

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.329-356

УТОЧНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ ТРЕХСЛОЙНОГО ТЕСТ-ОБРАЗЦА С КОМПОЗИТНЫМИ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В.Н. Паймушин, М.В. Макаров

*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Построена уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных пластин и оболочек с трансверсально-мягким наполнителем и внешними композитными слоями, имеющими малую жесткость на поперечные сдвиги и поперечное обжатие. Она основана на использовании для несущих слоев уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия, а для трансверсально-мягкого наполнителя – упрощенных трехмерных уравнений теории упругости, путем интегрирования которых по поперечной координате для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) наполнителя введены в рассмотрение две двумерные неизвестные функции, представляющие собой поперечные касательные напряжения, постоянные по толщине. Для описания статического процесса деформирования с большими показателями изменчивости параметров НДС наполнителя построены два варианта двумерных геометрически нелинейных уравнений. В первом из них геометрическая нелинейность учитывается в стандартном приближении путем сохранения слагаемых, содержащих лишь мембранные усилия в несущих слоях. Во втором варианте уравнений сохранены дополнительные геометрически нелинейные слагаемые более высокого порядка малости. На основе построенных уравнений сформулирована геометрически и физически нелинейная задача о четырехточечном изгибе трехслойного тест-образца с учетом физической нелинейной зависимости между поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями в несущих слоях. Разработан численный метод ее решения на основе метода конечных сумм (метода интегрирующих матриц) и изучено закритическое поведение тест-образца. Показано, что при испытаниях тест-образцов их разрушение может быть обусловлено реализацией поперечно-сдвиговых форм потери устойчивости внешнего слоя в окрестности нагружающего ролика.

Ключевые слова: трехслойные пластины и оболочки, композитные внешние слои, трансверсально-мягкий наполнитель, физическая и геометрическая нелинейности, трехслойный тест-образец, четырехточечный изгиб, метод интегрирующих матриц, сдвиговая форма потери устойчивости, продолжение решения по сдвиговой деформации

Введение

В теории устойчивости стержней, пластин и оболочек из композиционных материалов существует направление исследований, которое изучает так называемые сдвиговые формы потери устойчивости (ФПУ) [1]. Такие ФПУ могут реализоваться

при осевом сжатии весьма коротких стержней, жесткостные характеристики материала которых удовлетворяют условию $G \ll E$. Подобные материалы представляют собой, в частности, конструкционные однонаправленные волокнистые угле- и стеклопластики на основе полимерных матриц. Согласно многочисленным исследованиям [1, 2] напряжения сжатия, достигаемые в стержнях, получаются равными осредненному модулю сдвига G композита. В этом случае предельные напряжения, соответствующие реализации сдвиговой ФПУ могут быть намного меньше предельных напряжений, соответствующих пределу прочности композита. В связи с описанными особенностями работы однонаправленных волокнистых композитов на сжатие и поперечный сдвиг возникает необходимость выявления сдвиговых ФПУ и расчета в конструкциях критических напряжений при их реализации.

Трехслойные конструкции или сэндвич-конструкции представляют собой стержни, пластины или оболочки, внешние слои которых изготавливаются, как правило, в настоящее время из легких волокнистых композиционных материалов, тогда как в качестве заполнителя используются сотовые конструкции или конструкции из сплошных легких материалов. Два жестких несущих слоя в сотовых конструкциях воспринимают тангенциальные напряжения, а относительно маложесткий заполнитель воспринимает напряжения поперечного обжатия и поперечные касательные напряжения. В научной литературе к настоящему времени проведена классификация форм и видов разрушения трехслойных конструкций [3–6], а также изучены различные процессы деформирования и разрушения составных элементов [7–13]. В указанных работах описывается разрушение заполнителя, отслоение несущих слоев от заполнителя, а также потеря устойчивости несущих слоев.

Цикл теоретических и экспериментальных исследований, представленных в [14, 15], показал, что при изгибе, как в относительно длинных, так и коротких тест-образцах, изготовленных из однонаправленных волокнистых композитов, реализуется сдвиговая ФПУ, по причине которой и происходит их разрушение. Теоретическое выявление сдвиговой ФПУ композитных тест-образцов при изгибе возможно лишь при использовании уравнений, основанных на кинематической модели С.П. Тимошенко, учитывающей поперечные сдвиговые деформации.

Учитывая специфику работы трехслойного стержня при трехточечном или чистом изгибе, можно предположить, что один из несущих слоев будет находиться в условиях чистого сжатия с почти постоянным распределением нормальных напряжений по толщине, по причине которых возможна реализация в слое чисто сдвиговой ФПУ. Для ее выявления и описания разрешающие уравнения должны быть основаны на кинематической модели С.П. Тимошенко.

Настоящая работа является продолжением цикла исследований [14, 15] и посвящена построению теории деформирования трехслойных стержней с учетом поперечных сдвиговых деформаций в несущих слоях с целью выявления возможности реализации сдвиговой формы потери устойчивости в несущих слоях из однонаправленного композита.

1. Уточненная модель деформирования трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем

Рассмотрим трехслойную оболочку с жесткими композитными внешними слоями и маложестким средним слоем, называемым заполнителем. Обозначим номера нижнего и верхнего несущих слоев через $k = 1, 2$, индекс, указывающий номер, заключим в круглые скобки. За базу параметризации примем срединную поверхность заполнителя σ , считая ее заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2) = \mathbf{r}(x^i)$ и отнеся

пространство этого слоя к полуортогональной системе координат x^i, z , нормально связанной с поверхностью σ ; через $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$, \mathbf{m} обозначим основные базисные векторы на σ и вектор единичной нормали соответственно. В дальнейшем будем считать, что изменением метрики в направлении оси z можно пренебречь, отождествляя тем самым базисные векторы $\mathbf{r}_i^{(k)} = \partial \mathbf{r}^{(k)} / \partial x^i$ на срединных поверхностях $\sigma^{(k)}$ каждого несущего слоя с базисными векторами \mathbf{r}_i на σ . Кроме того, введем обозначения: $z^{(k)}$, z – координаты по нормали \mathbf{m} к $\sigma^{(k)}$ и σ ; $t^{(k)}$, h – соответствующие толщины слоев, причем $-t^{(k)}/2 \leq z^{(k)} \leq t^{(k)}/2$ и $-h/2 \leq z \leq h/2$; $H = t^{(1)} + t^{(2)} + h$ – общая толщина оболочки; $a_{ij} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j$, $b_{ij} = -\mathbf{r}_i \mathbf{m}_j$ – ковариантные компоненты первого и второго метрических тензоров на σ , которые в силу введенного выше предположения являются неизменными при переходе от слоя к слою.

Предполагаем, что оболочка является тонкой и не полой, ее граничный срез представляет собой линейчатую поверхность, образованную движением вектора \mathbf{m} вдоль некоторой гладкой кривой $C \in \sigma$, а через \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ обозначим единичные векторы нормали и касательной к C , составляющие с вектором \mathbf{m} правосторонний триэдр в каждой точке C .

Известные в литературе варианты теории многослойных пластин и оболочек главным образом отличаются друг от друга принятыми в них моделями заполнителя. К настоящему времени детальный их анализ был проведен многими авторами, в частности Х.М. Муштари [16, 17] и В.В. Болотиным [18]. обстоятельные обзоры моделей деформирования трехслойных и многослойных элементов конструкций содержатся, в частности, в работе [19]. В соответствии с результатами работы [18] заполнитель называется трансверсально-мягким, когда в нем плотность потенциальной энергии деформации U вычисляется по формуле

$$\Pi^{(3)} = \frac{1}{2} \iint_{\sigma} \int_{-h/2}^{h/2} (2\sigma^{i3} \varepsilon_{i3}^z + \sigma^{33} \varepsilon_{33}^z) dz d\sigma,$$

что равносильно принятию допущения $\sigma^{ij} \approx 0$. В силу этих допущений для заполнителей уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma^{i3}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial z} + \nabla_i \sigma^{i3} = 0,$$

из которых следуют равенства $\sigma^{i3} = q^i(x^1, x^2)$ и уравнение

$$\frac{\partial \sigma^{33}}{\partial z} + \nabla_i q^i = 0. \quad (1)$$

Если для описания механики деформирования несущих слоев принимается уточненная кинематическая модель С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для векторов перемещений принимается представление

$$\mathbf{U}^{z^{(k)}} = u_i^{(k)} \mathbf{r}^i + w^{(k)} \mathbf{m} + z^{(k)} \left(\gamma_i^{(k)} \mathbf{r}^i + \varphi^{(k)} \mathbf{m} \right), \quad (2)$$

то при слабом и среднем изгибах оболочки компоненты тензоров деформаций в несущих слоях будут определяться по формулам [20, 21] (геометрически нелинейный вариант теории нулевого приближения (первый вариант теории))

$$\varepsilon_{ij}^{z^{(k)}} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z^{(k)} \chi_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{33}^{z^{(k)}} = \varepsilon_{33}^{(k)} = \varphi^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{i3}^{z^{(k)}} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)} + z^{(k)} \nabla_i \varphi^{(k)}. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\chi_{ij}^{(k)}$, $2\varepsilon_{i3}^{(k)}$ – ковариантные компоненты тензоров тангенциальных и изгибных деформаций, а также векторов поперечных сдвигов на уровне $z^{(k)} = 0$, для которых имеют место соотношения, записанные в приближении

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}, & e_{ij}^{(k)} &= \nabla_i u_j^{(k)} - b_{ij}w^{(k)}, \\ \omega_i^{(k)} &= \nabla_i w^{(k)} + u_j^{(k)}b_i^j, & 2\chi_{ij}^{(k)} &= \nabla_i \gamma_j^{(k)} + \nabla_j \gamma_i^{(k)} - 2b_{ij}\varphi^{(k)}, \\ & & 2\varepsilon_{i3}^{(k)} &= \gamma_i^{(k)} + \omega_i^{(k)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Исходя из анализа полученных ранее результатов [15], следует отметить, что при формировании во внешних слоях сложного напряженно-деформированного состояния, характеризующегося значительными изгибными напряжениями и напряжением поперечного обжатия (например, при действии локализованных нагрузок), в рамках принятого представления (2) некоторые соотношения из (3) и (4) целесообразно записать в более высоком геометрически нелинейном приближении (геометрически нелинейный вариант теории первого приближения (второй вариант теории))

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^{z^{(k)}} &= \varepsilon_{33}^{(k)} = \varphi^{(k)} + \frac{\gamma_{(k)}^i \gamma_i^{(k)}}{2}, \\ 2\chi_{ij}^{(k)} &= \nabla_i \gamma_j^{(k)} + \nabla_j \gamma_i^{(k)} - 2b_{ij}\varphi^{(k)} + \frac{\omega_i^{(k)}\varphi_j^{(k)}}{2} + \frac{\omega_j^{(k)}\varphi_i^{(k)}}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varphi_i^{(k)} = \varphi_{,i}^{(k)} = \partial\varphi^{(k)}/\partial x^i$. Заметим, что сохранение в соотношениях (5) слагаемых $\frac{\gamma_{(k)}^i \gamma_i^{(k)}}{2}$ и $\frac{\omega_i^{(k)}\varphi_j^{(k)}}{2}$ в соответствии с полученными ранее результатами [15] в условиях формирования в несущих слоях изгибных составляющих в напряжениях $\sigma_{(k)}^{ij}$ и напряжений поперечного обжатия $\sigma_{(k)}^{33}$ позволяет выявить такие изгибно-сдвиговые ФПУ, которые являются преимущественно поперечно-сдвиговыми.

При принятой степени точности $\sigma^{ij} \approx 0$ и $\delta_i^j - zb_i^j \approx \delta_i^j$ для напряжения σ^{33} в линейном приближении можно составить соотношение упругости следующего вида

$$\sigma^{33} = E_3 \varepsilon_{33}^z = E_3 \frac{\partial U_3}{\partial z}. \quad (6)$$

После подстановки (6) в уравнения (1) и интегрирования по z получим

$$U_3 = W_1 + zW_2 - \frac{z^2}{2E_3} \nabla_i q^i, \quad (7)$$

где W_1 , W_2 – функции интегрирования, зависящие от координат x^1 , x^2 . Определяя их на основании кинематических условий сопряжения с несущими слоями

$$U_3 \left(z = -\frac{h}{2} \right) = w^{(1)} + \frac{t^{(1)}}{2} \varphi^{(1)}, \quad U_3 \left(z = h/2 \right) = w^{(2)} - \frac{t^{(2)}}{2} \varphi^{(2)},$$

выражение (7) для прогиба в заполнителе приводим к виду

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} + z \frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{h} + \frac{1}{2E_3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla_i q^i + \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{2h} \right) t_{(1)} \varphi^{(1)} - \left(\frac{1}{4} + \frac{z}{2h} \right) t_{(2)} \varphi^{(2)}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Для установления в заполнителях закона изменения тангенциальных компонент перемещений по z обратимся к соотношениям упругости для σ^{i3} , которые в линейном приближении в рамках принятой степени точности можно представить в следующей приближенной форме (A^{is} – двухвалентный тензор сдвиговых упругих констант)

$$\sigma^{i3} = q^i = 2A^{is}\varepsilon_{s3}^z = A^{is} \left[\frac{\partial U_s}{\partial z} + \nabla_s U_3 \right], \quad (9)$$

справедливой как при слабом, так и среднем изгибах. После подстановки соотношений (8) в соотношения (9) получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial z} = & d_{is}q^s - \frac{w_i^{(1)} + w_i^{(2)}}{2} - \frac{z}{h} \left(w_i^{(2)} - w_i^{(1)} \right) + \\ & + \frac{4z^2 - h^2}{8E_3} \nabla_i \nabla_s q^s - \left(\frac{1}{4} - \frac{z}{2h} \right) t_{(1)}\varphi_i^{(1)} + \left(\frac{1}{4} + \frac{z}{2h} \right) t_{(2)}\varphi_i^{(2)}, \quad (10) \end{aligned}$$

в котором введены обозначения для частных производных $w_i^{(k)} = \partial w^{(k)} / \partial x^i$, $\varphi_i^{(k)} = \partial \varphi^{(k)} / \partial x^i$, а через d_{is} обозначен двухвалентный тензор податливости заполнителя на поперечный сдвиг. Интегрируя (10) по z , получим

$$\begin{aligned} U_i = & u_i + z d_{is}q^s - z \frac{w_i^{(1)} + w_i^{(2)}}{2} - \frac{z^2}{2h} \left(w_i^{(2)} - w_i^{(1)} \right) + \\ & + \left(\frac{4}{3}z^3 - h^2z \right) \frac{\nabla_i \nabla_s q^s}{8E_3} - \left(\frac{z}{4} - \frac{z^2}{4h} \right) t_{(1)}\varphi_i^{(1)} + \left(\frac{z}{4} + \frac{z^2}{4h} \right) t_{(2)}\varphi_i^{(2)}, \quad (11) \end{aligned}$$

где u_i – неизвестные двумерные функции. Для их определения полученные соотношения (11) необходимо подчинить условиям сопряжения по тангенциальным перемещениям

$$u_i^{(1)} + \frac{t_{(1)}}{2}\gamma_i^{(1)} = U_i \left(-\frac{h}{2}, x^1, x^2, t \right), \quad u_i^{(2)} - \frac{t_{(2)}}{2}\gamma_i^{(2)} = U_i \left(\frac{h}{2}, x^1, x^2, t \right). \quad (12)$$

Из них при подстановке (11) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \mu_i = & u_i^{(1)} - u_i^{(2)} - \frac{h}{2} \left(w_i^{(1)} + w_i^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \left(t_{(1)}\gamma_i^{(1)} + t_{(2)}\gamma_i^{(2)} \right) + \\ & + h d_{is}q^s - \frac{h^3}{12E_3} \nabla_i \nabla_j q^j - \frac{h}{4} \left(t_{(1)}\varphi_i^{(1)} - t_{(2)}\varphi_i^{(2)} \right) = 0, \end{aligned}$$

которые будут использоваться ниже при выводе уравнений равновесия и кинематических условий сопряжения внешних слоев с заполнителем по тангенциальным перемещениям.

2. Уравнения равновесия и условия кинематического сопряжения внешних слоев с заполнителем по тангенциальным перемещениям

В рамках принятой модели заполнителя будем считать нагруженными внешними силами лишь несущие слои трехслойной оболочки, введя в рассмотрение векторы заданных усилий и моментов

$$\Phi^{(k)} = \Phi_n^{(k)} \mathbf{n} + \Phi_{n\tau}^{(k)} \boldsymbol{\tau} + \Phi_m^{(k)} \mathbf{m}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = L_n^{(k)} \mathbf{n} + L_{n\tau}^{(k)} \boldsymbol{\tau} + L_m^{(k)} \mathbf{m}, \quad k = 1, 2,$$

приложенных к граничным линиям $C^{(k)}$ срединных поверхностей внешних слоев $\sigma^{(k)}$, а также векторы внешних поверхностных усилий и моментов

$$\mathbf{X}_{(k)} = X_{(k)}^i \mathbf{r}_i + X_{(k)}^3 \mathbf{m}, \quad \mathbf{M}_{(k)} = M_{(k)}^i \mathbf{r}_i + M_{(k)}^3 \mathbf{m},$$

приложенных в точках поверхностей $\sigma^{(k)}$. Вариацию работы этих сил на соответствующих перемещениях (2) будем определять соотношением

$$\begin{aligned} \delta A = \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_C \left[\Phi_n^{(k)} \delta u_n^{(k)} + \Phi_{n\tau}^{(k)} \delta u_\tau^{(k)} + \Phi_m^{(k)} \delta w^{(k)} + L_n^{(k)} \delta \gamma_n^{(k)} + \right. \right. \\ \left. \left. + L_{n\tau}^{(k)} \delta \gamma_\tau^{(k)} + L_m^{(k)} \delta \varphi^{(k)} \right] ds + \iint_\sigma \left[X_{(k)}^i \delta u_i^{(k)} + X_{(k)}^3 \delta w^{(k)} + M_{(k)}^i \delta \gamma_i^{(k)} + \right. \right. \\ \left. \left. + M_{(k)}^3 \delta \varphi^{(k)} \right] d\sigma \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

а вариация потенциальной энергии деформации оболочки будет вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \iint_\sigma \int_{-h/2}^{h/2} (2\sigma^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^z + \sigma^{33} \delta \varepsilon_{33}^z) d\sigma dz + \\ + \sum_{k=1}^2 \iint_\sigma \int_{-t^{(k)}/2}^{t^{(k)}/2} \left(\sigma_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{z^{(k)}} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{z^{(k)}} + \sigma_{(k)}^{33} \delta \varepsilon_{33}^{z^{(k)}} \right) d\sigma dz^{(k)} = \\ = \sum_{k=1}^2 \iint_\sigma \left(T_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} + M_{(k)}^{ij} \delta \chi_{ij}^{(k)} + 2T_{(k)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{(k)} + T_{(k)}^{33} \delta \varphi^{(k)} + M_{(k)}^{i3} \delta \varphi_i^{(k)} \right) d\sigma + \\ + \iint_\sigma \left[c_{is} q^s \delta q^i + \sigma_0^{33} \left(\delta w^{(2)} - \delta w^{(1)} - \frac{t^{(1)}}{2} \delta \varphi^{(1)} - \frac{t^{(2)}}{2} \delta \varphi^{(2)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{12E_3} \nabla_s q^s \nabla_i \delta q^i \right] d\sigma, \quad (14) \end{aligned}$$

полученной при использовании преобразований

$$2\sigma^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^z = d_{is} q^s \delta q^i, \quad \sigma^{33} \delta \varepsilon_{33}^z = E_3 \varepsilon_{33}^z \delta \varepsilon_{33}^z,$$

составленных соотношений (6), (8) и введении обозначений

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(k)} = \gamma_i^{(k)} n^i, \quad \gamma_\tau^{(k)} = \gamma_i^{(k)} \tau^i, \quad u_n^{(k)} = u_i^{(k)} n^i, \quad u_\tau^{(k)} = u_i^{(k)} \tau^i, \\ T_{(k)}^{\alpha\beta} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dz^{(k)}, \quad M_{(k)}^{i\alpha} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i\alpha} z^{(k)} dz^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \\ c_{is} = h d_{is}, \quad \sigma_0^{33} = \frac{E_3}{h} \left[w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{1}{2} \left(t_{(1)} \varphi^{(1)} + t_{(2)} \varphi^{(2)} \right) \right], \end{aligned}$$

где $n^i = \mathbf{n}r^i$, $\tau^i = \boldsymbol{\tau}r^i$ – контравариантные компоненты векторов \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ относительно базисных векторов \mathbf{r}_i ; ds – элемент длины контурной линии C .

Если кинематические соотношения (2), (11) не подчинены условиям сопряжения несущих слоев с заполнителями (12), то для вывода необходимого комплекса основных уравнений, описывающих статическое равновесие оболочки, в соответствии с [22] должно быть составлено обобщенное вариационное уравнение вида

$$\delta I = \delta I_q + \delta A - \delta \Pi = 0, \quad (15)$$

где

$$\delta I_q = \delta \iint_{\sigma} q^i \left[u_i^{(1)} - u_i^{(2)} + \frac{t_{(1)}\gamma_i^{(1)}}{2} + \frac{t_{(2)}\gamma_i^{(2)}}{2} + U_i(z = h/2) - U_i(z = -h/2) \right] d\sigma. \quad (16)$$

Входящая в (16) разность для U_i устанавливается путем интегрирования (10) по z от $-h/2$ до $h/2$

$$U_i(z = h/2) - U_i(z = -h/2) = c_{is}q^s - \frac{h}{2} \left(w_i^{(1)} + w_i^{(2)} \right) - \frac{h^3}{12E_3} \nabla_i \nabla_s q^s - \frac{h}{4} \left(t_{(1)}\varphi_i^{(1)} - t_{(2)}\varphi_i^{(2)} \right). \quad (17)$$

После подстановки выражений (13), (14), (16) в уравнение (15) и проведения традиционных преобразований с учетом (17) получим

$$\begin{aligned} \delta I = \int_C \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\left(\Phi_n^{(k)} - T_n^{(k)} \right) \delta u_n^{(k)} + \left(\Phi_{n\tau}^{(k)} - T_{n\tau}^{(k)} \right) \delta u_\tau^{(k)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\Phi_m^{(k)} - \tilde{S}_{(k)}^i n_i \right) \delta w^{(k)} + \left(L_n^{(k)} - M_n^{(k)} \right) \delta \gamma_n^{(k)} + \left(L_{n\tau}^{(k)} - M_{n\tau}^{(k)} \right) \delta \gamma_\tau^{(k)} + \right. \\ \left. \left. + \left(L_m^{(k)} - \tilde{M}_{(k)}^{i3} n_i \right) \delta \varphi^{(k)} \right] + \frac{h^3}{12E_3} q^i n_i \nabla_s \delta q^s \right\} ds - \\ - \iint_{\sigma} \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\left(\nabla_i T_{(k)}^{ij} - S_{(k)}^i b_i^j + \tilde{X}_{(k)}^j \right) \delta u_j^{(k)} + \left(\nabla_i \tilde{S}_{(k)}^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} + \right. \right. \\ \left. \left. + \tilde{X}_{(k)}^3 \right) \delta w^{(k)} + \left(\nabla_i M_{(k)}^{ij} - T_{(k)}^{j3} + \tilde{M}_{(k)}^j \right) \delta \gamma_j^{(k)} + \right. \\ \left. \left. + \left(\nabla_i \tilde{M}_{(k)}^{i3} + M_{(k)}^{ij} b_{ij} + \tilde{M}_{(k)}^3 - T_{(k)}^{33} \right) \delta \varphi^{(k)} \right] + \mu_i \delta q^i \right\} d\sigma = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения для усилий и моментов ($\delta_{(1)} = -\delta_{(2)} = 1$)

$$\begin{aligned} T_n^{(k)} = T_{(k)}^{ij} n_i n_j, \quad T_{n\tau}^{(k)} = T_{(k)}^{ij} n_i \tau_j, \quad M_n^{(k)} = M_{(k)}^{ij} n_i n_j, \quad M_{n\tau}^{(k)} = M_{(k)}^{ij} n_i \tau_j, \\ \tilde{X}_{(k)}^i = X_{(k)}^i + \delta_{(k)} q^i, \quad \tilde{M}_{(k)}^i = M_{(k)}^i + \frac{t_{(k)}}{2} q^i, \\ \tilde{X}_{(k)}^3 = X_{(k)}^3 + \delta_{(k)} \sigma_0^{33}, \quad \tilde{M}_{(k)}^3 = M_{(k)}^3 + \frac{t_{(k)}}{2} \sigma_0^{33}, \\ \tilde{S}_{(k)}^i = S_{(k)}^i + \frac{h}{2} q^i, \quad S_{(k)}^i = T_{(k)}^{i3} + T_{(k)}^{ij} \omega_j^{(k)}, \quad \tilde{M}_{(k)}^{i3} = M_{(k)}^{i3} + \delta_{(k)} \frac{ht_{(k)}}{4} q^i. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу произвольности вариаций перемещений $\delta u_i^{(k)}$, $\delta w^{(k)}$, углов поворотов $\delta \gamma_i^{(k)}$, функций обжатия $\delta \varphi^{(k)}$ и поперечных касательных напряжений δq^i из вариационного уравнения (18) следуют двенадцать дифференциальных уравнений равновесия несущих слоев

$$\begin{aligned} f_{(k)}^i &= \nabla_j T_{(k)}^{ij} - S_{(k)}^j b_j^i + \tilde{X}_{(k)}^i = 0, & f_{(k)}^3 &= \nabla_i \tilde{S}_{(k)}^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} + \tilde{X}_{(k)}^3 = 0, \\ f_{(k)}^{j+3} &= \nabla_i M_{(k)}^{ij} - T_{(k)}^{j3} + \tilde{M}_{(k)}^j = 0, \\ f_{(k)}^6 &= \nabla_i \tilde{M}_{(k)}^{i3} + M_{(k)}^{ij} b_{ij} + \tilde{M}_{(k)}^3 - T_{(k)}^{33} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

и два дифференциальных уравнения вида

$$\mu_i = 0,$$

представляющие собой условия кинематического сопряжения несущих слоев с заполнителем по тангенциальным перемещениям. Для полученных уравнений на контуре C формулируются граничные условия

$$\begin{aligned} T_n^{(k)} &= \binom{(k)}{n} \quad \text{при} \quad \delta u_n^{(k)} \neq 0, & T_{n\tau}^{(k)} &= \binom{(k)}{n\tau} \quad \text{при} \quad \delta u_\tau^{(k)} \neq 0, \\ \tilde{S}_{(k)}^i n_i &= \binom{(k)}{m} \quad \text{при} \quad \delta w^{(k)} \neq 0, & M_n^{(k)} &= L_n^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta \gamma_n^{(k)} \neq 0, \\ M_{n\tau}^{(k)} &= L_{n\tau}^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta \gamma_\tau^{(k)} \neq 0, & \tilde{M}_{(k)}^{i3} n_i &= L_m^{(k)} \quad \text{при} \quad \delta \varphi^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \\ q^i n_i &= 0 \quad \text{при} \quad \delta \nabla_s q^s \neq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При использовании соотношений (5) вариация потенциальной энергии деформаций k -го несущего слоя будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{(k)} &= \iint_\sigma \left[T_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} + M_{(k)}^{ij} \delta \chi_{ij}^{(k)} + 2T_{(k)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{(k)} + T_{(k)}^{33} \left(\delta \varphi^{(k)} + \gamma_{(k)}^j \delta \gamma_i^{(k)} \right) + \right. \\ &+ \left. M_{(k)}^{i3} \delta \varphi_i^{(k)} \right] d\sigma = \iint_\sigma \left[T_{(k)}^{ij} \left(\nabla_i \delta u_j^{(k)} - b_{ij} \delta w^{(k)} \right) + M_{(k)}^{ij} \nabla_i \delta \gamma_j^{(k)} + \right. \\ &+ \left(T_{(k)}^{i3} + T_{(k)}^{33} \gamma_{(k)}^i \right) \delta \gamma_i^{(k)} + \left(T_{(k)}^{i3} + T_{(k)}^{ij} \omega_j^{(k)} + M_{(k)}^{ij} \varphi_j^{(k)} \right) \delta \omega_i^{(k)} + \\ &+ \left. \left(M_{(k)}^{i3} + M_{(k)}^{ij} \omega_j^{(k)} \right) \delta \varphi_i^{(k)} + \left(T_{(k)}^{33} - M_{(k)}^{ij} b_{ij} \right) \delta \varphi^{(k)} \right] d\sigma, \end{aligned} \quad (23)$$

в котором, в отличие от (19),

$$S_{(k)}^i = T_{(k)}^{i3} + T_{(k)}^{ij} \omega_j^{(k)} + \underline{M_{(k)}^{ij} \varphi_j^{(k)}}. \quad (24)$$

При использовании выражения (23) в рассматриваемом случае вместо уравнений равновесия (20) приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} f_{(k)}^i &= \nabla_j T_{(k)}^{ij} - S_{(k)}^j b_j^i + \tilde{X}_{(k)}^i = 0, & f_{(k)}^3 &= \nabla_i \tilde{S}_{(k)}^i + T_{(k)}^{ij} b_{ij} + \tilde{X}_{(k)}^3 = 0, \\ f_{(k)}^{j+3} &= \nabla_i M_{(k)}^{ij} - \left(T_{(k)}^{j3} + \underline{T_{(k)}^{33} \gamma_{(k)}^j} \right) + \tilde{M}_{(k)}^j = 0, \\ f_{(k)}^6 &= \nabla_i \left(\tilde{M}_{(k)}^{i3} + \underline{M_{(k)}^{ij} \omega_j^{(k)}} \right) + M_{(k)}^{ij} b_{ij} + \tilde{M}_{(k)}^3 - T_{(k)}^{33} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

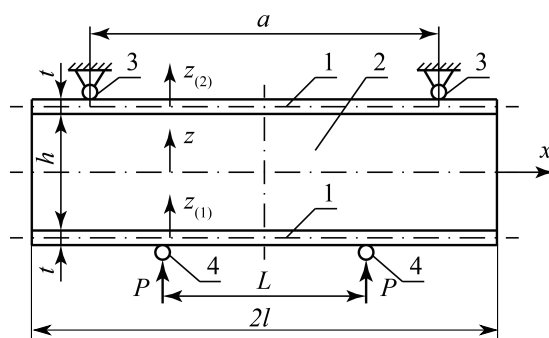


Рис. 1. Схема испытаний трехслойного тест-образца на четырехточечный изгиб: 1 – внешние слои, 2 – наполнитель, 3 – опорные ролики, 4 – нагружающие ролики

В них геометрически нелинейные слагаемые $T_{(k)}^{ij}\omega_j^{(k)}$ являются стандартными и их сохранение позволяет выявить как изгибно-сдвиговые, так и поперечно-сдвиговые ФПУ только при формировании во внешних слоях соответствующих мембранных усилий $T_{(k)}^{ij}$. Уточнение уравнений (20) заключается в сохранении в (24), (25) дополнительных (подчеркнутых) геометрически нелинейных слагаемых более высокого порядка, содержащих также (в дополнение к указанным выше) изгибающие моменты и усилия поперечного обжатия в несущих слоях. Тем самым появляется возможность выявления неклассических поперечно-сдвиговых ФПУ несущих слоев при локализованных внешних воздействиях на трехслойные элементы конструкций.

3. Постановка задачи о четырехточечном изгибе трехслойного тест-образца на основе первого варианта теории

Экспериментальное определение механических свойств КМ является крайне важной и неотъемлемой частью в технологическом процессе проектирования и изготовления конструкций из КМ. Наиболее сложными в реализации являются испытания волокнистых композитов на сжатие. Тест-образцы для таких испытаний, хотя и имеют достаточно малую длину рабочей части, при испытаниях на сжатие, проводимых в соответствии с существующими стандартами, как правило, сопровождаются продольно-поперечным изгибом. Такой изгиб тест-образцов, даже являясь весьма малым, значительно влияет на результаты испытаний, особенно при длительной выдержке образцов под нагрузкой.

Испытание специальных тест-образцов на четырехточечный изгиб по схеме, показанной на рис. 1, является одним из видов экспериментальных исследований трехслойных элементов конструкций с внешними жесткими слоями из волокнистых композитов и средним трансверсально-мягким слоем.

Указанные испытания проводятся, как правило, с целью определения значения предельного напряжения сжатия, формирующегося в верхнем несущем слое в пределах участка длиной L рабочей длины a тест-образца, при достижении которого происходит разрушение указанного слоя. Можно предположить, что одной из причин такого разрушения является потеря устойчивости сжатого несущего слоя по одной из возможных форм [21]. Как будет показано ниже, использование построенных выше уравнений позволяет выявить как изгибные и изгибно-сдвиговые, так и чисто сдвиговые ФПУ верхнего несущего слоя тест-образца, находящегося в условиях сжатия при его четырехточечном изгибе по схеме рис. 1.

При четырехточечном изгибе пластины по цилиндрической форме уравнения (20) представимы в виде (здесь и в дальнейшем $u^{(k)} = u_1^{(k)}$, $\gamma^{(k)} = \gamma_1^{(k)}$, $q = q^1$)

$$\begin{aligned} T_{(k),x}^{11} + \delta_{(k)}q &= 0, \quad \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11}w_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2}q \right)_{,x} + \delta_{(k)}\sigma_{33}^0 + X_{(k)}^3 = 0, \\ M_{(k),x}^{11} - T_{(k)}^{13} + \frac{t}{2}q &= 0, \quad \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)}\frac{ht}{4}q \right)_{,x} - T_{(k)}^{33} + \frac{t}{2}\sigma_{33}^0 - \delta_{(k)}\frac{t}{2}X_{(k)}^3 = 0, \quad (26) \\ u^{(2)} - u^{(1)} - \frac{t}{2}(\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}) + \frac{h}{2}(w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) + \frac{ht}{4}(\varphi_{,x}^{(1)} - \varphi_{,x}^{(2)}) - \\ &\quad - \frac{h}{G_{13}^0}q + \frac{h^3}{12E_3^0}q_{,xx} = 0, \end{aligned}$$

где при линейно упругом поведении материала внешнего слоя в направлениях x , z и физически нелинейной зависимости между касательным напряжением $\sigma_{(k)}^{13}$ и соответствующей сдвиговой деформацией $2\varepsilon_{13}^{(k)}$ введенные в рассмотрение внутренние усилия и моменты и искомые функции $u^{(k)}$, $w^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$, $\varphi^{(k)}$ связаны зависимостями

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{11} &= B_1 \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{(w_{,x}^{(k)})^2}{2} + \nu_{31}\varphi^{(k)} \right), \quad M_{(k)}^{11} = D_1\gamma_{,x}^{(k)}, \\ T_{(k)}^{33} &= B_3 \left(\nu_{13} \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{(w_{,x}^{(k)})^2}{2} \right) + \varphi^{(k)} \right), \quad M_{(k)}^{13} = D_{13}\varphi_{,x}^{(k)}, \quad (27) \\ T_{(k)}^{13} &= B_{13} \left(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)} \right), \quad \sigma_{33}^0 = \frac{E_3^0}{h} \left[w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{t}{2}(\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) \right], \end{aligned}$$

где

$$B_1 = \frac{E_1 t}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}, \quad B_3 = \frac{E_3 t}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}, \quad B_{13} = G_{13}t, \quad D_1 = \frac{B_1 t^2}{12}, \quad D_{13} = \frac{B_{13} t^2}{12}.$$

Для уравнений (26) в сечениях $x = -l$, l при испытаниях по схеме рис. 1, исходя из (21), (22), необходимо сформулировать граничные условия для свободных краев ($2l$ – длина пластины)

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{11}(x) = 0, \quad M_{(k)}^{11}(x) = 0, \quad \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)}\frac{ht}{4}q \right)(x) = 0, \quad q(x) = 0, \\ \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11}w_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2}q \right)(x) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

а при $x = 0$ – условия симметрии решений относительно центрального сечения

$$\begin{aligned} u^{(k)}(0) = 0, \quad \gamma^{(k)}(0) = 0, \quad \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)}\frac{ht}{4}q \right)(0) = 0, \quad q(0) = 0, \\ \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11}w_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2}q \right)(0) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

К сформулированным условиям (28), (29) необходимо добавить условия равенства нулю прогибов (перемещений в направлении оси z) верхнего несущего слоя в центрах опорных роликов

$$w^{(2)} \left(\pm \frac{a}{2} \right) + \frac{t}{2} \varphi^{(2)} \left(\pm \frac{a}{2} \right) = 0. \quad (30)$$

Для моделирования внешнего нагружения (рис. 1) распределенная нагрузка $X_{(1)}^3$, приложенная к нижнему слою, на участке контакта нагружающего ролика с внешним слоем задается функцией косинуса с амплитудным значением p . Для моделирования контактного взаимодействия опор и верхнего несущего слоя в опорном сечении $x = a/2$ задавались условия вида (30), а неизвестные реакции от опорных роликов $X_3^{(1)}$ аппроксимировались функцией косинуса с амплитудным значением p_z , которое подлежит определению из решения задачи:

$$X_{(1)}^3(x) = \begin{cases} p(1/2 \cos(\pi(x - L/2)/R) + 1/2), & x \in (L/2 - R, L/2 + R), \\ 0, & x \notin (L/2 - R, L/2 + R), \end{cases}$$

$$X_{(2)}^3(x) = \begin{cases} p_z(1/2 \cos(\pi(x - a/2)/R) + 1/2), & x \in (a/2 - R, a/2 + R), \\ 0, & x \notin (a/2 - R, a/2 + R). \end{cases}$$

где $2R$ – длина контактного взаимодействия нагружающих и опорных роликов с пластиной.

4. Сведение сформулированной краевой задачи к системе интегро-алгебраических уравнений

Для приближенного решения сформулированной краевой задачи (26)–(30) использовали метод конечных сумм (метод интегрирующих матриц). В соответствии с этим методом исходные дифференциальные уравнения сводили к интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Заметим, что исходная краевая задача имеет вид дифференциальной задачи второго порядка, в то время как интегральные уравнения будут содержать лишь производные искомых функций, то есть сведение задачи к интегральному виду производится таким образом, что искомыми неизвестными в интегральной постановке задачи будут $(u_{,x}^{(k)}, w_{,x}^{(k)}, \gamma_{,x}^{(k)}, \varphi_{,x}^{(k)}, q_{,x})$. Такое сведение проводится путем интегрирования уравнений (26) и удовлетворения условиям (28), (29). Для начала введем в рассмотрение интегральные операторы видов

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{R}(f) = \int_x^l f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{D}(f) = \int_0^l f(\xi) d\xi. \quad (31)$$

Затем, интегрируя производные от искомым функций и удовлетворяя граничным условиям первого рода, представим искомые функции следующим образом

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= \mathcal{L}u_{,x}^{(k)}, \quad \gamma^{(k)} = \mathcal{L}\gamma_{,x}^{(k)}, \quad q = \mathcal{L}q_{,x}, \\ w^{(k)} &= -\mathcal{R}w_{,x}^{(k)} + w^{(k)}(l), \quad \varphi^{(k)} = -\mathcal{R}\varphi_{,x}^{(k)} + \varphi^{(k)}(l). \end{aligned} \quad (32)$$

В соответствии с (32) внутренние усилия и моменты из (27) выражаются только лишь через производные искомым функций и константы интегрирования $w^{(k)}(l)$, $\varphi^{(k)}(l)$.

Проинтегрируем первое и третье уравнения системы (26) от x до l и воспользуемся граничными условиями $T_{(k)}^{11}(l) = 0$ и $M_{(k)}^{11}(l) = 0$ из системы (28)

$$\begin{aligned} -T_{(k)}^{11} + \delta_{(k)}\mathcal{R}q &= 0, \\ -M_{(k)}^{11} - \mathcal{R}T_{(k)}^{13} + \frac{t}{2}\mathcal{R}q &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Проинтегрируем второе и четвертое уравнения системы (26) от 0 до x и воспользуемся граничными условиями

$$\left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)} \frac{ht}{4} q \right) (0) = 0, \quad \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11} w_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2} q \right) (0) = 0$$

из системы (28), получаем

$$\begin{aligned} \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11} w_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2} q \right) + \delta_{(k)} \mathcal{L} \sigma_{33}^0 + \mathcal{L} X_{(k)}^3 &= 0, \\ \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)} \frac{ht}{4} q \right) - \mathcal{L} T_{(k)}^{33} + \frac{t}{2} \mathcal{L} \sigma_{33}^0 - \delta_{(k)} \frac{t}{2} \mathcal{L} X_{(k)}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Обозначим $q_{l,x} = \left. \frac{dq}{dx} \right|_{x=l}$ и проинтегрируем последнее уравнение системы (26) от 0 до x , тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left[u^{(2)} - u^{(1)} - \frac{t}{2} (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}) + \frac{h}{2} (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) + \frac{ht}{4} (\varphi_{,x}^{(1)} - \varphi_{,x}^{(2)}) - \frac{h}{G_{13}^0} q \right] - \\ - \frac{h^3}{12E_3^0} q_{,x} + \frac{h^3}{12E_3^0} q_{l,x} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Для удовлетворения последним граничным условиям

$$q(l) = 0, \quad \left(M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)} \frac{ht}{4} q \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad \left(T_{(k)}^{13} - T_{(k)}^{11} w_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2} q \right) \Big|_{x=l} = 0$$

из (28), (29), проинтегрируем $q_{,x}$, второе и четвертое уравнения системы (26) от 0 до l

$$\mathcal{D} q_{,x} = 0, \quad \delta_{(k)} \mathcal{D} \sigma_{33}^0 + \mathcal{D} X_{(k)}^3 = 0, \quad -\mathcal{D} T_{(k)}^{33} + \frac{t}{2} \mathcal{D} \sigma_{33}^0 - \delta_{(k)} \frac{t}{2} \mathcal{D} X_{(k)}^3 = 0. \quad (36)$$

Таким образом, имеем задачу, эквивалентную (26)–(30): найти введенную в рассмотрение вектор-функцию, состоящую из пятнадцати неизвестных: $U = (u_{,x}^{(1)}, u_{,x}^{(2)}, \gamma_{,x}^{(1)}, \gamma_{,x}^{(2)}, w_{,x}^{(1)}, w_{,x}^{(2)}, \varphi_{,x}^{(1)}, \varphi_{,x}^{(2)}, q_{,x}, w_l^{(1)}, w_l^{(2)}, \varphi_l^{(1)}, \varphi_l^{(2)}, q_{l,x}, p_z) \in H^{\times 9} \times R^{\times 6}$, которая удовлетворяет составленной разрешающей системе пятнадцати интегральных уравнений (30), (33)–(36), где $H = L_2(0, l)$, l – полудлина пластины.

Введем в рассмотрение следующие операторы, порожденные уравнениями (30), (33)–(36):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_u^{(k)} U &= -B_1 \left(u_{,x}^{(k)} + \nu_{31} \Delta \varphi^{(k)} \right) + \delta_{(k)} \mathcal{R} q, \quad \mathcal{N}_u^{(k)}(U) = -\frac{B_1}{2} \left(w_{,x}^{(k)} \right)^2, \\ \mathcal{A}_\gamma^{(k)} U &= -D_1 \gamma_{,x}^{(k)} - \mathcal{R} B_{13} \left(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)} \right) + \frac{t}{2} \mathcal{R} q, \\ \mathcal{A}_w^{(k)} U &= B_{13} \left(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)} \right) + \frac{h}{2} q + \delta_{(k)} \mathcal{L} \frac{E_3^0}{h} \left[w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{t}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) \right], \\ \mathcal{N}_w^{(k)}(U) &= -B_1 \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(w_{,x}^{(k)} \right)^2 + \nu_{31} \varphi^{(k)} \right) w_{,x}^{(k)}, \\ \mathcal{A}_\varphi^{(k)} U &= D_{13} \varphi_{,x}^{(k)} + \frac{ht}{4\delta_{(k)}} q - \mathcal{L} B_3 \left(\nu_{13} u_{,x}^{(k)} + \varphi^{(k)} \right) + \\ &+ \frac{t}{2} \mathcal{L} \frac{E_3^0}{h} \left[w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{t}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) \right], \\ \mathcal{N}_\varphi^{(k)}(U) &= -\mathcal{L} \frac{B_3 \nu_{13}}{2} \left(w_{,x}^{(k)} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_q U &= \frac{h^3}{12E_3^0} q_{l,x} - \frac{h^3}{12E_3^0} q_{,x} + \\
 &+ \mathcal{R} \left[u^{(2)} - u^{(1)} - \frac{t}{2} (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}) + \frac{h}{2} (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) + \frac{ht}{4} (\varphi_{,x}^{(1)} - \varphi_{,x}^{(2)}) - \frac{h}{G_{13}^0} q \right]. \\
 f_q U &= \mathcal{D} q_{,x}, \\
 f_w^{(k)} U &= \delta_{(k)} \mathcal{D} \frac{E_3^0}{h} \left[w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{t}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) \right], \\
 f_\varphi^{(k)} U &= -\mathcal{D} B_3 \left(\nu_{13} u_{,x}^{(k)} + \varphi^{(k)} \right) + \frac{t}{2} \mathcal{D} \frac{E_3^0}{h} \left[w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{t}{2} (\varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}) \right], \\
 n_\varphi^{(k)}(U) &= \mathcal{D} B_3 \left(\frac{\nu_{13}}{2} (w_{,x}^{(k)})^2 \right), \\
 gU &= w^{(2)} \left(\frac{a}{2} \right) + \frac{t}{2} \varphi^{(2)} \left(\frac{a}{2} \right). \\
 \mathcal{A}(U) &= \left(\mathcal{A}_u^{(1)} U + \mathcal{N}_u^{(1)}(U), \mathcal{A}_u^{(2)} U + \mathcal{N}_u^{(2)}(U), \mathcal{A}_\gamma^{(1)} U, \right. \\
 &\mathcal{A}_\gamma^{(2)} U, \mathcal{A}_w^{(1)} U + \mathcal{N}_w^{(1)}(U), \mathcal{A}_w^{(2)} U + \mathcal{N}_w^{(2)}(U) + \mathcal{L} X_{(2)}^3(p_z), \mathcal{A}_\varphi^{(1)} U + \mathcal{N}_\varphi^{(1)}(U), \\
 &\mathcal{A}_\varphi^{(2)} U + \mathcal{N}_\varphi^{(2)}(U) \mathcal{A}_q U + \frac{t}{2} \mathcal{L} X_{(2)}^3(p_z), f_q U, f_w^{(1)} U, f_w^{(2)} U + \mathcal{D} X_{(2)}^3(p_z), \\
 &\left. f_\varphi^{(1)} U + n_\varphi^{(1)}(U), f_\varphi^{(2)} U + n_\varphi^{(2)}(U) + \frac{t}{2} \mathcal{D} X_{(2)}^3(p_z), gU \right)^T.
 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем для краткости искомые функции без производных не выражены в соответствии с (32) через их производные, однако стоит помнить о том, что сами функции без производных в разрешающую систему не входят, а выражаются через производные с помощью соотношений (32).

Таким образом, сформулированная интегральная постановка (30), (33)–(36) краевой задачи в операторном виде может быть записана в виде

$$\mathcal{A}(U) = \mathcal{F}. \tag{37}$$

В работе [23] предложены метод коллокаций по гауссовским узлам и способ построения интегрирующих матриц, в соответствии с которыми заменяем входящие в задачу (37) интегральные операторы

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{R}(f) = \int_x^l f(\xi) d\xi, \quad \mathcal{D}(f) = \int_0^l f(\xi) d\xi$$

на их конечномерные аналоги в виде интегрирующих матриц L , R , D . С этой целью на отрезке $[0, l]$ вводится сетка $\omega = \{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ согласно квадратной формуле Гаусса: $D(f) = \sum_{i=1}^N d_i f(x_i)$, где $\{d_i\}$, $\{x_i\}$ – соответственно веса и узлы коллокаций, связанные с корнями полинома Лежандра степени N . Обозначим через f_i значение f в узле x_i : $f_i = f(x_i)$ и приблизим f на отрезке $[0, a]$ посредством интерполирующей функции $f(x) \approx \sum_{i=1}^N f_i l_i(x)$. В работе [23] в качестве интерполирующей функции выбраны базисные функции Лагранжа $\{l_i\}$ по узлам $\{x_i\}$. Таким образом, раскладывая функции l_i по полиномам Лежандра, строят интегрирующие матрицы L , R .

В [20, 21] подробно описано конструктивное применение метода интегрирующих матриц в варианте [23] для задач теории пластин и оболочек, поэтому ограничимся лишь окончательной дискретной формулировкой задачи в операторном виде, которая получается в результате замены входящих в задачу (30), (33)–(36) интегральных операторов на интегрирующие матрицы

$$A(U) = A_1U + A_2(U) = F, \quad (38)$$

где $U = (w_{,x}^{(1)}, w_{,x}^{(2)}, u_{,x}^{(1)}, u_{,x}^{(2)}, q_{,x}, w_l^{(1)}, w_l^{(2)}, \varphi_l^{(1)}, \varphi_l^{(2)}, q_{l,x}, p_z) \in H_h^{\times 5} \times R^{\times 6}$, A_1 – линейный, A_2 – нелинейный операторы; вектор-функция правых частей F зависит только от функции поперечной нагрузки $X_3^{(1)}(p)$, приложенной к нижнему несущему слою.

5. Итерационный метод и численные эксперименты

Для решения геометрически нелинейной задачи (38) построен итерационный процесс Ньютона

$$A'(U^{(n)})(U^{(n+1)} - U^{(n)}) + (A_1 + A_2)U^{(n)} = F, \quad (39)$$

где $U^{(0)}$ – заданное начальное приближение. Вычисления согласно этому итерационному процессу проводились до тех пор, пока норма невязки и разности между итерациями оставалась больше заданной точности.

С целью построения предобуславливателя $A'(U)$ предварительно получим явный вид дифференциала Фреше оператора \mathcal{A} задачи (37), который определяется как

$$\mathcal{A}(U + \Delta U) - \mathcal{A}U = \mathcal{A}'(U)\Delta U + \mathcal{R}(U, \Delta U), \quad (40)$$

где $\mathcal{A}'(U)$ – линейный непрерывный по ΔU оператор, а $\lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\mathcal{R}(U, \Delta U)}{\|\Delta U\|} \rightarrow 0$, то есть $\mathcal{A}'(U)\Delta U$ является дифференциалом оператора \mathcal{A} в точке U , а $\mathcal{R}(U, \Delta U)$ – остатком этого дифференциала.

В соответствии с (41) продифференцируем уравнения (33)–(36) и введем соответствующие операторы

$$\mathcal{A}'_{u^{(k)}}(U)\Delta U = \mathcal{A}'_{u^{(k)}}\Delta U - B_1(w_{,x}^{(k)}\Delta w_{,x}^{(k)}),$$

$$\mathcal{A}'_{\gamma^{(k)}}(U)\Delta U = \mathcal{A}'_{\gamma^{(k)}}\Delta U,$$

$$\mathcal{A}'_{w^{(k)}}(U)\Delta U = \mathcal{A}'_{w^{(k)}}U - T_{(k)}^{11}\Delta w_{,x}^{(k)} - B_1(w_{,x}^{(k)}\Delta u_{,x}^{(k)} + (w_{,x}^{(k)})^2\Delta w_{,x}^{(k)} + \nu_{31}w_{,x}^{(k)}\Delta \varphi^{(k)}),$$

$$\mathcal{A}'_{\varphi^{(k)}}(U)\Delta U = \mathcal{A}'_{\varphi^{(k)}}U - \mathcal{L}B_3(\nu_{13}w_{,x}^{(k)}\Delta w_{,x}^{(k)}),$$

$$\mathcal{A}'_q(U)\Delta U = \mathcal{A}_q\Delta U,$$

$$f'_q(U)\Delta U = f_q\Delta U,$$

$$f'_{w^{(k)}}(U)\Delta U = f_{w^{(k)}}\Delta U,$$

$$f'_{\varphi^{(k)}}(U)\Delta U = f_{\varphi^{(k)}}\Delta U - \mathcal{D}B_3(\nu_{13}w_{,x}^{(k)}\Delta w_{,x}^{(k)}),$$

$$g'(U)\Delta U = g\Delta U.$$

В соответствии с вышеописанным методом интегрирующих матриц для введенных операторов $\mathcal{A}'_{u^{(k)}}(U), \dots, g'(U)$ строятся их дискретные аналоги в виде матриц

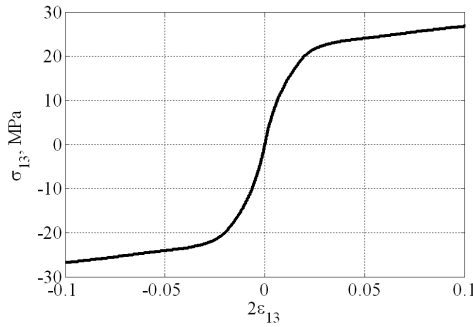


Рис. 2. Зависимости касательных напряжений от деформаций сдвига для волокнистого однонаправленного композита ЭЛUR-II

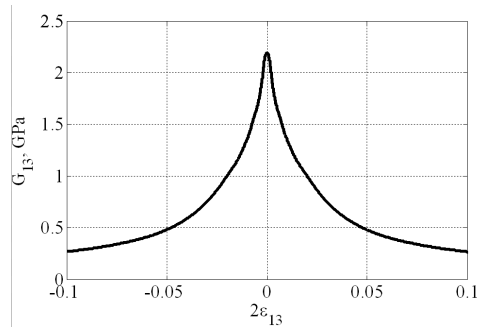


Рис. 3. Зависимости модуля сдвига от деформаций сдвига для волокнистого однонаправленного композита ЭЛUR-II

$A'_{u(1)}(U), \dots, g'(U)$. Тогда преобуславливатель $A'(U^{(n)})$ в итерационном процессе (39) будет иметь следующий вид:

$$A'(U) = \left(A'_{u(1)}(U), A'_{u(2)}(U), A'_{\gamma(1)}(U), A'_{\gamma(2)}(U), A'_{w(1)}(U), A'_{w(2)}(U), \right. \\ \left. A'_{\varphi(1)}(U), A'_{\varphi(2)}(U), A'_q(U), f'_q(U), f'_{w(1)}(U), f'_{w(2)}(U), f'_{\varphi(1)}(U), f'_{\varphi(2)}(U), g'(U) \right)^T.$$

В [15] были проведены натурные эксперименты с целью определения модуля сдвига волокнистых композитных материалов, используемых для несущих слоев трехслойной пластины, были получены осредненные экспериментальные зависимости $\sigma_{13} = G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})2\varepsilon_{13}^{(k)}$ касательных напряжений от сдвиговых деформаций (рис. 2), на основе которых построены зависимости секущего модуля поперечного сдвига от соответствующих деформаций сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})$ (рис. 3). Последние зависимости в используемую математическую модель деформирования входят как слагаемые, учитывающиеся в виде физически нелинейной зависимости $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)}) = G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$.

На основе зависимостей, полученных в [15], для учета физической нелинейности при программной реализации предлагаемого метода предварительно построена кусочно-линейная интерполяция $G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$ и модифицирован итерационный процесс (39):

$$A'_{(n)}(U^{(n)}) (U^{(n+1)} - U^{(n)}) + (A_1^{(n)} + A_2^{(n)}) U^{(n)} = F. \tag{41}$$

Нелинейная зависимость модуля поперечного сдвига G_{13} от величины сдвиговой деформации $2\varepsilon_{13}^{(k)} = w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}$ входит в задачу как зависимость операторов $A'_{(n)}$, $A_1^{(n)}$, $A_2^{(n)}$ от $U^{(n)}$, где $U^{(0)}$ – заданное начальное приближение, то есть на каждом n -м итерационном шаге приходится заново вычислять матрицу жесткости в зависимости от n -го приближения решения $\left(U^{(n)}, \left(2\varepsilon_{13}^{(k)} \right)^{(n)} \right)$. Вычисления, согласно этому итерационному процессу, проводились до тех пор, пока норма невязки и разности между итерациями оставалась больше заданной точности.

При проведении расчетов упругие характеристики внешних несущих слоев приняты равными $E_1 = 103$ ГПа, $E_3 = 5.9$ ГПа, $\nu_{13} = 0.3$, трансверсально-мягкого заполнителя – $E_3 = 80$ МПа, $G_{13} = 30$ МПа, а геометрические параметры равными

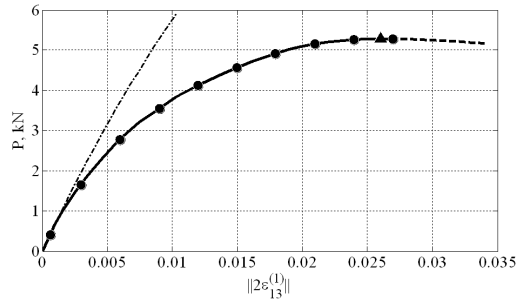


Рис. 4. Диаграмма «нагрузка–сдвиг» при четырехточечном изгибе трехслойного тест-образца, $h = 1$ см, $t = 0.3$ см

$t = 0.3$ см, $h = 1$ см, $L = 7$ см, $a = 25$ см, $2l = 27$ см, $R = 0.5$ см. Для описания искомых функций, имеющих большие градиенты на весьма коротких участках (в частности, в зоне нагружающего ролика), проведена декомпозиция области с применением кусочно-лагранжевой интерполяции для построения интегрирующих матриц. С этой целью область $[0, l]$ разбита на три отрезка $e_1 = [0, L/2]$, $e_2 = [L/2, L/2 + R]$, $e_3 = [L/2 + R, l]$, введена глобальная сетка $\omega_h = \{x_i : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < l\}$ на отрезке $[0, l]$ следующим образом: на каждом отрезке e_1 , e_2 , e_3 введены независимые узлы Гаусса, связанные с корнями полинома Лежандра; количество узлов на указанных отрезках принято равным $N_1 = 40$, $N_2 = 81$, $N_3 = 130$ соответственно.

Путем табулирования по параметру амплитудного значения p поперечной нагрузки $X_3^{(1)}$ проводился анализ последовательности равновесных состояний (решений задачи) при различных уровнях нагружения, в том числе отслеживалось максимальное значение прогибов и сдвиговых деформаций нижнего нагружаемого несущего слоя. Стоит отметить, что полученная зависимость «нагрузка–прогиб» оказалась линейной, поэтому не представляет особого интереса. В то же время приведенная на рис. 4 зависимость нагрузки от максимального по модулю значения сдвиговых деформаций, где

$$P = b \int_{-l}^l X_{(1)}^3, \quad b = 2.5 \text{ см}, \quad \left\| \varepsilon_{13}^{(1)} \right\| = \max_{x \in \omega_h} |\varepsilon_{13}^{(1)}(x)|,$$

является нелинейной. На рисунке штрихпунктирная линия соответствует решению геометрически нелинейной задачи без учета физической нелинейности, а сплошная линия – решению геометрически и физически нелинейной задачи. В окрестности некоторого значения нагрузки $P = P^*$, обозначенного на рис. 4 треугольником, итерационный процесс перестает сходиться. Для поиска же неустойчивых положений равновесия, обозначенных на рис. 4 штриховой линией, был реализован метод продолжения по параметру (см., например, [21], где подробно описана конструктивная реализация метода продолжения по параметру), который является одним из вариантов модифицированной глобально инкрементальной теории Лагранжа (задача относительно приращений, в отличие от классической инкрементальной теории Лагранжа, решается в нелинейной постановке). Параметром нагружения в используемом методе выбраны сдвиговые деформации в точке ξ , где $\xi : |\varepsilon_{13}^{(1)}(\xi)| = \max_{x \in \omega_h} |\varepsilon_{13}^{(1)}(x)|$ – точка, в которой сдвиговые деформации $\varepsilon_{13}^{(1)}$ достигают максимального по модулю значения.

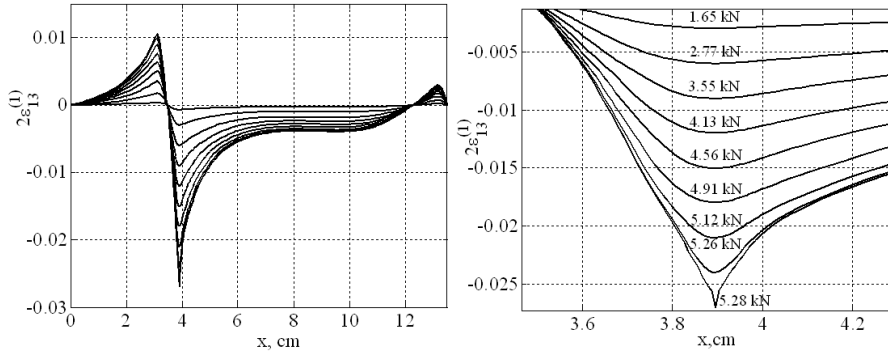


Рис. 5. Деформации сдвига при различных значениях изгибающей нагрузки на тест-образец

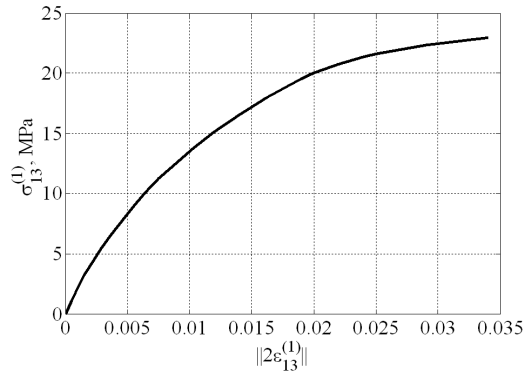


Рис. 6. Зависимость касательных напряжений от поперечных сдвиговых деформаций во внешнем слое при четырехточечном изгибе

На рис. 5 представлены распределение по длине деформаций сдвига нижнего несущего слоя при различных значениях нагрузки, а также участок в увеличенном масштабе с указанием соответствующих значений приложенной силы P для каждого изображенного решения в виде сдвига. Значения нагрузки P на рис. 5 также отмечены черными маркерами на диаграмме нагрузка–сдвиг (рис. 4).

На рис. 6 представлена зависимость касательных напряжений $\sigma_{13}^{(1)}(\xi)$ от деформаций сдвига $\varepsilon_{13}^{(1)}(\xi)$, которая хорошо согласуется с результатами натурных экспериментов, представленных на рис. 2.

На рис. 7–12 представлены графики, характеризующие напряженно-деформированное состояние трехслойной пластины в точке, обозначенной на рис. 4 треугольником, при $P = P^*$

На рис. 7 показана зависимость распределения по длине прогибов точек срединных поверхностей нижнего несущего слоя. На рис. 8 изображены функции сдвиговых деформаций нижнего несущего слоя. На рис. 9 и 10 представлены функции нормальных и касательных напряжений нижнего несущего слоя. На рис. 11 изображено распределение модуля поперечного сдвига по длине нижнего несущего слоя, соответствующее сформированным в нижнем слое сдвиговым деформациям. Распределение касательных напряжений в заполнителе представлено на рис. 12. Отметим, что максимальные по модулю значения деформаций сдвига и касательных напряжений, а также минимальный по абсолютной величине модуль сдвига

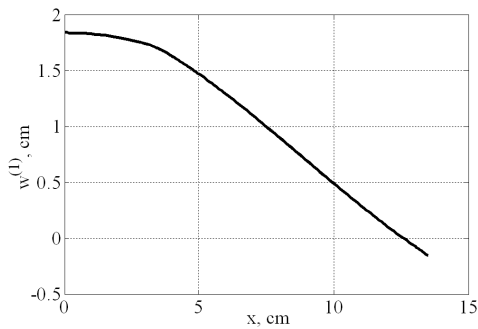


Рис. 7. Распределение прогибов нижнего несущего слоя при изгибе тест-образца

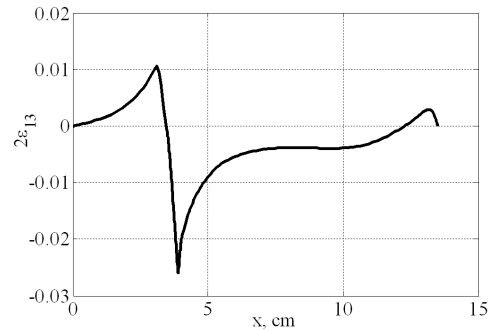


Рис. 8. Распределение сдвиговых деформаций нижнего несущего слоя при изгибе тест-образца

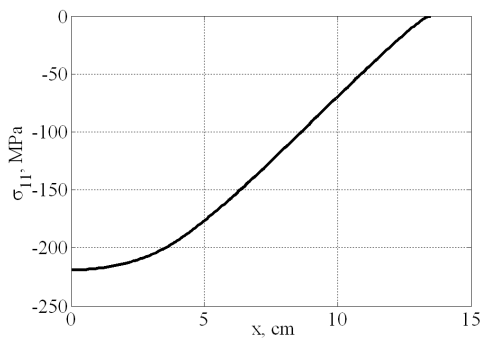


Рис. 9. Распределение нормальных напряжений в нижнем несущем слое при изгибе тест-образца

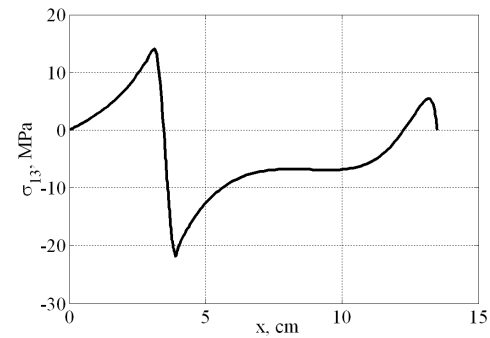


Рис. 10. Распределение касательных напряжений в нижнем несущем слое при изгибе тест-образца

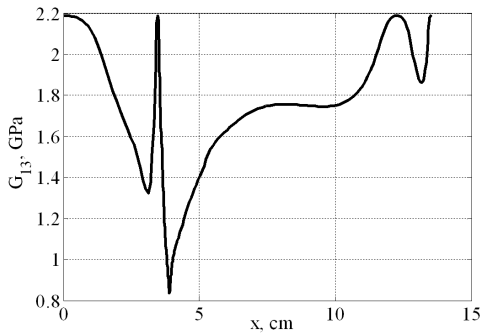


Рис. 11. Распределение модуля сдвига в нижнем несущем слое при изгибе тест-образца

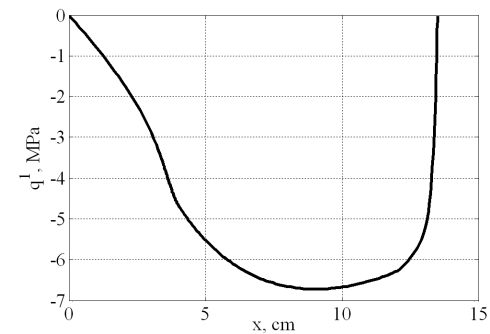


Рис. 12. Распределение касательных напряжений в сотовом наполнителе при изгибе тест-образца, $h = 1$ см, $t = 0.3$ см

достигаются у края нагружающего ролика (рис. 8, 10, 11). Видно, что в окрестности нагружающего ролика формируются локализованные зоны концентрации касательных напряжений и соответствующих им сдвиговых деформаций, а следовательно, и резкое падение значений секущих модулей упругости поперечного сдвига.

На рис. 13 представлены функция распределения по длине внешней поперечной нагрузки $X_3^{(1)}$, действующей на нижний несущий слой со стороны нагружающего

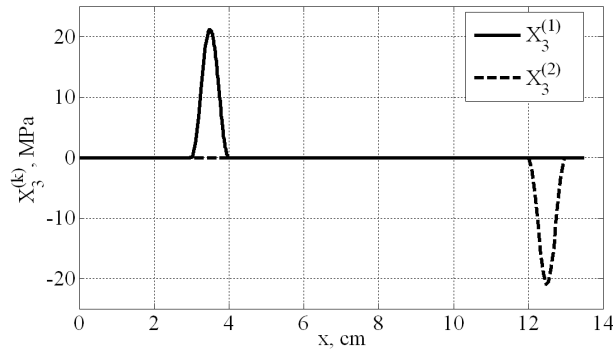


Рис. 13. Распределение поперечной нагрузки $X_3^{(1)}$ в нижнем несущем слое трехслойного тест-образца

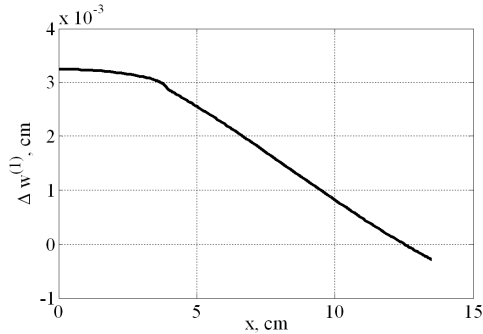


Рис. 14. Распределение приращения прогиба в нижнем несущем слое

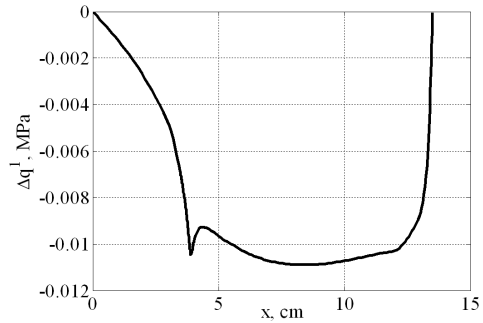


Рис. 15. Распределение приращения касательных напряжений в заполнителе

ролика (сплошная линия), а также функция распределения реакции опоры $X_3^{(2)}$ (пунктирная линия), найденная из решения задачи. Отметим, что найденное амплитудное значение реакции опоры $X_3^{(2)}$ равно амплитудному значению прикладываемой нагрузки $X_3^{(1)}$.

На рис. 14–16 представлены приращения искомых функций в закритической области, которые были получены как решение задачи относительно функций приращений с помощью метода продолжения по параметру. Проведенный анализ показал, что они характеризуют потерю устойчивости по поперечно-сдвиговой форме, которая реализуется при достижении поперечными касательными напряжениями в несущем слое некоторого предельного значения. Такая ФПУ аналогична поперечно-сдвиговой форме [14, 15], реализующейся в тест-образцах из волокнистых композитов при трехточечном изгибе и являющейся причиной их разрушения при испытаниях.

Следует отметить, что максимальные по модулю значения деформаций поперечного сдвига и касательных напряжений, а также минимальные по абсолютной величине модули поперечного сдвига достигаются у края нагружающего ролика (рис. 5, 11, 16). Видно, что в его окрестности формируются локализованные зоны концентрации касательных напряжений и соответствующих им сдвиговых деформаций, а следовательно, и резкое падение значений секущих модулей поперечного сдвига.

В соответствии с проведенным в работе [24] натурными экспериментами на четырехточечный изгиб трехслойных тест-образцов с несущими слоями, изготов-

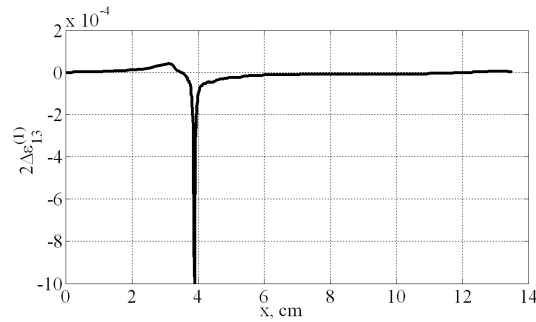


Рис. 16. Распределение приращения сдвиговых деформаций

Табл. 1

Результаты численных экспериментов для $t = 3$ мм и $t = 1$ мм

	$\ \sigma_{11}\ $, МПа	$\tilde{G}_{13}^{(1)}(\xi)$, МПа	$\hat{G}_{13}^{(1)}(\xi)$, МПа	$ \sigma_{13}^{(1)}(\xi) $, МПа	$ 2\varepsilon_{13}^{(1)}(\xi) $	P , кН
$t = 3$ мм	218.8	216.7	848.8	21.76	0.02564	5.283
$t = 1$ мм	341.7	327.1	943	20.74	0.022	1.47

ленными из однонаправленного волокнистого композита с физико-механическими свойствами $E_1 = 103$ ГПа, $E_3 = 5.9$ ГПа, $\nu_{13} = 0.3$ и сотовым наполнителем из полимерной бумаги – $E_3 = 74.81$ МПа, $G_{13} = 27.8$ МПа были проведены численные эксперименты для выявления форм потери устойчивости. Геометрические характеристики для тест-образцов имели следующие значения: $t = 0.1$ см, $h = 0.5$ см, $L = 7$ см, $a = 21$ см, $2l = 23$ см, $R = 0.25$ см. Сетка $\omega_h = \{x_i : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < l\}$ на отрезке $[0, l]$ вводилась в соответствии с вышеописанной декомпозицией области.

В табл. 1 приведены сравнения численных решений двух вышеописанных задач (при $t = 3$ мм и $t = 1$ мм). Стоит отметить, что максимальные нормальные напряжения в нагружаемом несущем слое $\|\sigma_{11}\|$ весьма хорошо согласовываются со значением касательного модуля сдвига $\tilde{G}_{13}^{(1)}(\xi)$ (где $\hat{G}_{13}^{(1)}$ – секущий модуль сдвига).

На рис. 17 приведена зависимость нагрузки от максимального по модулю значения сдвиговых деформаций. На рис. 18 приведены распределения касательных напряжений по толщине всей трехслойной пластины в окрестности нагружающего и подкрепляющего роликов, где реализуются максимальные значения касательных напряжений. На рис. 19 приведено распределение по полудлине пластины касательных напряжений в наполнителе q^1 в окрестности точки критической нагрузки P (рис. 17).

На рис. 20 приведена зависимость нагрузки от максимального по модулю значения касательных напряжений в наполнителе q^1 , видно, что зависимость носит линейный характер. Маркером на кривой отмечена точка, в которой касательные напряжения достигают значения предела прочности при сдвиге наполнителя $q_1 > \sigma_{13}^* \approx 0.9$ МПа, найденных в работе [25], которым на рис. 20 соответствует нагрузка $P^* = 327.6$ Н.

Заключение

В дополнение к проведенным численным исследованиям, выполнены эксперименты на трехточечный изгиб трехслойных пластин. Во всех экспериментальных и численных работах, где в качестве наполнителя выступал сотовый наполнитель

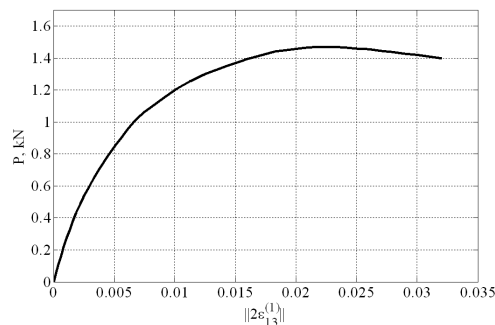


Рис. 17. Диаграмма «нагрузка – сдвиг» при четырехточечном изгибе трехслойного тест-образца, $h = 0.5$ см, $t = 0.1$ см

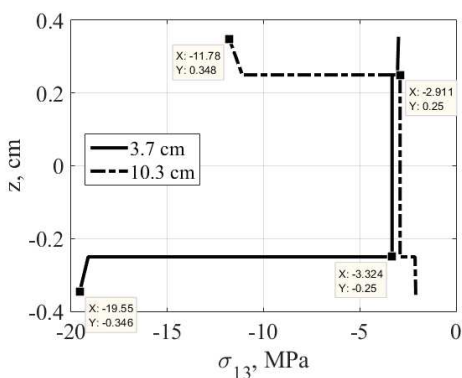


Рис. 18. Распределение касательных напряжений по толщине тест-образца, $h = 0.5$ см, $t = 0.1$ см

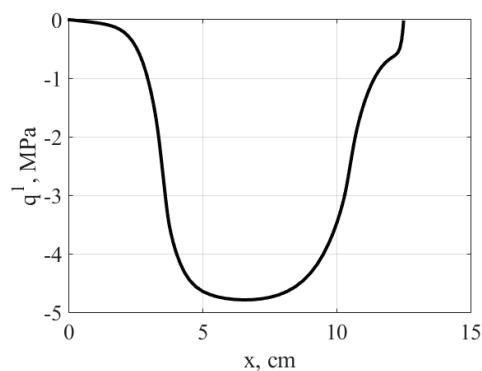


Рис. 19. Распределение касательных напряжений в сотовом заполнителе при изгибе тест-образца, $h = 0.5$ см, $t = 0.1$ см

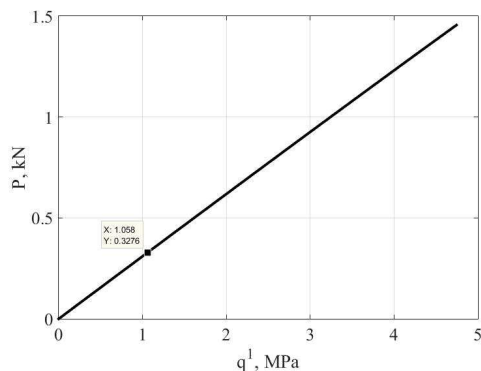


Рис. 20. Диаграмма «нагрузка – касательные напряжения в заполнителе» для трехслойного тест-образца при изгибе, $h = 0.5$ см, $t = 0.1$ см

из полимерной бумаги, несущая способность конструкции терялась при нагрузке соответствующей достижению в заполнителе напряжений $\sigma_{13}^* \approx 0.9$ МПа. Зависимость нагрузки от прогибов приведена рис. 21, где черной сплошной линией представлены результаты численного решения методом конечных сумм геометрически и физически нелинейной задачи. Как видно из рис. 22, напряжения q_1

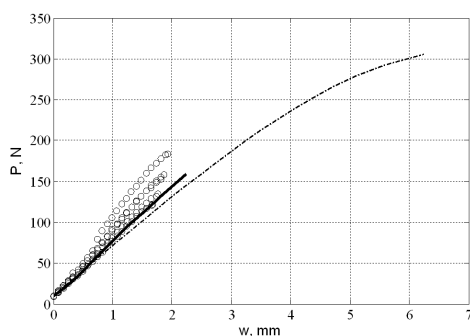


Рис. 21. Диаграмма «нагрузка – прогиб» при трехточечном изгибе (пояснения в тексте) (круглые маркеры – экспериментальные данные, черные линии – численное решение)

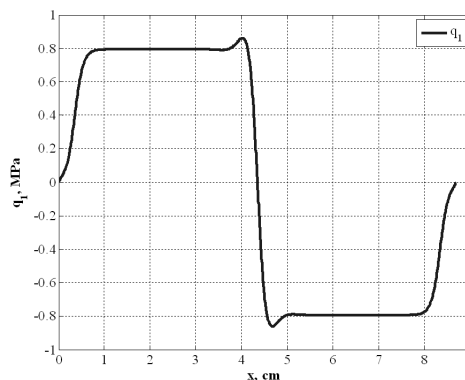


Рис. 22. Распределение касательных напряжений в сотовом заполнителе при трехточечном изгибе при $P = 150$ Н

в окрестности нагружающего ролика достигают значения предела прочности при сдвиге заполнителя $q_1 > \sigma_{13}^* = 0.887$ МПа, а напряжения обжатия σ_{33} – предела прочности при сжатии заполнителя $\sigma_{33} > \sigma_{33}^* = 2.490$ МПа, найденных в работе [25]).

Таким образом, с целью определения критической нагрузки трехслойных пластин для заполнителей подобного типа, имеющих низкие значения предела прочности при сдвиге заполнителя, достаточно воспользоваться отношением $P^* = \sigma_{13}^* b(h + 2t)$, где b – ширина пластины. Для указанных значений $\sigma_{13}^* \approx 0.9$ МПа, $b = 25$ мм, $h + 2t = 7$ мм критическое значение нагрузки равно $P^* = 315$ Н.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-79-10018, построение уравнений, численное решение задачи) и за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (ПРИОРИТЕТ-2030, эксперименты на трехточечный изгиб).

Литература

1. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – V. 41, No 1. – P. 183–211. – doi: 10.1016/0022-5096(93)90068-Q.
2. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // Compos. Struct. – 2010. – V. 92, No 2. – P. 295–305. – doi: 10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
3. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels // Compos. Struct. – 1999. – V. 44, No 4. – P. 237–252. – doi: 10.1016/S0263-8223(98)00123-8.
4. Rupp P., Elsner P., Weidenmann Kay A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process // J. Sandwich Struct. Mater. – 2019. – V. 21, No 8. – P. 2654–2679. – doi: 10.1177/10996362177220.
5. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // Composites, Part A. – 2018. – V. 109. – P. 564–577. – doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.

6. *Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R.* Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams // *Compos. Struct.* – 2003. – V. 60, No 2. – P. 219–229. – doi: 10.1016/S0263-8223(02)00293-3.
7. *Jiang B., Li Zh., Lu F.* Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending // *Compos. Struct.* – 2015. – V. 133. – P. 739–745. – doi: 10.1016/j.compstruct.2015.07.056.
8. *Fathi A., Woff-Fabris F., Altstädt V., Gätzi R.* An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2013. – V. 15, No 5. – P. 487–508. – doi: 10.1177/1099636213487004.
9. *Crupi V., Epasto G., Guglielmino E.* Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam // *Mar. Struct.* – 2013. – V. 30. – P. 74–96. – doi: 10.1016/j.marstruc.2012.11.002.
10. *Shi H., Liu W., Fang H.* Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under Four-point fatigue bending // *Compos. Part A: Appl. Sci. Manufactur.* – 2018. – V. 109. – P. 564–577. – doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
11. *Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F.* Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich // *J. Sandwich Struct. Mater.* – 2020. – V. 22, No 6. – P. 2049–2074. – doi: 10.1177/1099636218792729.
12. *Piovár S., Kormaníková E.* Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models // *Adv. Mater. Res.* – 2014. – V. 969. – P. 316–319. – doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316.
13. *Russo A., Zuccarello B.* Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels // *Compos. Struct.* – 2007. – V. 81, No 4. – P. 575–586. – doi: 10.1016/j.compstruct.2006.10.007.
14. *Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В., Холмогоров С.А.* О неклассической форме потери устойчивости и разрушении композитных тест-образцов в условиях трёхточечного изгиба // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2016. – Т. 158, кн 3. – С. 350–375.
15. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2018. – V. 99, No 1. – Art. e201800063, P. 1–25. – doi: 10.1002/zamm.201800063.
16. *Галимов Н.К., Муштару Х.М.* К теории трехслойных пластин и оболочек // *Исследования по теории пластин и оболочек.* – 1964. – Вып. 2. – С. 35–47.
17. *Гольденштейн А.М., Муштару Х.М.* К выводу нелинейных уравнений равновесия трехслойных пологих оболочек переменной толщины // *Исследования по теории пластин и оболочек.* – 1973. – Вып. 10. – С. 327–332.
18. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* *Механика многослойных конструкций.* – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
19. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2015. – V. 95, No 10. – P. 1004–1011. – doi: 10.1002/zamm.201500069.
20. *Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A.* Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge // *Shell*

- Structures: Theory and Applications. – London: CRC Press, 2017. – V. 4. – P. 267–270. – doi: 10.1201/9781315166605-59.
21. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // Russ. Math. – 2015. – V. 59, No 10. – P. 57–60. – doi: 10.3103/S1066369X15100072.
 22. *Paimushin V.N.* Generalized Reissner variational principle in nonlinear mechanics of three-dimensional composite solids with applications to the theory of multilayer shells // Mech. Solids. – 1987. – V. 22, No 2. – P. 166–174.
 23. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка // Изв. вузов. Матем. – 1996. – № 10. – С. 13–25.
 24. *Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А.* О специфике работы композитного несущего слоя трехслойной пластины при локальном нагружении // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика. – 2020. – Т. 4. – С. 152–164. – doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.13.
 25. *Paimushin V.N., Zakirov I.M., Lukankin S.A., Zakirov I.I., Kholmogorov S.A.* Average elastic and strength characteristics of a honeycomb core and a theoretical-experimental method of their determination // Mech. Compos. Mater. – 2012. – V. 48, No 5. – P. 511–524. – doi: 10.1007/s11029-012-9296-0.

Поступила в редакцию
18.08.2022

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский национальный исследовательский технический университет имени

А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: vpajmushin@mail.ru

Макаров Максим Викторович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры прочности конструкций; научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский национальный исследовательский технический университет имени

А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 4, pp. 329–356

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.329-356

**Refined Equations and Buckling Modes
under Four-Point Bending Loading
of the Sandwich Test Specimen with Composite Facing
Layers and a Transversely Flexible Core**

*V.N. Paimushin**, *M.V. Makarov****Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia**Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: **vpajmushin@mail.ru*, ***makarovmaksim@mail.ru*

Received August 18, 2022

Abstract

A refined geometrically nonlinear theory of sandwich plates and shells with a flexible soft core and composite facing layers having low shear and compressive stiffness was introduced. It is based on the refinement of the shear model of S.P. Timoshenko taking into account transverse compression, as well as on the use of simplified three-dimensional equations of the theory of elasticity for a transversely flexible core. By integrating the equations over the transverse coordinate to describe the stress-strain state of the core, two two-dimensional unknown functions were introduced, which are transverse shear stresses, constants by thickness. For describing the static deformation process with high variability of the parameters of the stress-strain state of the core, two variants of two-dimensional geometrically nonlinear equations were derived. In the first one, the geometric nonlinearity was considered in the standard approximation by retaining the terms containing only the membrane forces in the facing layers. In the second variant additional geometrically nonlinear terms of a higher order of smallness were kept. Using the compiled equations, a geometrically and physically nonlinear problem of four-point bending of the sandwich specimen was formulated with regard to the physically nonlinear relationship between the transverse shear stresses and the corresponding shear strains in the facing layers. A numerical method stemming from the finite sum method (integrating matrix method) was developed for its solution and post-buckling behavior of specimen was investigated. It was shown that when the specimens are tested, their failure can be caused by the transverse shear buckling mode of the facing layer near the loading roller.

Keywords: sandwich plates and shells, composite facing layers, transversely flexible core, physical and geometrical nonlinearity, sandwich specimen, four-point bending test, integrating matrices, shear buckling mode, continuation method by shear strain

Acknowledgments. This study was funded by the Russian Science Foundation (project no. 19-79-10018, construction of equations, numerical solution of the problem) and supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030, three-point bending tests).

Figure Captions

Fig. 1. Four-point bending testing scheme of the sandwich specimen: 1 – facing layers, 2 – core, 3 – supporting rollers, 4 – loading rollers.

Fig. 2. Dependence of shear stress on shear strain for unidirectional fiber-reinforced plastic ELUR-P.

Fig. 3. Dependence of shear modulus on shear strain of unidirectional fiber-reinforced plastic ELUR-P.

Fig. 4. “Load–shear strain” curve under four-point bending of the sandwich specimen, $h = 1$ cm, $t = 0.3$ cm.

Fig. 5. Shear strain for different levels of bending load on the sandwich specimen.

Fig. 6. Dependence of shear stress on shear strain in the facing layer under four-point bending.

Fig. 7. Distribution of deflection of the bottom facing layer under bending of the specimen.

Fig. 8. Distribution of shear strain in the bottom facing layer under bending of the specimen.

Fig. 9. Distribution of normal stress in the bottom facing layer under bending of the specimen.

Fig. 10. Distribution of shear stress in the bottom facing layer under bending of the specimen.

Fig. 11. Distribution of shear modulus in the bottom facing layer under bending of the specimen.

Fig. 12. Distribution of shear stress in the core under bending of the specimen, $h = 1$ cm, $t = 0.3$ cm.

Fig. 13. Distribution of external load $X_3^{(1)}$ in the bottom facing layer of the sandwich specimen.

Fig. 14. Distribution of deflection increment in the bottom facing layer.

Fig. 15. Distribution of shear stress increment in the core.

Fig. 16. Distribution of shear strain increment.

Fig. 17. “Load–shear strain” curve under four-point bending of the sandwich specimen, $h = 0.5$ cm, $t = 0.1$ cm.

Fig. 18. Distribution of shear strain through the thickness of the specimen, $h = 0.5$ cm, $t = 0.1$ cm.

Fig. 19. Distribution of shear stress in the core under bending of the specimen, $h = 0.5$ cm, $t = 0.1$ cm.

Fig. 20. “Load–shear stress in the core” curve for the sandwich specimen under bending, $h = 0.5$ cm, $t = 0.1$ cm.

Fig. 21. “Load–deflection” curve under three-point bending (see text for explanation) (round markers – experimental data, solid black line – numerical solution).

Fig. 22. Distribution of shear stress in the core under three-point bending for $P = 150$ N.

References

1. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211. doi: 10.1016/0022-5096(93)90068-Q.
2. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305. doi: 10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
3. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 44, no. 4, pp. 237–252. doi: 10.1016/S0263-8223(98)00123-8.

4. Rupp P., Elsner P., Weidenmann Kay A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2019, vol. 21, no. 8, pp. 2654–2679. doi: 10.1177/10996362177220.
5. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Composites, Part A*, 2018, vol. 109, pp. 564–577. doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
6. Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams. *Compos. Struct.*, 2003, vol. 60, no. 2, pp. 219–229. doi: 10.1016/S0263-8223(02)00293-3.
7. Jiang B., Li Zh., Lu F. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 133, pp. 739–745. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.07.056.
8. Fathi A., Woff-Fabris F., Altstädt V., Gätzi R. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2013, vol. 15, no. 5, pp. 487–508. doi: 10.1177/1099636213487004.
9. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam. *Mar. Struct.*, 2013, vol. 30, pp. 74–96. doi: 10.1016/j.marstruc.2012.11.002.
10. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under Four-point fatigue bending. *Composites, Part A*, 2018, vol. 109, pp. 564–577. doi: 10.1016/j.compositesa.2018.04.005.
11. Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2020, vol. 22, no. 6, pp. 2049–2074. doi: 10.1177/1099636218792729.
12. Piovár S., Kormaníková E. Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models. *Adv. Mater. Res.*, 2014, vol. 969, pp. 316–319. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316.
13. Russo A., Zuccarello B. Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels. *Compos. Struct.*, 2007, vol. 81, no. 4, pp. 575–586. doi: 10.1016/j.compstruct.2006.10.007.
14. Paimushin V.N., Tralakovskii D.V., Kholmogorov S.A. On non-classical buckling mode and failure of composite laminated specimens under the three-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 350–375. (In Russian)
15. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2018, vol. 99, no. 1, art. e201800063, pp. 1–25. doi: 10.1002/zamm.201800063.
16. Galimov N.K., Mushtari Kh.M. To the theory of sandwich plates and shells. In: *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* [Investigations for the Theory of Plates and Shells], 1964, no. 2, pp. 35–47. (In Russian)
17. Goldenstein A.M., Mushtari Kh.M. To the derivation of nonlinear equilibrium equations of sandwich shallow shells with variable thickness. In: *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* [Investigations for the Theory of Plates and Shells], 1973, no. 10, pp. 327–332. (In Russian)

18. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruktssii* [Mechanics of Sandwich Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
19. Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K. On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2015, vol. 95, no. 10, pp. 1004–1011. doi: 10.1002/zamm.201500069.
20. Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 4. London, CRC Press, 2017, pp. 267–270. doi: 10.1201/9781315166605-59.
21. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. doi: 10.3103/S1066369X15100072.
22. Paimushin V.N. Generalized Reissner variational principle in nonlinear mechanics of three-dimensional composite solids with applications to the theory of multilayer shells. *Mech. Solids.*, 1987, vol. 22, no. 2, pp. 166–174.
23. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations. *Russ. Math.*, 1996, vol. 40, no. 10, pp. 11–23.
24. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Kholmogorov S.A. On the specifics of behavior of the sandwich plate composite facing layers under local loading. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2020, vol. 4, pp. 152–164. doi: 10.15593/perm.mech/2020.4.13. (In Russian)
25. Paimushin V.N., Zakirov I.M., Lukankin S.A., Zakirov I.I., Kholmogorov S.A. Average elastic and strength characteristics of a honeycomb core and a theoretical-experimental method of their determination. *Mech. Compos. Mater.*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 511–524. doi: 10.1007/s11029-012-9296-0.

Для цитирования: Паймушин В.Н., Макаров М.В. Уточненные уравнения и формы потери устойчивости при четырехточечном изгибе трехслойного тест-образца с композитными несущими слоями и трансверсально-мягким наполнителем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 4. – С. 329–356. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.329-356.

For citation: Paimushin V.N., Makarov M.V. Refined equations and buckling modes under four-point bending loading of the sandwich test specimen with composite facing layers and a transversely flexible core. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 4, pp. 329–356. doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.329-356. (In Russian)