Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Кафедра теории функций и приближений
Направление: 01.03.01 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Бакалаврская работа)

Решение нагруженных интегральных уравнений

Работа завершена:

«_____»______________ 2015 г. __________ Кудряшов Д. Ю.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент каф. ТФиП

«_____»______________ 2015 г. __________ Агачев Ю. Р.

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук,
профессор каф. ТФиП

«_____»______________ 2015 г. __________ Авхадиев Ф. Г.

КАЗАНЬ – 2015

Содержание

Введение 3

1. Основные определения. 4

2. Вспомогательные результаты. 7

3. Нагруженные интегральные уравнения. 9

4. Методы решения нагруженных интегральных уравнений. 12

Заключение. 26

Список литературы 27

Введение

Начало исследований нагруженных интегральных уравнений было положено в работах A.Kneser, L.Lichtenstein, Н.Н.Назарова, Н.М. Гюнтера (см., напр., [16,17]). Общее определение нагруженных уравнений дано А.М. Нахушевым в работе [15].

Важность этих уравнений подчеркивали В.И. Смирнов , А.А. Самарский , А.Н.Тихонов , А.Н. Крылов , которые приводили примеры прикладных задач из техники и физики , сводящиеся к нагруженным интегральным уравнениям (см., напр., [14]).

Целью моей работы является построение приближений к решениям нагруженных интегральных уравнений на базе аппаратов приближения функций сплайнами. В ней решается задача построения вычислительных схем для нагруженного интегрального уравнения методами коллокации и механических квадратур и исследования вопросов сходимости указанных методов.

Работа состоит из двух частей: реферативной и самостоятельной. В реферативной части излагаются известные результаты по теории нагруженных интегральных уравнений. Самостоятельная часть является содержанием изложенных в п.2 результатов.

1. Основные определения

1.1. Действительная функция $f(x)$ называется интегрируемой с квадратом на отрезке $[a, b]$, если $f^2(x)$ интегрируема на [a,b]. Совокупность всех интегрируемых с квадратом на $[a, b]$ функций обозначают $L_2(a, b)$. Совокупность всех интегрируемых на $[a, b]$ функций обозначают $L_1(a, b)$. Введем также пространство $X = M[a, b]$ ограниченных измеримых на $[a, b]$ функций.

Отметим здесь следующие необходимые для нас свойства функций из $L_2(a, b)$.

1^0. Если функции f и $g \in L_2(a, b)$, то имеет место *неравенство Коши-Буняковского-Шварца*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx,$$

которое через скалярное произведение $(f, g) \equiv \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ и норму $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 dx}$ записывается в форме:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|, f, g \in L_2(a, b).$$

2^0. Для $f, g \in L_2(a, b)$ имеет место неравенство треугольника

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

3^0. Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ интегрируемы с квадратом на отрезке $[a, b]$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x), f_2(x), ...$ сходится в среднем квадратичном к функции $f(x)$; кратко этот факт записывают в виде: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} f$, (если нет двусмысленности, то $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$.)

Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из $L_2(a,b)$, сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x)$ сходится .

1.2. Функцию $f(x)$ называют непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого отрезка, а на его концах, т.е. в точках a и b, непрерывно соответственно справа и слева. Множество всех таких функций обозначим через $C[a,b]$. В пространстве $C[a;b]$ норму задаем формулой

$$\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)|, f \in C[a,b].$$

Класс m раз непрерывно дифференцируемых функций обозначают через $C^{(m)}[a,b], m \ge 0-$ целое ($C^{(0)}[a,b] \equiv C[a,b]$). Введем также класс $C^{(-1)}[a,b]-$ кусочно непрерывных на $[a,b]$ функций.

Пусть $f \in C[a,b]$. Модуль непрерывности $\omega(f,\delta)$ функции $f(x)$ для фиксированного положительного числа $\delta \in (0, b-a]$, определяется следующим образом:

$$\omega(f,\delta) := \sup_{x',x''\in[a,b],|x'-x''|\le\delta} |f(x') - f(x'')|.$$

Из определения следует, что модуль непрерывности является монотонно неубывающей переменной $\delta, \delta \in (0, b-a]$. Условие $f \in C[a,b]$ равносильно равенству $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$, в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.Для функции $h(t,s) \in C[a,b] \times L_1(a,b)$ через $\omega_t(h,\delta)_{\infty,1}$ обозначим частный модуль непрерывности $h(t,s)$ по переменной t, когда норма по s берется в L_1,а для $h(t,s) \in C([a,b]^2)$ обозначим через $\omega_t(h,\delta)-$ обычный частный модуль непрерывности $h(t,s)$ по переменной t.

1.3. Пусть $f \in C[a,b]$, и пусть задана сетка узлов

$$\Delta_n : a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b, \quad n \in N,$$

удовлетворяющая условию

$$\|\Delta_n\| \equiv \max_{1\le k\le n} (t_k - t_{k-1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Определение. Функция $g(t) = S_n^m(x;t)$ называется интерполяционным для функции $f(x)$ сплайном степени $m \geq 0$, если выполняются условия:

1) $g(t)$ на каждом частичном отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ есть некоторый полином степени $\leq m$, т.е. $g(t) = g_k(t)$, при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ где $g_k(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} a_{kj}x^j, a_{kj} \in R$;

2) $g \in C^{(m-1)}[a,b]$;

3) $g(t_j) = f(t_j), \quad j = 0, ..., n.$

При $m \geq 2$ интерполяционные сплайны определяются не однозначно, а при $m = 0$ и $m = 1$ сплайны $S_n^m(x;t)$ существуют и определяются единственным образом. Сплайн $S_n^m(x;t)$ единственным образом [10] представим в виде

$$S_n^m(x;t) = \sum_{j=0^m}^{n} x(t_j)s_{n,j}^m(t), \quad 0^0 = 1, m = 0, 1, ...,$$

где $\{S_{n,j}^m(t) \equiv s_j^m(t)\}$ – фундаментальные сплайны степени m. В частности при $m = 0$ и $m = 1$ интерполяционные сплайны нулевой и первой степени имеют вид:

$$S_n^0(x;t) = \sum_{j=0}^{n} x(t_j)s_j^0(t), S_n^1(x;t) = \sum_{j=0}^{n} x(t_j)s_j^1(t).$$

Здесь фундаментальные сплайны нулевой и первой степени в явном виде записываются следующим образом :

$$s_1^0(t) = \begin{cases} 1, & a \leq t \leq t_1, \\ 0, & t_1 < t < b, \end{cases} \quad s_j^0(t) = \begin{cases} 1, & t_{j-1} < t < t_j, \\ 0, & t \notin (t_{j-1}, t_j] \end{cases} (j = \overline{2, n})$$

$$s_0^1(t) = \begin{cases} \frac{t_1 - t}{t_1 - a}, & \text{при } a \leq t \leq t_1 \ , \\ 0, & \text{при } t_1 \leq t \leq b \ , \end{cases} \quad s_n^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq t \leq t_{n-1}, \\ \frac{t - t_{n-1}}{b - t_{n-1}}, & \text{при } t_{n-1} \leq t \leq b, \end{cases}$$

при любом j, $1 \le j \le n-1$,

$$s_j^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \le t \le t_{j-1}, \\ \frac{t-t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & \text{при } t_{j-1} \le t \le t_j, \\ \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j}, & \text{при } t_j \le t \le t_{j+1}, \\ 0 & \text{при } t_{j+1} \le t \le b. \end{cases}$$

Норма оператора S_n^1 в пространстве непрерывных функций равна 1 при любом n, так как

$$\sum_{j=1}^{n} |s_j(x)| \equiv \sum_{j=0}^{n} s_j(x) \equiv 1.$$

2. Вспомогательные результаты

2.1. Пусть X и $Y-$ произвольные линейные нормированные пространства с нормами соответственно $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$, а X_n и Y_n- произвольные последовательности их конечномерных подпространств: $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y (n = 1, 2, ...)$. Рассмотрим уравнения

$$Kx = y (x \in X, y \in Y), \tag{2.1}$$

$$K_n x_n = y_n (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \tag{2.2}$$

где K и $K_n (n \in N)-$ линейные операторы из X в Y и из X_n в Y_n соответственно (всюду ниже этот факт кратко будем обозначать так: $K : X \to Y, K_n : X_n \to Y_n$).

Для уравнений (2.1) и (2.2) имеют место следующие результаты (см., напр., в [8, 9, 3]).

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия:*

а) оператор $K : X \to Y$ *непрерывно обратим, т.е. существует ограниченный обратный* $K^{-1} : Y \to X$;

б) $\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X \to Y} \to 0, \quad n \to \infty$;

в) $dimX_n = dimY_n = m(n) < \infty \quad (n = 1, 2, ...)$.

Тогда при всех n, удовлетворяющих неравенству

$$q_n \equiv \|K^{-1}\|\|K - K_n\| < 1, K - K_n : X_n \to Y,$$

приближенное уравнение $K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, \quad y_n \in Y_n)$ имеет единственное решение $x_n^* \in X_n$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, причем

$$\|x_n^*\| \leq \|K_n^{-1}\|\|y_n\|, \quad \|K_n^{-1}\| \leq \|K^{-1}\| \cdot (1 - q_n)^{-1}.$$

Если, кроме того, выполнено условие

г) $\delta_n \equiv \|y - y_n\| \to 0, \quad n \to \infty$,

то приближенные решения x_n^*сходятся к точному решению $x^* \in X$ по норме пространства X. При этом погрешность приближенного решения может быть оценена любым из неравенств

$$\|K\|^{-1}\alpha_n \leq \|x^* - x_n^*\| \leq \|K_n^{-1}\|\alpha_n, \quad \alpha_n = \|(y - y_n) + (K_n - K)x_n^*\|,$$

$$\|x^* - x_n^*\| \leq \frac{\|K^{-1}\|}{1 - q_n}[\|y - y_n\| + q_n\|y\|] = O(\varepsilon_n + \delta_n).$$

Лемма 2.2. *Пусть $P_n : Y \to Y_n$, уравнение (2.1) имеет решение $x^* \in X$ при данной правой части $y \in Y$ и оператор K_n имеет ограниченный обратный. Тогда погрешность приближенного решения x_n^* для правой части $y_n = P_n y$ может быть представлена в виде*

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(E - K_n^{-1}P_n K)(x^* - x_n) + K_n^{-1}(K_n x_n - P_n K x_n)\|,$$

где $x_n \in X_n-$ произвольный элемент.

Следствие . Пусть $K = E + H, K_n = E + H_n$, где H и H_n- линейные операторы в нормированных пространствах $X = Y$ и $X_n = Y_n$ соответственно,а $E-$ единичный оператор.

Если $H_n - P_n H$ непрерывен в X_n , $P_n H$ непрерывен из пространства $X - X_n$ в X_n и $P_n^2 = P_n$, то в условиях леммы 2.2 для погрешности справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leq (1 + \|K_n^{-1}\|\|P_n H\|) \cdot \|x^* - P_n x^*\| + \|K_n^{-1}\|\|H_n - P_n H\| \cdot \|P_n x^*\|;$$

в частности, при $H_n = P_n H$

$$\|x^* - x_n^*\| \le (1 + \|K_n^{-1}\| \|P_n H\|) \cdot \|x^* - P_n x^*\|.$$

2.2. Справедливы следующие (см., напр., [10,8,2]) результаты из теории сплайнов нулевой и первой степеней.

Лемма 2.3. *Для каждой функции $f \in C[a,b]$ ее интерполяционный сплайн $S_n^1(x;t)$, построенный по сетке $\Delta_n : t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$, обладает следующими свойствами:*

1)$\|f - S_n^1 f\|_{C[a,b]} \le \omega(f, \|\Delta_n\|)$, $\|f - S_n^1 f\|_{C[a,b]} \le 2 \cdot E_n^1(f)$,
где $E_n^1(f)$ есть наилучшие равномерное приближение функции $f(t)$ сплайнами первой степени на сетке Δ_n.

2)$S_n^1(x;t) \rightrightarrows f(t)$ *на* $[a,b]$, $\quad n \to \infty$.

Лемма 2.4.*Пусть $m = 0$ или $m = 1$. Тогда для любой функции $x \in C^{(r)}[-1,1] \quad (r = \overline{0,m})$ справедливы соотношения:*
$\|S_n^m\|_{C \to Z} = 1, \|x^{(i)} - (S_n^m x)^{(i)}\|_Z \le \left(\frac{\|\Delta_n\|}{4}\right)^{r-i} \omega(x^{(r)}; \|\Delta_n\|), \quad 0 \le i \le r.$

3. Нагруженные интегральные уравнения

Здесь приведем результаты (см., напр., [14]), касающиеся теории нагруженных интегральных уравнений.

Определение. Нагруженным интегральным уравнением называется уравнение вида $\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)ds - \sum\limits_{j=1}^m a_j(x)\varphi(s_j) = f(x)$, где $\varphi-$ искомая , f, a_j- заданные на $[a,b]$ функции, $s_j \in [a,b], \quad j = 1, ..., m,-$ фиксированные точки, $K-$ заданная в квадрате $[a,b] \times [a,b]$ функция.

Пусть $f(x)-$ непрерывная в конечном промежутке $[a,b]$ функция, $x_p(p = 1, 2, ..., m)-$ фиксированные точки в этом промежутке и a_p- некоторые положительные числа. Определим интеграл от $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ как сумму обычного интеграла и произведений значений функции $f(x)$ в точках $x = x_p$ на числа a_p. В отличие от обычного интеграла, будем ставить над знаком интеграла черту. Таким образом, новое определение интеграла выражается следующей формулой:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \sum_{p=1}^m a_p f(x_p). \tag{3.1}$$

При этом интегральное уравнение

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^{\bar{b}} K(s,t)\varphi(t)dt,$$

равносильно следующему уравнению с обычным интегралом:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt + \lambda \sum_{p=1}^m a_p K(s,x_p)\varphi(x_p). \tag{3.2}$$

Очевидно, уравнение вида (3.2) представляет собой нагруженное интегральное уравнение. Отметим здесь некоторые свойства интеграла:

1) $\int_a^{\bar{b}}[f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^{\bar{b}} f_1(x)dx + \int_a^{\bar{b}} f_2(x)dx$;

2) $\int_a^{\bar{b}} cf(x)dx = c\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$.

3) При последовательном интегрировании по промежутку $[a,b]$ можно переставлять порядок, т. е. $\int\limits_a^{\bar{b}}\left[\int\limits_a^{\bar{b}} F(s,t)dt\right]ds = \int\limits_a^{\bar{b}}\left[\int\limits_a^{\bar{b}} F(s,t)ds\right]dt.$

Действительно, применяя непосредственно определение (3.1), нетрудно привести обе части написанного равенства к виду
$\int\limits_a^b\int\limits_a^b F(s,t)dsdt + \sum\limits_{p=1}^m \int\limits_a^b \Big[F(s,x_p) + F(x_p,s)\Big]ds + \sum\limits_{p,q=1}^m F(x_p,x_q).$

4) Если $f(x) \geq 0$, то и интеграл (3.1) также имеет не отрицательную величину, и он может равняться нулю только в том случае, если $f(x) \equiv 0$. Совершенно такое же свойство имеет место и для повторного интеграла.

5) Если $|f(x)| \leq m$, то существует такая положительная постоянная k, что имеет место неравенство $\left|\int\limits_a^{\bar{b}} f(x)dx\right| \leq km.$
При $a_p > 0$ мы можем считать $k = (b-a) + a_1 + ... + a_p$.

6) Из последнего свойства вытекает, что равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать при новом понятии интеграла. Если $K(t,s) = K(s,t)$, то мы имеем $\int\limits_a^{\bar{b}} K(s,t)\varphi(t)dt = \int\limits_a^{\bar{b}} K(t,s)\varphi(t)dt.$

7) Характеристические значения и собственные функции будут определяться из однородного уравнения: $\varphi(s) = \lambda \int\limits_a^{\bar{b}} K(s,t)\varphi(t)dt$. В случае симметрии ядра собственные функции можно считать ортогональными: $\int\limits_a^{\bar{b}} \varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)}ds = 0$, или $\int\limits_a^{b} \varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)}ds + \sum\limits_{p=1}^{m} a_p(x_p)\overline{\varphi_2(x_p)} = 0$.

Рассмотрим один пример. Возьмем симметричное ядро $K(s,t)$, равное s при $s \leq t$ и равное t при $s \geq t$, причем основным промежутком является промежуток $[0,1]$. Положим, что в формуле (3.1) $m = 1$ и что единственное дополнительное слагаемое в правой части берется при $x = 1$, т.е. $\int\limits_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + af(1) \quad (a > 0)$.

Однородное уравнение $\varphi(s) = \lambda \int\limits_0^{\bar{1}} K(s,t)\varphi(t)dt$ может быть переписано в виде

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^s t\varphi(t)dt + \lambda s \int_s^1 \varphi(t)dt + \lambda sa\varphi(1). \tag{3.3}$$

Дифференцируя по s, получим

$$\varphi'(t) = \lambda \int_s^1 \varphi(t)dt + \lambda a\varphi(t), \tag{3.4}$$

еще раз дифференцируя, придем к уравнению

$$\varphi'(s) + \lambda\varphi(s) = 0. \tag{3.5}$$

Из (3.3) и (3.4) вытекают следующие два предельных условия: $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(1) = \lambda a\varphi(1)$. Наоборот, легко видим, что решение (3.5), удовлетворяющее указанным условиям, является решением интегрального уравнения (3.3). Если $a = 0$, то мы имеем обычное интегральное уравнение, и предельные условия $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ не содержат параметра λ. Полагая $\lambda = \mu^2$, мы в силу первого из предельных условии имеем: $\varphi(s) = Csin\mu s$, и второе условие дает уравнение для определения μ, а именно $cos\mu = a\mu sin\mu$.

Приведенные выше результаты принадлежат Кнезеру. Эти результаты в дальнейшем позволили показать, что теория Фредгольма справедлива также для нагруженных интегральных уравнений.

4. Методы решения нагруженных интегральных уравнений

4.1. Метод коллокации. Рассмотрим нагруженное интегральное уравнение на промежутке $[0, 1]$:

$$x(t) + \int_0^1 h(t,s)x(s)ds + \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(t)x(t_\ell) = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{4.1}$$

где $h(t, s)$, $a_\ell, \ell = \overline{1, m}$ и $y(t)-$ известные, а $x(t)-$ искомая функции.

На сегменте $[0, 1]$ выберем равномерную сетку узлов

$$\tau_i = \frac{i}{n}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{4.2}$$

Решение уравнения (4.1) будем аппроксимировать сплайном нулевой степени на сетке (4.2)

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(t), \psi_k(t) = s^0_{n,k}(t), \tag{4.3}$$

неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ которого определим из условий метода коллокации:

$$(Kx_n)(\tau_j) = y(\tau_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.4}$$

Запишем в развернутом виде условия (4.4).

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(\tau_j) + \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^1 h(\tau_j, s)\psi_k(s)ds+$$

$$+\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(\tau_j)x_n(t_\ell) = y(\tau_j), \quad j = \overline{1, n} \tag{4.4$'$}$$

Поскольку

$$\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(\tau_j)x_n(t_\ell) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(\tau_j)\psi_k(t_\ell),$$

из условий (4.4$'$) получим систему алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}c_k = y(\tau_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.5}$$

где

$$\alpha_{kj} = \delta_{kj} + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} h(\tau_j, s)ds + \sum_{l=1}^{m} a_l(\tau_j)\psi_k(t_l), \tag{4.6}$$

а

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \text{ – символ Кронеккера}$$

Для построенной вычислительной схемы (4.1),(4.2),(4.5),(4.6) справедливы следующие результаты.

Теорема 4.1. *При выполнении условий:*
1) $y, a_\ell \in C[0,1], \quad \ell = \overline{1,m}$;
2) ядро интегрального оператора $h \in C[0,1] \times L_1$;
3) уравнение (4.1) при нулевой правой части имеет лишь тривиальное решение.

Тогда система алгебраических уравнений (4.5),(4.6) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, хотя бы при $\forall n \in N$ достаточно больших. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (4.3) при $c_k = c_k^*, k = \overline{1,n}$, равномерно сходятся к точному решению $x^*(t)$ уравнения (4.1) со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(x^*; 1/n)\}; \tag{4.7}$$

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(y; 1/n) + \omega_t(h; 1/n)_{\infty,1} + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell; 1/n)\}, \tag{4.8}$$

где $\omega_t(h; 1/n)_{\infty,1}$ есть частный модуль непрерывности $h(t,s)$ по переменной t, когда норма по s берется в L_1.

Следствие 1. Если $h(t,s) \in C([0,1]^2)$, то

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(y; 1/n) + \omega_t(h; 1/n) + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell; 1/n)\},$$

где $\omega_t(h; 1/n)$– обычный частный модуль непрерывности $h(t,s)$ по переменной t.

Следствие 2. Пусть $y, a_\ell, \ell = \overline{1,m}$ и h таковы, что решение $x^* \in H_\gamma$, где $0 < \gamma \le 1$. Тогда верна следующая порядковая оценка для погрешности приближенных решений:

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O(n^{-\gamma}), 0 < \gamma \le 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = M[0,1]$ ограниченных измеримых на $[0,1]$ функций уравнение (4.1) запишем в операторном виде

$$Kx \equiv x + Hx + Ax = y \quad (x, y \in X), \tag{4.9}$$

где оператор H задается формулой

$$(Hx)(t) = \int_0^1 h(t,s)x(s)ds,$$

а оператор A определяется равенством

$$(Ax)(t) \equiv \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(t)x(t_\ell).$$

Запишем теперь операторное уравнение, которому эквивалентна система (4.5), (4.6). В пространстве X введем подпространство X_n функций вида (4.2), и пусть $S_n^0 : X \to X_n$ есть оператор сплайн–интерполирования нулевой степени. Тогда можно показать, что система (4.5), (4.6) эквивалентна заданному в подпространстве X_n операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + S_n^0 H x_n + S_n^0 A x_n = S_n^0 y \quad (x_n \in X_n). \tag{4.10}$$

Покажем однозначную разрешимость уравнения (4.10). Возьмем $\forall$ элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. Учитывая неравенство треугольника для нормы , имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_X \le \|Hx_n - S_n^0 H x_n\| + \|Ax_n - S_n^0 A x_n\| \equiv I_1 + I_2. \tag{4.11}$$

Для первого слагаемого I_1 в (3.11) с помощью неравенства Гельдера и леммы 2.4, последовательно находим:

$$I_1 \equiv \|Hx_n - S_n^0 H x_n\|_X = \|H[h - S_n^{0t} h]x_n\|_X \le$$

$$\leq \|x_n\|_X \cdot \|h - S_n^{0t} h\|_{\infty,1} \leq \omega_t(h;1/n)_{\infty,1} \cdot \|x_n\|_X. \qquad (4.12)$$

Второе слагаемое в (4.11) оценим с учетом леммы 2.4 и свойства модуля непрерывности:

$$I_2 \equiv \|Ax_n - S_n^0 Ax_n\|_X \leq \omega(Ax_n;1/n) \leq \sum_{\ell=1}^{m} |x_n(t_\ell)| \cdot \omega(a_\ell;1/n) \leq$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n) \cdot \|x_n\|_X. \qquad (4.13)$$

Из (4.11)-(4.13) непосредственно следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq \omega_t(h;1/n)_{\infty,1} + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Применяя лемму 2.1, получаем, что уравнение (4.10) и эквивалентная ему система (4.5), (4.6) однозначно разрешимы при $\forall$ натуральных n, начиная с некоторого n_0.

Для правых частей уравнений (4.9) и (4.10) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - S_n^0 y\|_X \leq \omega(y;1/n) \to 0, n \to \infty,$$

что доказывает сходимость приближенных решений к точному в пространстве X со скоростью

$$\sup_t \|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O\{\omega(y;1/n) + \omega_t(h;1/n)_{\infty,1} + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n)\}.$$

Для доказательства оценки (4.7) воспользуемся следствием к лемме 2.2. Учитывая лемму 2.4, получим

$$\sup_t \|x^* - x_n^*\|_X \leq (1 + \|K_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \cdot \|S_n^0\|_{C \to X_n} \cdot \|H\|_{X \to C}) \|x^* - S_n^0 x^*\|_X =$$

$$= O(\|x^* - S_n^0 x^*\|_X) = O(\omega(x^*;1/n)),$$

что и завершает доказательство утверждений теоремы 4.1.

Теорема 4.2. *При выполнении условий:*
1) $y, a_\ell \in C[0,1], \ell = \overline{1,m}$;
2) ядро h *является разностным, т.е.* $h(t,s) = h(s-t), \quad h \in L_1(-1,1)$;
3) уравнение (4.1) при нулевой правой части имеет лишь тривиальное решение.

Тогда система линейных алгебраических уравнений (4.5),(4.6) также имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, *хотя бы при* $\forall$ *достаточно больших натуральных* n. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (4.3) при* $c_k = c_k^*, k = \overline{1,n}$, *равномерно сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (4.1) со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:*

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(x^*; 1/n)\};$$

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\{\omega(y; 1/n) + \omega(h; 1/n)_1 + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell; 1/n)\},$$

где $\omega(h; 1/n)_1-$ *обычный частный модуль непрерывности функции* $h(s-t) \in L_1$.

Доказательство теоремы 4.2 аналогично доказательству теоремы 4.1. Покажем только, что

$$\int_0^1 h(s-\tau_j)\psi_k(s)ds = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} h(s-\tau_j)ds = \int_{\tau_{k-1}-\tau_j}^{\tau_k-\tau_j} h(\tau)d\tau, \quad h \in L_1.$$

Искать будем теперь приближенное решение в виде сплайна первой степени

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k\phi_k(t), \phi_k(t) = s_{n,k}^1(t), \tag{4.14}$$

а неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ определим из условий

$$(Kx_n)(\tau_j) = y(\tau_j), \quad j = \overline{0,n}.$$

Эти условия относительно коэффициентов $\{c_k\}$ дают систему алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{kj} c_k = y(\tau_j), \quad j = \overline{0, n}, \tag{4.15}$$

где

$$\alpha_{kj} = (K\phi_k)(\tau_j) = \delta_{kj} + \int_0^1 h(\tau_j, s)\phi_k(s)ds + \sum_{\ell=1}^{m} a_k(\tau_j)\psi_k(t_\ell). \tag{4.16}$$

Теорема 4.3. *В условиях теоремы 4.1 система линейных алгебраических уравнений (4.15) также имеет единственное решение* $\{c_k^*\}$ *при* $\forall\ n$ *, начиная хотя бы с некоторого* $n_0 \in N$*. Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле (4.14) при* $c_k = c_k^*$*, равномерно сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *со скоростью, определяемой любым из порядковых соотношений:*

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O\{E_n^1(x^*)\};$$

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O\{E_n^1(y) + E_n^{1t}(h)_{\infty,1} + \sum_{\ell=1}^{m} E_n^1(a_\ell)\},$$

где $E_n^1(z)$ *есть наилучшее равномерное приближение функции* $z(t)$ *сплайнами вида (4.14), а* $E_n^{1t}(h)_{\infty,1}$*− частное наилучшее приближение функции* $h \in C \times L_1$ *по переменной* t *сплайнами вида (4.14).*

Следствие. Пусть $y, a_\ell, \ell = \overline{1, m}$ и h (по переменной t) принадлежат классу $W^r H_\gamma$, где $r = 0, 1$, $0 < \gamma \leq 1$. Тогда скорость сходимости приближенных решений к точному может быть охарактеризована порядковым соотношением:

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O(n^{-r-\gamma}), \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad r = 0, 1.$$

Доказательство теоремы 4.3 аналогично доказательству теоремы 4.1. Поэтому остановимся здесь лишь на доказательстве близости операторов (4.9) и (4.10). Используя следствие к лемме 2.4, имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_C \leq \|Hx_n - S_n^1 Hx_n\|_C + \|Ax_n - S_n^1 Ax_n\|_C \leq$$

$$\leq \|x_n\|_C \cdot \|h - S_n^{1t}h]\|_{C\times L_1} + \sum_{\ell=1}^{m} |x_n(t_\ell)| \cdot \|a_\ell - S_n^1 a_\ell\|_C \leq$$

$$\leq \|x_n\|_C \cdot \Big\{ E_n^{1t}(h)_{C\times L_1} + \sum_{\ell=1}^{m} E_n^1(a_\ell) \Big\}.$$

Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n\to X} \leq E_n^{1t}(h)_{C\times L_1} + \sum_{\ell=1}^{m} E_n^1(a_\ell) \to 0, \quad n \to \infty.$$

4.2. Метод механических квадратур. Мы по-прежнему решаем задачу нахождения решения нагруженного интегрального уравнения (4.1).

Первая вычислительная схема . Возьмем квадратурную формулу правых прямоугольников по узлам (4.2):

$$\int_0^1 z(s) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z(\tau_k), \quad z \in C[0,1]. \tag{4.17}$$

Приближения к точному решению будем искать в виде сплайна нулевой степени по узлам (4.2):

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(t). \tag{4.18}$$

Подставив сплайн (4.18) в уравнение (4.1), а затем заменив интеграл в уравнении (4.1) приближенно на квадратурную сумму согласно формулы (4.17), получим приближенное равенство:

$$x(t) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h(t,\tau_k) x_n(\tau_k) + \sum_{l=1}^{m} a_\ell(t) x_n(t_\ell) \approx y(t) \tag{4.19}$$

Потребуем, чтобы левая и правая части приближенного равенства (4.19) совпадали в узлах (4.2).

Тогда относительно приближенных значений $c_j = x_n(\tau_j)$ в узлах τ_j получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} h(\tau_j,\tau_k) c_k + \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(\tau_j) \psi_k(t_\ell) = y(\tau_j), \quad j = \overline{1,n} \tag{4.20}$$

Имеют место для вычислительной схемы (4.1), (4.18), (4.20) следующие результаты.

Теорема 4.4. *При выполнении условий:*

1) $y \in C[0,1], \quad h \in C([0,1]^2)$;

2) уравнение (4.1) при правой части, тождественно равной нулю, имеет лишь нулевое решение.

Тогда система линейных алгебраических уравнений (4.20) также имеет единственное решение c_k^*, *хотя бы при* $\forall$ *натуральных* n , *начиная с некоторого. Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (4.18) при* $c_j = c_j^*, j = \overline{1,n}$, *сходятся равномерно к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (4.1) со скоростью*

$$\sup_t \|x^*(t) - x_n^*(t)\| = O\{\omega(y;1/n) + \omega_t(h;1/n) + \omega_s(h;1/n) + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n)\}.$$

Следствие. Пусть $y, a_\ell, \ell = \overline{1,m}$ и h (по каждой из переменных равномерно относительно другой) принадлежат классу H_γ, $0 < \gamma \le 1$. Тогда верна следующая порядковая оценка для погрешности приближенных решений:

$$\sup_t \|x^*(t) - x_n^*(t)\| = O(n^{-\gamma}), \quad 0 < \gamma \le 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = M[0,1]$ уравнение (4.1) запишем в виде операторного уравнения (4.9).

Теперь запишем систему (4.20) в операторной форме. Для этого в пространстве X введем подпространство X_n функций вида (4.3), и пусть $S_n^0 : X \to X_n$ есть оператор сплайн–интерполирования нулевой степени по узлам $\{\tau_k\}$. Тогда система (4.20) будет эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + S_n^0 H S_n^{0s}(h x_n) + S_n^0 M x_n = S_n^0 y \quad (x_n \in X_n). \qquad (4.21)$$

Поэтому достаточно показать однозначную разрешимость уравнения (4.21). С этой целью возьмем произвольный элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. С учетом неравенства Гельдера имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\| \leq \|Hx_n - S_n^0 H S_n^{0s}(hx_n)\| +$$

$$+\|Mx_n - S_n^0 M x_n\| \equiv \Im_1 + \Im_2. \qquad (4.22)$$

Второе слагаемое в (4.22) оцениваем так же, как и в методе коллокации:

$$\Im_2 \leq \|x_n\|_X \cdot \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell; 1/n). \qquad (4.23)$$

Для первого слагаемого $\Im_1$ в (4.22) имеет место неравенство:

$$\Im_1 \equiv \|Hx_n - S_n^0 H S_n^s(hx_n)\| \leq \|Hx_n - S_n^0 H x_n\| +$$

$$+\|S_n^0 H x_n - S_n^0 H S_n^s(hx_n)\| \equiv I_1 + I_2. \qquad (4.24)$$

Слагаемое I_1 в (4.24) нами уже оценено в методе коллокации:

$$I_1 \equiv \|Hx_n - S_n^0 H x_n\|_X = \|H[h - S_n^{0t} h] x_n\|_M \leq$$

$$\leq \|x_n\|_M \cdot \|h - S_n^{0t} h\|_{\infty,1} \leq \omega_t(h; 1/n) \cdot \|x_n\|_X. \qquad (4.25)$$

Для оценки I_2 воспользуемся тем фактом, что

$$HS_n^{0s}(hx_n) = H(S_n^{0s} h) x_n.$$

Поэтому для I_2, с учетом леммы 2.4, последовательно находим

$$I_2 = \|S_n^0 H x_n - S_n^0 H S_n^{0s}(hx_n)\|_X \leq \|Hx_n - HS_n^{0s}(hx_n)\|_M =$$

$$= \|H(h - S_n^{0s} h) x_n)\|_M \leq \|h - S_n^{0s} h\|_{\infty,1} \cdot \|x_n\|_M \leq \omega_s(h, 1/n) \cdot \|x_n\|_X. \quad (4.26)$$

Из (4.22)–(4.26) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq \{\omega_t(h, 1/n) + \omega_s(h, 1/n) +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell, 1/n)\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

что влечет за собой однозначную разрешимость уравнения (4.21), хотя бы для достаточно больших n. Остается заметить, что

$$\delta_n \equiv \|y - S_n^0 y\|_M \leq \omega(y; 1/n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

чтобы получить утверждения теоремы и ее следствия.

Вторая вычислительная схема . Возьмем составную квадратурную формулу трапеций по узлам (4.2):

$$\int_0^1 z(s) \approx \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}(z_0 + z_n) + \sum_{k=1}^{n-1} z_k\right], \quad z_k = z(\tau_k). \tag{4.27}$$

Искать теперь приближенное решение будем в виде сплайна первой степени по узлам (4.2):

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t). \tag{4.28}$$

Подставив сплайн (4.28) в уравнение (4.1), а затем заменив интеграл в уравнении (4.1) приближенно на квадратурную сумму согласно формулы (4.27), получим приближенное равенство:

$$x_n(t) + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}(x_n(\tau_0)h(t,\tau_0) + x_n(\tau_n)h(t,\tau_n)) + \sum_{k=1}^{n-1} x_n(\tau_k)h(t,\tau_k)\right] +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(t) x_n(t_\ell) \approx y(t). \tag{4.29}$$

Потребуем, чтобы левая и правая части приближенного равенства (4.29) совпадали в узлах (4.2).

Тогда относительно приближенных значений $c_j = x_n(\tau_j)$ в узлах τ_j получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_j + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}(c_0 h(t,\tau_0) + c_n h(t,\tau_n)) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k h(t,\tau_k)\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(\tau_j)\varphi_k(t_\ell) \approx y(\tau_j), \quad j = \overline{0,n}. \tag{4.30}$$

Имеют место для вычислительной схемы (4.1), (4.28), (4.30) следующие результаты.

Теорема 4.5. *При выполнении условий:*

1) $y \in C[0,1], h \in C([0,1]^2)$;

2) уравнение (4.1) имеет в пространстве непрерывных функций единственное решение.

Тогда система линейных алгебраических уравнений (4.30) также имеет единственное решение c_k^*, *хотя бы при* $\forall$ *натуральных* n, *начиная с некоторого. Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (4.28) при* $c_j = c_j^*, j = \overline{0,n}$, *сходятся равномерно к точному решению* $x^*(t)$ *уравнения (4.1) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O\{\omega(y;1/n) + \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n) + \omega_t(h;1/n) + \frac{3}{2}\omega_s(h;1/n)\},$$

где $E_n^1(z)-$ *наилучшее равномерное приближение функции* $z(t) \in C[0,1]$ *сплайнами (4.28).*

Следствие1. Пусть $y \in H_\gamma, h \in H_\gamma$(по переменной t), $a_\ell \in H_\gamma$, $\ell = \overline{1,m}$, $0 < \gamma \le 1$. Тогда верна порядковая оценка для погрешности приближенных решений:

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O(n^{-\gamma}), \quad 0 < \gamma \le 1.$$

Следствие2. Если $\exists\ y' \in H_\gamma, h_t' \in H_\gamma$(по переменной t), $a_\ell \in H_\gamma$, $\ell = \overline{1,m}$, $0 < \gamma \le 1$, то

$$\|x^* - x_n^*\|_C = O(n^{-\gamma-1}), \quad 0 < \gamma \le 1.$$

Доказательство. В пространстве $X = C[0,1]$ уравнение (4.1) запишем в виде операторного уравнения (4.9).

Теперь запишем эквивалентное системе (4.30) операторное уравнение. Для этого в пространстве X введем подпространство X_n функций вида (4.28), и пусть $S_n^1 : X \to X_n$ есть оператор сплайн–интерполирования первой степени по узлам $\{\tau_k\}$. Тогда система алгебраических уравнений (4.30) будет эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + S_n^1 H S_n^{1s}(hx) + S_n^1 A x_n = S_n^1 y, \quad (x_n \in X_n). \tag{4.31}$$

Поэтому разрешимость системы (4.30) может быть доказана через разрешимость уравнения (4.31). Для этого согласно лемме 2.1 достаточно показать близость правых частей уравнений (4.1) и (4.41) и соответствующих операторов K и K_n на подпространстве X_n.

Близость правых частей очевидна, поскольку согласно лемме 2.3

$$\delta_n \equiv \|y - S_n^1 y\|_X \leq \omega(y; 1/n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Покажем теперь близость операторов K и K_n на подпространстве X_n. Для этого возьмем $\forall$ элемент $x_n \in X_n$ и рассмотрим разность $Kx_n - K_n x_n$. Имеем

$$\|Kx_n - K_n x_n\| \leq \|Hhx_n - S_n^1 Hhx_n)\| + \|S_n^1[Hhx_n - HS_n^{1s}(hx_n)]\| +$$

$$+\|Ax_n - S_n^1 A x_n\| \leq \omega(Hhx_n; 1/n) + \|H(h - S_n^{0s}h)x_n\|_C +$$
$$+\|H(S_n^{0s}h)x_n - HS_n^{1s}(hx_n)\|_C + \omega(Ax; 1/n) \equiv$$
$$\equiv \omega(Hhx_n; 1/n) + I_1 + I_2 + \omega(Ax_n; 1/n). \tag{4.32}$$

Слагаемое I_1 в (4.32) оценивается с помощью леммы 2.4

$$I_1 \equiv \| \int_0^1 [h(t,s) - S_n^0 h(t,s)] x_n(s) ds\|_C \leq$$

$$\leq \|h - S_n^{0s}\|_{CxL} \|x_n\|_C \leq \omega_s(h; 1/n)\|x_n\|_X. \tag{4.33}$$

Оценим теперь слагаемое I_2. Для этого заметим, что

$$\int_0^1 \varphi_0(s) ds = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\tau_1 - s}{\tau_1 - \tau_0} ds = \frac{\tau_1 - \tau_0}{2},$$

$$\int_0^1 \varphi_n(s) ds = \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \frac{s - \tau_{n-1}}{\tau_n - \tau_{n-1}} ds = \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{2},$$

$$\int_0^1 \varphi_k(s)ds = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{s-\tau_{k-1}}{\tau_k-\tau_{k-1}}ds + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\tau_{k+1}-s}{\tau_{k+1}-\tau_k}ds =$$
$$= \frac{\tau_k-\tau_{k-1}}{2} + \frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{2} = \frac{\tau_{k+1}-\tau_{k-1}}{2}, k=\overline{1,n-1}.$$

Поэтому

$$\int_0^1 S_n^{1s}(h(t,s)x_n(s))ds = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} h(t,\tau_k)x_n(\tau_k)\varphi_k(s)ds =$$

$$= \Bigg[\frac{\tau_1-\tau_0}{2}h(t,\tau_0)x_n(\tau_0) + \frac{\tau_n-\tau_{n-1}}{2}h(t,\tau_n)x_n(\tau_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tau_{k+1}-\tau_{k-1}}{2}h(t,\tau_k)x_n(\tau_k)\Bigg] =$$

$$= \Bigg[\frac{\tau_1-\tau_0}{2}h(t,\tau_0)x_n(\tau_0) + \frac{\tau_n-\tau_{n-1}}{2}h(t,\tau_n)x_n(\tau_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\tau_{k-1}-\tau_k}{2} + \frac{\tau_k-\tau_{k-1}}{2}\right)h(t,\tau_k)x_n(\tau_k)\Bigg] =$$

$$= \Bigg[\frac{\tau_1-\tau_0}{2}h(t,\tau_0)x_n(\tau_0) + \frac{\tau_n-\tau_{n-1}}{2}h(t,\tau_n)x_n(\tau_n) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} \frac{\tau_k-\tau_{k-1}}{2}h(t,\tau_{k-1})x_n(\tau_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tau_k-\tau_{k-1}}{2}h(t,\tau_k)x_n(\tau_k)\Bigg] =$$

$$= \Bigg[\frac{\tau_1-\tau_0}{2}(h(t,\tau_0)x_n(\tau_0) + h(t,\tau_1)x_n(\tau_1)) +$$
$$+ \frac{\tau_n-\tau_{n-1}}{2}(h(t,\tau_{n-1})x_n(\tau_{n-1}) + h(t,\tau_n)x_n(\tau_n)) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\tau_k-\tau_{k-1}}{2}(h(t,\tau_{k-1})x_n(\tau_{k-1}) + h(t,\tau_k)x_n(\tau_k))\Bigg] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k-\tau_{k-1}}{2}(h(t,\tau_{k-1})x_n(\tau_{k-1}) + h(t,\tau_k)x_n(\tau_k)). \tag{4.34}$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 S_n^{0s}(h(t,s))x_n(s)ds = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} h(t,\tau_k)[x_n(\tau_{k-1})\varphi_{k-1}(s)+$$

$$+x_n(\tau_k)\varphi_k(s)]ds = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{2} h(t,\tau_k)\cdot[x_n(\tau_{k-1}) + x_n(\tau_k)]. \qquad (4.35)$$

Учитывая (4.34) и (4.35) для I_2 последовательно находим

$$I_2 \equiv \|H(S_n^{0s}h)x_n - HS_n^{1s}(hx_n)\|_C =$$

$$= \|\sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{2}(h(t,\tau_k) - h(t,\tau_{k-1}))x_n(\tau_{k-1})\|_C \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\omega_s(h;1/n)\|x_n\|_C \cdot \sum_{k=1}^{n}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \frac{1}{2}\omega_s(h;1/n)\cdot\|x_n\|_X.$$

Из (4.32),(4.33) и последнего неравенства следует, что

$$\|Kx_n - K_nx_n\| \leq \omega(Hhx_n;1/n)+$$

$$+\frac{3}{2}\omega_s(h;1/n)\|x_n\|_X + \omega(Ax_n;1/n), \quad \forall x_n \in X_n. \qquad (4.36)$$

Но,как нетрудно видеть

$$\omega(Hhx_n;1/n) \leq \omega_t(h;1/n)\cdot\|x_n\|_C, \qquad (4.37)$$

$$\omega(Ax_n;1/n) \leq \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n)\cdot\|x_n\|_C. \qquad (4.38)$$

Поэтому из (4.36) - (4.38) следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} \leq \sum_{\ell=1}^{m} \omega(a_\ell;1/n)+$$

$$+\omega_t(h;1/n) + \frac{3}{2}\omega_s(h;1/n) \to 0, n \to \infty.$$

Тогда утверждение теоремы 4.5 непосредственно вытекает из леммы 2.1.

Заключение

В работе для нахождения решения уравнения вида

$$x(t) + \int_0^1 h(t,s)x(s)ds + \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell(t)x(t_\ell) = y(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

построены вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур, основанные на сплайн-функциях нулевой и первой степени по равномерному разбиению промежутка. Доказана однозначная разрешимость соответствующих систем линейных алгебраических уравнений и сходимость сплайн-приближений к точному решению по норме пространств M ограниченных измеримых и C непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Оценки погрешности получены в универсальных терминах теории приближений.

Список литературы

[1] Агачев, Ю.Р. *Прямые методы решения интегральных уравнений второго рода* / Ю.Р.Агачев. – Казань:КГУ, 2006.– 68с.

[2] Агачев, Ю.Р. *Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений* / Ю.Р.Агачев. – Дисс. ... канд. физ. – мат. наук. – Казань, 1987. – 144 с.

[3] Агачев, Ю.Р. *Общая теория приближенных методов анализа (учеб- ное пособие)* / Ю.Р. Агачев, Р.Т. Валеева. – Казань, Изд–во Казанск. ун–та, 1998. – 48 с.

[4] Авхадиев, Ф. Г. *Численные методы анализа* / Ф.Г.Авхадиев. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. – 126 с.

[5] Бахвалов, Н. С. *Численные методы*/ Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 1987.363с.

[6] Васильева, А.Б. *Интегральные уравнения*/А.Б.Васильева, Н.А. Тихонов. – 2-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[7] Васильева, А.В. *Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах*/А.В. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003

[8] Габдулхаев, Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* / Б.Г. Габдулхаев. – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

[9] Габдулхаев, Б.Г. *Теория приближенных методов решения операторных уравнений: Учебное пособие*/ Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 2006. – 114 с.

[10] Завьялов, Ю.С. *Методы сплайн–функций* / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко.— М.: Наука, 1980. – 352с.

[11] Канторович, Л. В. *Приближенные методы высшего анализа* / Л.В. Канторович, В.И. Крылов.–М.: Физматлит, 1962.–262 с.

[12] Манжиров, А.В.*Методы решения интегральных уравнений*/А.В. Манжиров, Полянин А.Д. – Справочник. — М.: «Факториал».

[13] Назаров, Н. Н. *Об одном новом классе линейных интегральных уравнений* /Н. Н. Назаров. – Тр.ин-та математики и механики АН УзССР. 1948. Вып. 4. С. 77–106.

[14] Смирнов, В.И. *Курс высшей математики* / В.И. Смирнов. – Т.IV.- Часть I. – 1974 г. – 336 с.

[15] Nakhushev, A.M. *Nonlocal problem and the Goursat problem for loaded hyper- bolic equation and their application in prediction of ground moisture* / A.M. Nakhushev. – Soviet Math. Dokl. – 1978. – V. 19, № 5. – P. 1243-1247.

[16] Lichtenstein, L., *Bemerkungen uber belastete Integralgleichungen*/ L.Lichtenstein. – Studia math.- 1931, t. III, p. 212-25.

[17] Gunther, N., *Sur le probleme des Belastete Integralgleichungen* / N. Gunther. – Studia math.- 1933, t. IV, p. 8-14.