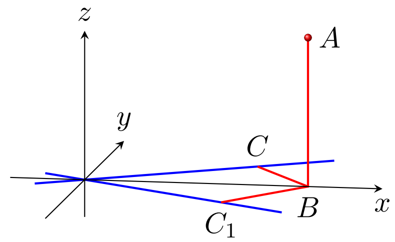
ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
2 декабря 2023 г.

1. Дано число $a \in (0;1)$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1-a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=1}^n a^k \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a(1-a^n)}{1-a} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{1-a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. По двум пересекающимся прямым, угол между которыми равен 2α, катится сфера радиуса R. Доказать, что центр сферы при этом движется по эллипсу и найти полуоси этого эллипса.
Ответ: $\frac{R}{\sin\alpha}$ и R.
Решение. Проведем оси Ox и Oy по биссектрисам к прямым (угол между прямыми и Ox равен α), а ось Oz перпендикулярно плоскости, в которой лежат прямые. Тогда центр сферы будет лежит в плоскости Oxz. Пусть центр сферы находится в точке A с координатами $(x, 0, z)$. Тогда проекция точки A на плоскость Oxy – точка B – имеет координаты $(x, 0, 0)$. Проекция точки B на одну из прямых – точка C – координаты $(x\cos^2\alpha, x\cos\alpha\sin\alpha, 0)$.



Запишем условие касания $AC = R$:

$$(x - x\cos^2\alpha)^2 + (x - x\cos\alpha\sin\alpha)^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{(R/\sin\alpha)^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$$

3. Доказать, что интеграл $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x\, dx$ является иррациональным числом при всех $n \in \mathbb{N}$ (При доказательстве можно использовать иррациональность чисел e, π, а также $\ln m$ при натуральных $m > 1$).
Решение. Пусть $I_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x dx$. Непосредственным интегрированием определяем $I_0 = \frac{\pi}{4}$, $I_1 = \frac{\ln 2}{2}$. Таким образом, I_0 и I_1 иррациональны. Для всех $n > 1$ имеем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1}\bigg|_0^{\pi/4} - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}.$$

Использование этой формулы и метода математической индукции позволяют доказать иррациональность I_n при всех $n \in \mathbb{N}$.

4. Пусть полином $P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^n a_i x^i$, $a_i \geqslant 0$ имеет только действительные корни. Верно ли, что $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, \ldots, n-1$.
Ответ: Да, верно.
Решение. Очевидно, что рассматриваемый полином $P_n(x)$ не может иметь положительных корней, все его корни это действительные неположительные числа, при этом, коэффициент при старшей степени неотрицателен. Докажем индукцией по степени полинома, что для любого такого полинома бесконечная в обе стороны последовательность его коэффициентов, дополненная нулями с обоих сторон, обладает свойством $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$ для любого i.
База индукции (случай $n = 1$) очевидна. Далее, имеем

$$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x + c), \quad \text{где } -c \leqslant 0 \text{ — один из корней.} \tag{1}$$

При этом, для полинома $P_{n-1}(x)$ выполнено предположение индукции. Пусть в последовательности коэффициентов полинома $P_{n-1}(x)$ на i-м месте стоит b_i. Тогда, используя (1) получаем, что на i-м месте в последовательности коэффициентов $P_n(x)$ стоит $b_{i-1} + c\,b_i$. Мы должны доказать, что

$$(b_{i-1} + cb_i)^2 \geqslant (b_{i-2} + cb_{i-1})(b_i + cb_{i+1}).$$

После раскрытия скобок и использования предположений индукции о том, что $b_i^2 \geqslant b_{i-1}b_{i+1}$, $b_{i-1}^2 \geqslant b_{i-2}b_i$ видим, что нам достаточно доказать неравенство $b_{i-1}b_i \geqslant b_{i-2}b_{i+1}$. Оно получается перемножением двух предыдущих неравенств.
Замечание: В книге "Харди Г.Г., Литлвуд Дж.И., Полиа Г., Неравенства" в разделе 2.22 приведено доказательство более сильного результата, принадлежащего И. Ньютону. А именно, пусть справедливо условие задачи. Тогда $a_i^2 > a_{i-1}a_{i+1}\frac{(i+1)(n-i+1)}{i(n-i)}, \quad i = 1, \ldots, n-1$, если только не все корни многочлена совпадают. В последнем случае эти неравенства обращаются в равенства.

5. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон четырехугольника. Доказать, что этот четырёхугольник – трапеция или параллелограмм.
Решение. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ – радиус-векторы последовательных вершин четырёхугольника. Тогда

$$\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}-\frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}\right)^2=\left(\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{d}|+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|}{2}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\mathbf{a}-\mathbf{d}}{2}+\frac{\mathbf{b}-\mathbf{c}}{2}\right)^2=\left(\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{d}|}{2}+\frac{|\mathbf{b}-\mathbf{c}|}{2}\right)^2.$$

После упрощения получим $(\mathbf{a}-\mathbf{d},\mathbf{b}-\mathbf{c}) = |\mathbf{a}-\mathbf{d}||\mathbf{b}-\mathbf{c}|$, что говорит о коллинеарности сторон $\mathbf{a}-\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ четырёхугольника.

6. Даны p карточек (p — простое число), на которых написаны целые числа. Максимум одно из этих чисел делится на p. Доказать, что для любого r, $0 \leqslant r < p$ можно выбрать несколько карточек, которые в сумме дадут остаток r при делении на p.
Решение. Для удобства будет рассматривать числа на карточках как элементы $\mathbb{Z}_p$ — кольцо вычетов по модулю p. Докажем, что для любого k, $k < p$ не существует множества из k различных элементов $\mathbb{Z}_p$, переходящего самого в себя при неком ненулевом сдвиге s. Действительно, если бы это было так, то повторяя этот сдвиг ℓ раз, $0 < \ell \leqslant k$ мы бы добились добились перехода фиксированного элемента из этого множества в себя, то есть $\ell \cdot s = 0$, что в силу простоты p невозможно.
Доказанное свойство позволяет легко получить по индукции, что любые k, $k \leqslant p$ карточек породят (в виде различных сумм) по крайней мере k различных элементов $\mathbb{Z}_p$. При $k = p$ получаем требуемое утверждение (при наличии нулевой карточки индукцию следует начать с неё).

(М.М.Ямалеев, Д.Т.Тапкин)

7. Элементы невырожденной квадратной матрицы A порядка n имеют вид $a_{ij} = \frac{1}{x_i+y_j}$. Докажите, что сумма всех элементов матрицы A^{-1}, равна $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$.
Решение. Пусть X — диагональная матрица с диагональю $(x_1, \ldots, x_n)$, Y — диагональная матрица с диагональю $(y_1, \ldots, y_n)$. Имеем: $XA + AY = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — матрица, все элементы которой равны единице. Из определения умножения матриц следует, что сумма всех элементов матрицы A^{-1} есть tr (след, сумма диагональных элементов) матрицы $\mathbf{1}A^{-1}$. Последний в нашем случае совпадает с $\mathrm{tr}(XAA^{-1} + AYA^{-1}) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(AYA^{-1}) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$. Здесь мы использовали факт, что у подобных матриц следы совпадают.

(Э.Ю.Лернер)

Замечание: Обобщение равенства $XA + AY = \mathbf{1}$ определяет класс Коши-подобных матриц.

8. Имеется 100 шаров, на которых написаны числа 1, 2, ..., 100. Заплатив 90 рублей, игрок может случайным образом выбрать из них n различных шаров (например, вытаскивая шары из мешка), после чего он получит в качестве премии столько рублей, каково максимальное число на выбранных им шарах. Найти наименьшее n, при котором математическое ожидание размера премии превысит 90 рублей.
Ответ: При $n = 9$.
Решение. *Способ 1.* В силу симметрии минимума и максимума матожидание премии будет равно $101 - m$, где m — матожидание минимального значения, написанного на случайно выбранных n шарах. Пусть по кругу лежит 101 шар, выберем случайным образом $n + 1$ из них, на одном из выбранных шаров напишем число ноль, а остальные шары занумеруем по очереди, например, идя по часовой стрелки от шара с номером ноль. Тогда выбор остальных n шаров эквивалентен случайному выбору n чисел от 1 до 100 и минимальное из них совпадает с расстоянием от нулевого шара до ближайшего выбранного шара по часовой стрелке. Поскольку в изначальном выборе сумма всех $n+1$ расстояний между соседними выбранными шарами равна 101, то $m = 101/(n + 1)$. Неравенство: $101 - 101/(n + 1) > 90$ выполнено начиная с $n = 9$.

Способ 2. Как и ранее, в силу симметрии матожидание премии будет равно $101 - m$, где матожидание минимума m с учётом равновероятности всех наборов из n шаров (n-выборок) из множества $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ может быть подсчитана по формуле

$$m = \binom{100}{n}^{-1} \sum_{X \in \binom{S}{n}} \min X,$$

где переменная X при суммировании пробегает множество всех n-выборок

$$\binom{S}{n} = \left\{ X \subseteq S \mid \quad |X| = n \right\}.$$

Пусть $S_0 = S \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$. Отметим теперь, что для каждого $X \in \binom{S}{n}$ значение $\min X$ совпадает с количеством различных расширений $Y \supseteq X$ таких, что $Y \subseteq S_0$, $\min Y < \min X$ и $|Y| = n+1$. Поэтому сумма всех $\min X$ равна общему количеству $(n+1)$-выборок из 101-элементного множества S_0. Таким образом,

$$m = \binom{100}{n}^{-1} \binom{101}{n+1} = \frac{101}{n+1}.$$

(И.Ш.Калимуллин)

9. По границе n-мерного куба $\{(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leqslant x^i \leqslant 1, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ из вершины $O(0, 0, \ldots, 0)$ в вершину $E(1, 1, \ldots, 1)$ ползет (n-мерный) муравей. Указать для него кратчайший маршрут и вычислить его длину для а) $n = 4$ (4 балла), б) любого $n > 4$ (3 балла).
Ответ: а) $\sqrt{6}$, б) $\sqrt{n+2}$.
Решение. Поскольку каждая $(n-1)$-грань n-мерного куба определяется либо уравнением вида $x^i = 0$, либо уравнением вида $x^i = 1$, то множество всех $(n-1)$-граней разбивается на два подмножества: $\mathcal{F}_0$, состоящее из граней, содержащих вершину O, и $\mathcal{F}_1$, состоящее из граней, содержащих вершину E. Предположим, что на своем пути γ муравей проходит последовательно $(n-1)$-грани $F_1, F_2, \ldots, F_m$, где $F_1 \in \mathcal{F}_0$, а $F_m \in \mathcal{F}_1$. При некотором k, $0 \leqslant k \leqslant m$, впервые окажется такая ситуация, что $F_k \in \mathcal{F}_0$, а $F_{k+1} \in \mathcal{F}_1$. Пусть переход из F_k в F_{k+1} осуществляется вдоль отрезка AB ($A \in F_k$, $B \in F_{k+1}$) пути γ. Если часть пути от O до A заменить на прямолинейный отрезок OA, а часть пути от B до E заменить на прямолинейный отрезок BE, то новый путь будет не длиннее первоначального. Поэтому кратчайший путь из вершины O в вершину E проходит по двум $(n-1)$-граням.
Без ограничения общности можно считать, что путь γ муравья проходит по $(n-1)$-граням F_1 с уравнением $x^1 = 0$ и F_2 с уравнением $x^2 = 1$. Грани F_1 и F_2 имеют общую $(n-2)$-грань F_{12}, определяемую системой уравнений $x^1 = 0$, $x^2 = 1$. Повернём грань F_2 вокруг F_{12} на прямой угол так, чтобы ее ребра, параллельные оси Ox^1, оказались параллельны оси Ox^2. Пусть F_2' – $(n-1)$-куб, представляющий собой новое положение грани F_2. $(n-1)$-кубы F_1 и F_2' образуют прямоугольный параллелепипед P, имеющий размеры $\underbrace{1 \times 1 \times \ldots \times 1}_{n-2} \times 2$.
После поворота грани F_2 путь γ перейдет в путь γ', соединяющий противоположные вершины параллелепипеда P и имеющий ту же длину, что и γ. Кратчайший путь γ', соединяющий противоположные вершины параллелепипеда P является его диагональю и имеет длину $\sqrt{1^2 + 1^2 + \ldots 1^2 + 2^2} = \sqrt{n+2}$. Соответствующий путь γ при этом будет проходить через центр $(n-2)$-грани F_{12} – точку $(0, 1, 1/2, \ldots 1/2)$.

(В.В.Шурыгин)

Замечание: Заметим, что общая формула годится для любого $n > 1$.

10. Четыре путешественника одновременно начинают движение на плоскости по прямолинейным маршрутам с постоянной скоростью. У каждого путешественника своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой лучи, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будут находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвертый путешественники также встретятся?
Ответ: Да.
Решение. Движение каждого путешественника по плоскости описывается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$, где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор начальной точки, $\mathbf{v}$ — постоянный вектор скорости, а $t \geqslant 0$ – время. Это движение можно представить графиком – отрезком прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, t, где x, y – прямоугольные

координаты на плоскости. Пусть a, b, c и d – прямые, на которых лежат графики движения путешественников. Так как первые три путешественника должны попарно встретиться, прямые a, b, c пересекаются и, следовательно, лежат в некоторой плоскости π. В этой же плоскости π лежит и четвертая прямая d, поскольку прямые a, b, d также пересекаются. Следовательно, прямые c и d тоже пересекаются в некоторой точке (x_1, y_1, t_1) и третий и четвертый путешественники в момент времени t_1 окажутся в точке с координатами (x_1, y_1).

Остаётся только убедиться, что при этом t_1 будет положительным числом (т.е. условие задачи допускает решение). Плоскость π пересекает плоскость $t = 0$ по некоторой прямой ℓ, которую должны пересечь и все прямые a, b, c и d в точках, координаты x и y которых являются координатами начальных точек путешественников. Таким образом, все путешественники находились в начальный момент времени в точках прямой ℓ (считаем, что плоскость $t = 0$ совпадает с плоскостью, по которой двигались путешественники) и они двигались в одну сторону от неё

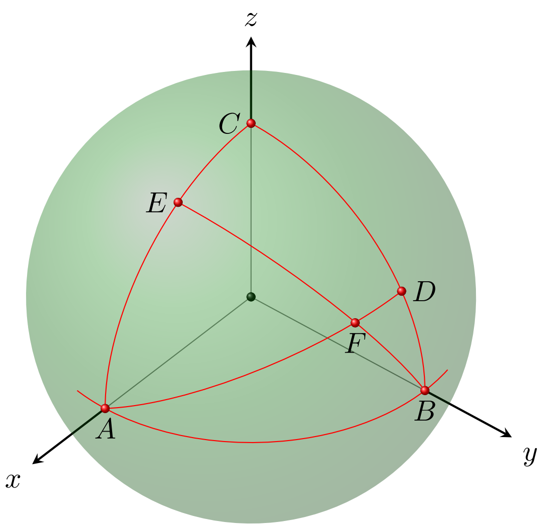
Замечание: Заметим, что путешественники также и в любой последующий момент времени будут находиться на одной прямой, параллельной прямой ℓ, т.е. векторные скорости $\mathbf{v}$ путешественников имеют одинаковые проекции на прямую $\ell^{\perp}$, ортогональную ℓ.

Критерии: показано, что прямые c и d пересекаются – 5 баллов. Доказано, что условия задачи выполняются, если точки, в которых путешественники находились в начальный момент времени, лежат на прямой линии и время встречи $t_1 > 0$ – 7 баллов.

11. Четыре путешественника одновременно начинают движение на сфере с постоянной скоростью в антиподальные (т.е. симметричные относительно центра сферы) точки. У каждого путешественника своя скорость и своя начальная точка. Все четыре траектории движения, представляющие собой половины больших окружностей, попарно пересекаются, в каждой точке пересечения встречается ровно две траектории. Известно, что первый и второй встретятся (т.е. будет находиться в одной точке в один момент времени) как между собой, так и со всеми остальными. Можно ли утверждать, что третий и четвертый путешественники также встретятся?

Ответ: Нет.

Решение. Для отрицательного ответа необходимо привести один пример. Рассмотрим на сфере единичного радиуса треугольник ABC с тремя прямыми углами (см. рис.). Пусть первый путешественник движется со скоростью v по дуге $\overset{\frown}{AC}$ (сечение сферы плоскостью $y = 0$), а второй – по дуге $\overset{\frown}{BC}$ (сечение плоскостью $x = 0$) с той же скоростью v. Эти путешественники встретятся в точке C.



Далее, пусть третий движется со скоростью $3v$ по $\overset{\frown}{AD}$ (сечение плоскостью $y = \sqrt{3}z$). У него состоится встреча как с первым (в начальный момент времени), так и со вторым ($\overset{\frown}{AD} = 3\overset{\frown}{BD}$). Траектория четвёртого путешественника – дуга $\overset{\frown}{BE}$ (сечение плоскостью $z = \sqrt{3}x$). В начальный момент четвертый находился в одной точке со вторым. Точка E делит дугу AC в отношении 2:1, поэтому дуга $\overset{\frown}{BE} = \frac{3}{2}\overset{\frown}{AE}$ и при скорости $\frac{3}{2}v$ четвертый путешественник встретится с первым.

Теперь докажем, что третий и четвертый путешественники, движущиеся со скоростями $3v$ и $\frac{3}{2}v$, не встретятся. Для этого надо показать, что $\overset{\frown}{AF} \neq 2\overset{\frown}{BF}$. Координаты точки F найдем как точку пересечения плоскостей $y = \sqrt{3}z$ и $z = \sqrt{3}x$, откуда $F\left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)$. Следовательно $\cos\overset{\frown}{BF} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\overset{\frown}{AF} = \frac{1}{\sqrt{13}}$. При подстановке данных значений в формулу косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ получаем противоречие.

(Д.Ф.Абзалилов)

Замечание: Для нахождения длин дуг можно также пользоваться теоремой синусов. Например, для сферического треугольника ABF она имеет вид

$$\frac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\angle B} = \frac{\sin\overset{\frown}{BF}}{\sin\angle A} = \frac{\sin\overset{\frown}{AB}}{\sin\angle F},$$