарного состояния либо до установления автоколебательного режима. Время T выхода на стационарный режим для разных расстояний G и чисел Re оказалось разным. Например, $T = 200$ при $G = 3$, $Re = 200$, а при $G = 6$, $Re = 100$ требуется вести счет до $T = 600$.

Были исследованы такие характеристики течения, как линии тока, линии постоянной завихренности, поля скорости и давления, подсчитывались коэффициенты сопротивления C_D и подъемной силы C_L для обоих цилиндров. Кроме того, для визуализации течения моделировалось истечение дыма (невесомых меченых частиц) с поверхностей обтекаемых тел.

Расчетным путем подтверждено, что для любого числа Рейнольдса существует точка бифуркации – критическое расстояние G^* , которое разделяет два принципиально разных режима течения. Так, $G^* \approx 6.5$ при $Re = 200$, $G^* \approx 4.5$ при $Re = 100$. Ниже по умолчанию приводятся результаты для $Re = 200$, а случай $Re = 100$ оговаривается отдельно.

Докритический режим. При $G < G^*$ между двумя цилиндрами формируется пара замкнутых квазистационарных вихревых зон (рис. 2, а, б), ограниченных двумя линиями тока, проходящими от точек отрыва потока на первом цилиндре

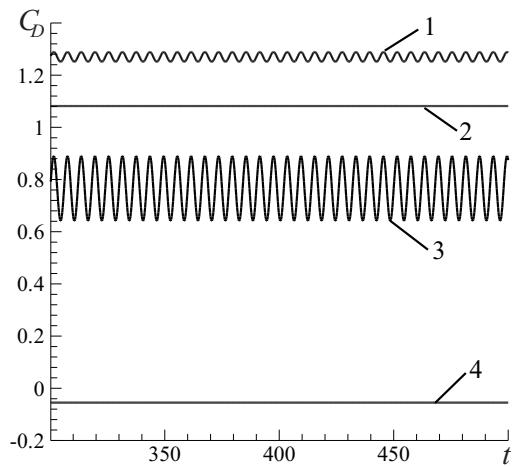


Рис. 3. Осцилляции коэффициентов сопротивления при $Re = 200$: 1 и 3 – C_D^1 и C_D^2 при $G = 10$; 2 и 4 – C_D^1 и C_D^2 при $G = 6$

до точек присоединения на втором. Периодический сход вихрей в докритическом режиме может происходить только со второго тела и зависит от числа Рейнольдса. При $Re = 200$ этот эффект заметен (рис. 2, б), а при $Re = 100$ периодического схода вихрей не наблюдается (рис. 2, а); в этом случае размещение цилиндров тандемом предотвращает формирование вихревой дорожки Кармана в следе за вторым цилиндром.

В целом обтекание тандема цилиндров в докритическом режиме аналогично обтеканию одного вытянутого тела, граница которого образована лобовой частью первого тела, донной частью второго тела и двумя линиями тока, проходящими от точек отрыва на первом цилиндре до точек присоединения на втором. Очевидно, что сопротивление твердого профиля такой формы было бы больше, чем суммарное сопротивление тандема, ибо у последнего отсутствует трение на соединительных линиях тока. Кроме того, в замкнутых вихревых зонах между цилиндрами возникает разрежение, и это приводит к тому, что коэффициент сопротивления второго цилиндра C_d^2 отрицателен. Величины C_d^1 и C_d^2 при $G < G^*$ практически не зависят от времени (см. кривые 2, 4 на рис. 3); амплитуды колебаний подъемной силы C_L^1 и C_L^2 в докритическом режиме для обоих тел относительно малы (рис. 4).

Тем не менее, при достаточно высоких Re автоколебания параметров течения можно зафиксировать и подсчитать число Струхала Sh , равное удвоенной безразмерной частоте схода вихрей. Величина Sh в ходе численных экспериментов замерялась по периоду колебаний коэффициента подъемной силы. Расчетным путем установлено, что числа Струхала у обоих цилиндров совпадают. На рис. 5 приводится зависимость Sh от межцентрового расстояния G в сравнении с данными, полученными другими авторами. Максимальное расхождение результатов составляет не более 12%. Как видно из рисунка, для докритического режима характерно уменьшение частоты схода вихрей с ростом G , причем значения числа Струхала при всех $G < G^*$ значительно ниже, чем в случае обтекания безграничным потоком одиночного кругового цилиндра.

Посткритический режим. При $G > G^*$ парная циркуляционная зона между цилиндрами разрушается (рис. 2, с). Наблюдается периодический срыв вихрей с поверхности обоих обтекаемых тел. В следе за вторым цилиндром формируется

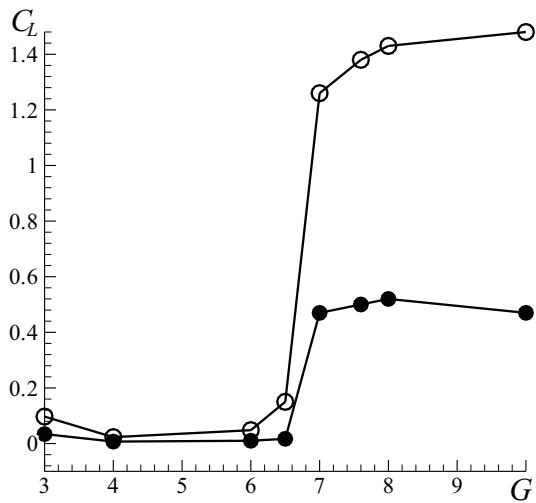


Рис. 4. Зависимость амплитуд колебаний подъемной силы C_L^1 (черные кружки) и C_L^2 (белые кружки) от расстояния G

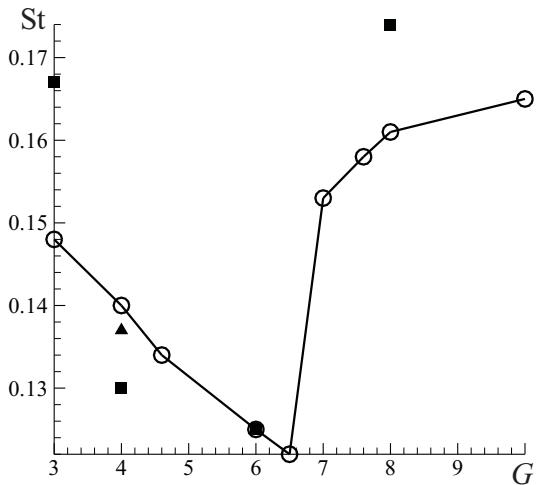


Рис. 5. Зависимость числа Струхала от G (белые кружки) в сравнении с данными [5] (квадраты) и [9] (треугольник)

вихревая дорожка Кармана. Наглядно картина течения в посткритическом режиме показана с помощью штриховых линий на рис. 6.

Коэффициенты сопротивления испытывают осцилляции с течением времени (рис. 3, кривые 1, 3). Значения C_d^1 , C_d^2 (средние за период автоколебаний) положительны, причем $C_d^1 > C_d^2$, поскольку первый цилиндр служит своеобразным экраном для стоящего за ним второго цилиндра. С ростом G сопротивление обоих цилиндров плавно увеличивается (рис. 7); C_d^1 уже при $G > 10$ достигает предельного значения, равного коэффициенту сопротивления одиночного цилиндра при данном числе Рейнольдса.

Амплитуда колебаний коэффициентов подъемной силы C_L^1 и C_L^2 достигает величин 1.5 и 0.5 соответственно (рис. 4). Установлено, что C_L^2 всегда больше, чем C_L^1 .

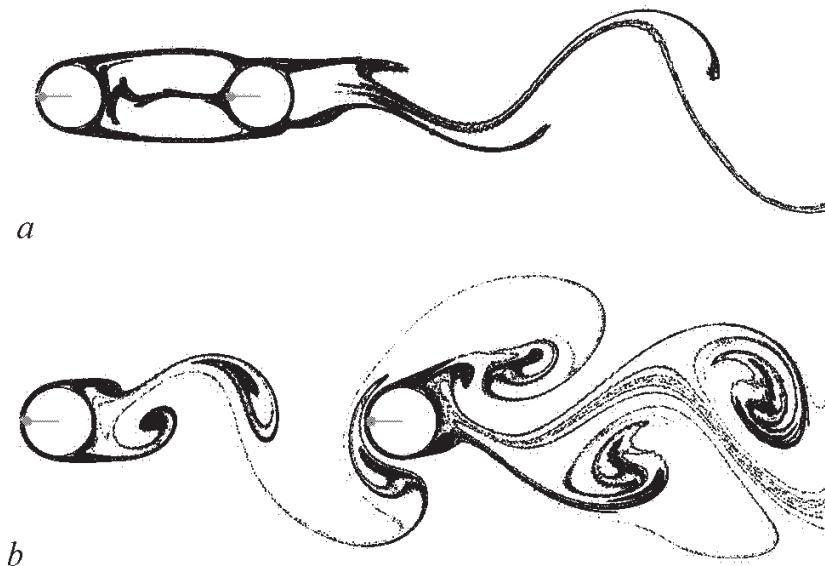


Рис. 6. Картина течения в виде штриховых линий, моделирующих движение дыма, при $G = 6$, $Re = 200$ (a) и $G = 10$, $Re = 200$ (b)

Понятно, что при $G \rightarrow \infty$ обтекание каждого из тел тандема будет происходить независимо, поэтому при больших G все характеристики течения должны стремиться к соответствующим параметрам обтекания одиночного цилиндра. Именно так обстоит дело с C_d^1 . Однако при $G = 10$ число Струхала равно 0.165, что все еще ниже, чем $Sh = 0.175$ при обтекании одиночного цилиндра.

Бифуркация. При переходе через точку бифуркации $G = G^*$ наблюдаются следующие особенности перестройки течения:

- меняется характер течения: квазистационарное обтекание тандема переходит в автоколебательный режим с периодическим срывом вихревых сгустков с поверхности каждого цилиндра и образованием дорожки Кармана в следе;
- коэффициенты сопротивления и амплитуды изменения подъемной силы резко возрастают, причем величина C_D^2 меняет знак с отрицательного в докритической области на положительный при $G > G^*$;
- принципиально меняется распределение давления по поверхности цилиндра, расположенного вниз по потоку: при $G < G^*$ давление имеет два симметричных максимума, соответствующих точкам присоединения потока, а после бифуркации остается один максимум, соответствующий точке торможения потока;
- скачком возрастает число Струхала, причем на точку бифуркации приходится минимум частоты автоколебаний.

Влияние числа Рейнольдса. Численное исследование обтекания тандема цилиндров при $Re = 100$ показало, что все качественные особенности смены режима течения, выявленные при $Re = 200$, сохраняются, однако меняются численные значения параметров. Если при $Re = 200$ бифуркация происходит при $G^* \approx 6.5$, то

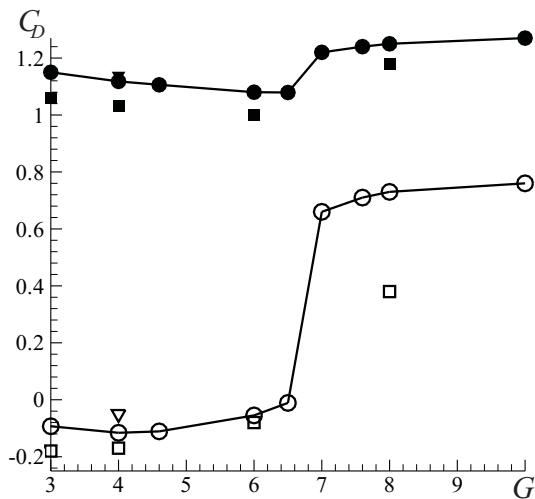


Рис. 7. Зависимость коэффициента сопротивления цилиндров от межцентрового расстояния (черные кружки – C_D^1 , белые кружки – C_D^2) в сравнении с результатами [5] (квадраты) и [9] (треугольники)

Табл. 1

Зависимость параметров течения от числа Рейнольдса

Re	G^*	C_D^1	C_D^2	C_L^1	C_L^2	Sh	$[C_D^1]$	$[C_D^2]$
100	7.7	1.35	0.72	0.47	1.48	0.143	0.07	0.37
200	6.5	1.27	0.76	0.27	1.15	0.165	0.14	0.67

при $Re = 100$ эта величина равна 7.7; таким образом, G^* убывает с ростом Re . Величины скачков коэффициентов сопротивления $[C_D^1]$ и $[C_D^2]$ при переходе через точку бифуркации растут с ростом числа Рейнольдса. Аналогично ведут себя и скачки других параметров течения. Результаты расчетов сведены в табл. 1, в которой коэффициенты сопротивления и амплитуды колебаний подъемной силы, а также числа Струхалая представлены для посткритического режима при $G = 10$.

Summary

A.B. Mazo, I.V. Morenko. Laminar viscous flow around a tandem of circular cylinders.

Viscous laminar flow around a tandem of circular cylinders was investigated numerically when order of Reynolds number is 100. It has been shown that there is a critical distance between flowed bodies, when all parameters of the flow have jump changes. Behavior of the flow near the point of bifurcation was studied in details.

Литература

1. Zdravkovich M.M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements // ASME J. of Fluids Eng. – 1977. – No 99. – P. 618–633.
2. Zdravkovich M.M., Pridden D.L. Interference between two circular cylinders; series of unexpected discontinuities // J. of Industrial Aerodynamics. – 1977. – No 2. – P. 255–270.
3. Summer D., Richards M.D., Akosile O.O. Two staggered circular cylinders of equal diameter in cross-flow // J. of Fluids and Structures. – 2005. – V. 20, No 2. – P. 255–276.

4. *Pozrikidis C.* Boundary conditions for shear flow past a permeable interface modeled as an array of cylinders // Computers and Fluids. – 2004. – No 33.– P. 1–17.
5. *Meneghini J.R., Saltara F., Siqueira C.L.R., Ferrari Jr.J.A.* Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements // J. of Fluids and Structures. – 2001. – No 15.– P. 327–350.
6. *Мазо А.Б., Даутов Р.З.* О граничных условиях для уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока – завихренность при моделировании обтекания системы тел // ИФЖ. – 2005. – Т. 78, № 2. – С. 75–79.
7. *Флемчер К.* Вычислительная гидродинамика. Ч. 2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
8. *Мазо А.Б.* Численное моделирование вязкого обтекания системы тел на основе уравнений Навье – Стокса в переменных функция тока - завихренность // ИФЖ. – 2005. – Т. 79, № 3. – С. 57–67.
9. *Patnaik B.S.V., Narayana P.A.A., Seetharamu K.N.* Finite element simulation of transient laminar flow past a circular cylinder and two cylinders in tandem. Influence of buoyancy // Int. J. of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. – 2000. – V. 10, No 6. – P. 560–580.

Поступила в редакцию
26.09.05

Мазо Александр Бенцианович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

E-mail: amazo@ksu.ru

Моренко Ирина Вениаминовна – кандидат технических наук, научный сотрудник Института механики и машиностроения КазНЦ РАН.

E-mail: morenko@mail.knc.ru