УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 2 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 193–210 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.977.58 doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.193-210

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМИЗИРУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОХЛАЖДЕНИЯ ЗАДАННЫХ УЧАСТКОВ СТЕРЖНЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

А.И. Эгамов

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского,

г. Нижний Новгород, 603950, Россия

Аннотация

Для процесса управления температурой тонкого стержня поставлена оптимизационная задача охлаждения его заданных участков. Управление охлаждением подобрано так, чтобы на протяжении всего воздействия выполняется некоторое фазовое ограничение. В результате уравнение теплопроводности с управляющим воздействием преобразуется в нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Показана связь полученной нелинейной начально-краевой задачи и стандартной линейной задачи уравнения теплопроводности, которая решается методом Фурье. Все это дает возможность перейти от начальной распределенной задачи к сосредоточенной оптимизационной задаче относительно коэффициентов Фурье решения линейной задачи. Для получившейся счетной системы дифференциальных уравнений показана возможность ее сведения к конечной усеченной системе. Дан алгоритм перебора управляющих коэффициентов усеченной задачи для нахождения оптимальных параметров управления и оптимального значения критерия качества усеченных задач. Доказано, что при этом для исходной оптимизационной задачи получается минимизирующая последовательность управляющих параметров.

Ключевые слова: вторая начально-краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, счетная система дифференциальных уравнений, усеченная система, минимизирующая последовательность

Введение

Управляемые математические модели часто описываются с помощью систем с распределенными параметрами. Различные подходы к ним и возникающие трудности при поиске оптимального управления развернуто представлены во введении недавно вышедшей монографии [1], там же приведена подробная библиография на эту тему. Отметим, что особую сложность задаче придают фазовые ограничения, наложенные на решение распределенных систем, например на решение начально-краевых задач с частными производными. В ряде случаев это удается обойти, используя интегральные операторы, с помощью специфического управления с обратной связью, получая при этом нелинейные интегро-дифференциальные уравнения. Преимущества этого подхода и другие сведения относительно решения подобных задач описаны во введении [2]. Различные виды интегро-дифференциальных уравнений и способы их решения можно найти в [3–5]. Один из основных методов решения состоит в сведении нелинейной задачи к известной линейной задаче, специфический класс таких интегро-дифференциальных уравнений, к которым можно применить этот метод, рассматривается в [6–9], таким образом, «автоматически» достигается выполнение фазового ограничения. Получив линейную задачу, можно воспользоваться методом Фурье или методом Галеркина и постараться записать распределенную задачу оптимизации с критерием качества через сосредоточенную, бесконечную систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье различных функций, представленных в задаче, а также переписать через них критерий качества. Если это возможно сделать, то задача существенно упрощается, но сразу возникают другие трудности, например, найти решение бесконечномерной системы дифференциальных уравнений, которую чаще всего можно решить только приближенно, то есть численно. При этом необходимо показать непрерывную связь между управлением и критерием качества оптимизационной задачи, для этого в настоящей статье даются оценки относительно евклидовой нормы, что удобнее при работе с коэффициентами Фурье.

Рассматриваются несколько вспомогательных укороченных конечномерных задач достаточно большой размерности, для каждой из которых находятся оптимальное управление и оптимальное значение критерия качества; вследствие чего можно получить минимизирующую последовательность для исходной оптимизационной задачи, а точнее вычислить оптимальное значение критерия качества с достаточной точностью.

Численные методы решения задач оптимального управления занимают важное место в теории оптимизации (см. обзор [10]). Особую роль в ней играют методы, построенные на основе конечномерной аппроксимации посредством разложения соответствующих решений в ряд Фурье, см., например, [11, 12]. В этом случае решение начально-краевой задачи сводится к решению счетной системы дифференциальных уравнений. К подобным задачам, в частности, приходят исследователи процессов математической физики или эволюционной биологии при численном решении задач, получая бесконечную систему дифференциальных уравнений [6, 13–16]. В настоящее время менее всего изучены задачи, когда управляющие функции входят в коэффициенты уравнений для состояний, что чаще всего связано с возникающей нелинейностью и некорректностью задач, однако именно они в последнее время привлекают внимание исследователей теории управления [17–19].

Следует отметить, что и теория оптимального управления математическими моделями, описываемыми системами с распределенными параметрами, и общая теория интегро-дифференциальных уравнений далеки от совершенства. Поэтому любое продвижение в сторону обоснования нового метода решения определенного класса таких задач или композиция известных методов, ранее не рассматривавшихся одновременно применительно к одной оптимизационной задаче и предлагающих понятное численное решение или алгоритм его нахождения с обоснованием сходимости соответствующих приближений, представляют собой определенный интерес.

Прием перехода к линейной оптимизационной задаче, аналогичный представленному в настоящей статье, описан в [2], однако далее использовано другое управление, представлены иной метод нахождения оптимального управления и доказательство его оптимальности.

С помощью стандартного преобразования вспомогательное параболическое уравнение разложено по системе косинусов и получена бесконечномерная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно коэффициентов Фурье для вспомогательной линейной задачи. Рассмотрение именно второго типа краевых условий позволяет, применяя стандартную формулу «произведение косинусов», разложить и включить в систему дифференциальных уравнений член $b(x)z(x,t)$, отвечающий за теплообмен с внешней средой для $0 < x < l$.

Установлена связь между бесконечномерной системой дифференциальных уравнений и вспомогательной конечной усеченной системой. Показан метод получения минимизирующей последовательности для численного решения поставленной оптимизационной задачи и доказана сходимость последовательности значений критерия качества вспомогательных задач к оптимальному значению критерия исходной задачи.

1. Описание управляемого процесса и его свойства

Рассмотрим управляемый процесс нагревания стержня [20]: дан тонкий однородный стержень с теплоизолированными концами длины l. На процесс изменения температуры стержня осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей. Построим математическую модель этого процесса. На множестве $Q = [0, l] \times [0, T]$, $l > 0$, $T > 0$ с границей Σ, состоящей из точек $\{(x, t) : t = 0$ или $(l - x)x = 0\}$, найти функцию $y(x, t)$ – распределение температуры в стержне – непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x в области $Q \setminus \Sigma$ – решение уравнения

$$y'_t(x, t) = a^2 y''_{xx}(x, t) + u(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее (концы теплоизолированы) однородным граничным условиям второго рода

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0 \tag{2}$$

и начальному условию

$$y(x, 0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где a – константа; положительная функция $\varphi(x)$ задает начальное распределение температуры, дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, l]$, удовлетворяет условиям согласования (2) и условию

$$\int_0^l \varphi(x)\, dx = 1. \tag{4}$$

Непрерывная функция $u(x, t)$ является управлением с обратной связью и имеет вид

$$u(x, t) = (b(x) + \eta(t))y(x, t), \tag{5}$$

где $b(x)$ и $\eta(t)$ – управляющие функции, причем $b(x) \in C[0, l]$ и $\eta(t) \in C[0, T]$.

2. Оптимизационная задача

Постановка оптимизационной задачи: *Требуется за фиксированное время $T > 0$ оптимально охладить стержень на заданном множестве A: заданных K отрезках $[a_s, d_s]$, $s = 1, 2, \ldots, K$, где $0 \le a_1 < d_1 < a_2 < d_2 < \cdots < a_K < < d_K \le l$, при ограничении на управляющую функцию:*

$$\int_0^l b^2(x)\, dx \le c^2, \tag{6}$$

где c – некоторая положительная константа. В любой момент времени должно выполняться фазовое ограничение

$$\int_0^l y(x, t)\, dx = 1. \tag{7}$$

Математически требования задачи могут означать: *при вышеописанном ограничении* (6) *минимизировать функционал терминального типа*

$$J(b(x), \eta(t)) = \int\limits_A y^2(x,T)\,dx \to \min\,. \tag{8}$$

При $t = 0$ условие (7) выполняется, см. (4). Для того чтобы (7) выполнялось при $t > 0$, необходимо, чтобы имело место

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^l y(x,t)\,dx = 0, \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Пусть ограничение (7) выполняется, интегрируя по x от 0 до l уравнение (1) и учитывая краевые условия (2), получим

$$\int\limits_0^l y'_t(x,t)\,dx = \int\limits_0^l y''_{xx}(x,t)\,dx + \int\limits_0^l b(x)y(x,t)\,dx + \eta(t)\int\limits_0^l y(x,t)\,dx = \int\limits_0^l b(x)y(x,t)\,dx + \eta(t).$$

С учетом (7) и (9) видно, что выполняется тождество

$$\eta(t) = -\int\limits_0^l b(x)y(x,t)\,dx. \tag{10}$$

Таким образом, для выполнения фазового ограничения (7) необходимо задать только одну управляющую функцию: $b(x)$. Функция $\eta(t)$ при этом выразится через $b(x)$ и решение $y(x,t)$. Допустимое управление $u(x,t)$ с учетом (5) и (10) будет иметь вид

$$u(x,t) = b(x)y(x,t) - y(x,t)\int\limits_0^l b(x)y(x,t)\,dx. \tag{11}$$

Управляющая функция $b(x)$ играет важную роль, поэтому везде, где это необходимо, решение задачи (1)–(4), (11) будем обозначать через $y(x,t,b)$. Функция $b(x)$ непрерывна, следовательно, ограничена.

Наложим на функцию $b(x)$ дополнительное условие: пусть функция $b(x)$ также удовлетворяет условиям

$$b'_x(0) = b'_x(l) = 0. \tag{12}$$

3. Вспомогательная начально-краевая задача

Пусть функция $z(x,t)$ – непрерывно дифференцируемая по t и дважды непрерывно дифференцируемая по x на множестве $Q \setminus \Sigma$, – решение уравнения

$$z'_t(x,t) = a^2 z''_{xx}(x,t) + b(x)z(x,t), \quad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{13}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$z'_x(0,t) = z'_x(l,t) = 0 \tag{14}$$

и начальному условию

$$z(x,0) = \varphi(x). \tag{15}$$

Известно [20, 21], что существует единственное ограниченное решение задачи (13)–(15) и оно может быть представлено в виде ряда Фурье. Аналогично, везде, где это необходимо, решение задачи (13)–(15) будем обозначать через $z(x,t,b)$.

В [21] доказан принцип максимума, из которого следует, что для решения однородной задачи (13)–(15) с однородными краевыми условиями справедливо неравенство

$$|z(x,t)| \le C_1 \max_{0\le x\le l} |\varphi(x)|, \tag{16}$$

где C_1 – константа, зависящая только от параметров уравнения (13): функции $b(x)$ и констант a, l, T.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $\rho(x) = b(x) + \rho_0$, где ρ_0 – некоторая константа, тогда уравнение* (13 *с функцией $\rho(x)$ вместо $b(x)$ перепишется в виде*

$$z'_t(x,t) = a^2 z''_{xx}(x,t) + b(x)z(x,t) + \rho_0 z(x,t),$$

Для его решения верно равенство

$$z(x,t,\rho) = \exp(\rho_0 t) z(x,t,b). \tag{17}$$

Лемма 2. *При сделанных предположениях на вспомогательную задачу для любых $t \in [0,T]$ ее решение $z(x,t) \not\equiv 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 1 всегда можно сделать так, чтобы выполнялось $b(x) \le 0$, $x \in [0,l]$, без изменения знака решения вспомогательной задачи (см. (17)). Поэтому для этой лемме будем считать, что $b(x) \le 0$, $x \in$ $\in [0,l]$. Пусть утверждение леммы 2 неверно. Воспользуемся методом Фурье. Пусть $z(x,t) = X(x)T(t)$, подставим это равенство в (13) и разделим обе части на $a^2 z(x,t)$:

$$\frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{b(x)}{a^2} = \nu_k,$$

причем константа $\nu_k \le 0$ вследствие условия $b(x) \le 0$, $x \in [0,l]$, [20].

Пусть $\nu_k = -\mu_k^2$, а $w_k(x)$, $k = 0,1,\dots,+\infty$, – собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$a^2 X''_{xx} + (b(x) + a^2\mu_k^2)X = 0, \quad X'_x(0) = X'_x(l) = 0.$$

Коэффициенты Фурье представляются в виде $T_k(t) = \varphi_k \exp(-a^2\mu_k^2 t)$, $k =$ $= 0,1,\dots,+\infty$. Функция $z(x,t)$ имеет вид

$$z(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \exp(-a^2\mu_k^2 t) w_k(x).$$

Если $z(x,t_0) \equiv 0$, то все $T_k(t_0) = 0$ в силу единственности разложения нулевой функции по собственным функциям $w_k(x)$, $k = 0,1,\dots,+\infty$. Это может быть, только если все $\varphi_k = 0$, $k = 0,1,\dots,+\infty$, но тогда $\varphi(x) \equiv 0$. Противоречие, так как $\varphi(x)$ положительна. □

В [20] доказан принцип минимума

Лемма 3 (Принцип минимума). *Пусть $b(x) \le 0$ на отрезке $x \in [0,l]$. Тогда при сделанных предположениях на вспомогательную задачу имеем*

$$z(x,t) \ge \min\{0; \min_{(x,t)\in\Sigma} z(x,t)\}. \tag{18}$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях на вспомогательную задачу верно неравенство* $z(x,t) \geq 0$ *для любых* $(x,t) \in Q$.

Доказательство. Согласно лемме 1 всегда можно сделать так, чтобы выполнялось $b(x) < 0$, $x \in [0,l]$, при этом знак решения вспомогательной задачи не изменится. Пусть $\rho_0 = \max\limits_{x\in[0,l]} b(x)$, В задаче (13)–(15) возьмем вместо функции $b(x)$ функцию $b(x) - \rho_0 - 1$, тогда на отрезке $x \in [0,l]$ верно, что новая управляющая функция $b(x) \leq -1 < 0$, при этом для решения задачи (13)–(15) – функции $z(x,t)$ – верна лемма 3.

Предположим противное: существует точка из Q, в которой $z(x,t) < 0$. Пусть T_m – множество точек $t \in [0,T]$, при которых существуют $x \in [0,l]$ такие, что $z(x,t) < 0$; положительное $t_0 = \inf T_m$, так как начальная функция положительна. По лемме 3, когда у $z(x,t)$ появляются отрицательные значения, ее минимум находится на одном из концов отрезка. В силу непрерывности функции $z(x,t)$ в момент t_0 для всех x выполняется $z(x,t_0) \geq 0$; при возрастании t по лемме 3 осуществляется смена знака функции $z(x,t)$ или в точке 0, или в точке l. Без ограничения общности можно предположить, что это точка 0 и $z(0,t_0) = 0$.

Возьмем $t_1 = t_0 + \Delta t$ такое, что малое $\Delta t > 0$ и $t_1 \in T_m$, выполняется $z(0,t_1) < < 0$; на отрезке $[t_0,t_1]$ значение $z(0,t)$ не возрастает. Кроме того, существует $x \in [0,l]$, что $z(x,t_1) > 0$, если таких точек нет, возьмем меньшее Δt; если таких Δt нет, то $z(x,t_0) \equiv 0$, что противоречит лемме 2. Поэтому пусть существует $\delta_1 = \min\limits_{x\in[0,l]} \{x : z(x,t_1) = 0\}$, то есть при $x \in [0,\delta_1)$ выполняется $z(x,t_1) < 0$.

Применяя два раза теорему Лагранжа, получим

$$0 < z(\delta_1,t_1) - z(0,t_1) = z'_x(\delta_2,t_1)\delta_1 - 0 = z'_x(\delta_2,t_1)\delta_1 - z'_x(0,t_1)\delta_1 = z''_{xx}(\delta_3,t_1)\delta_1\delta_2,$$

где $0 < \delta_3 < \delta_2 < \delta_1$, а значит, $z''_{xx}(\delta_3,t_1) > 0$. Нетрудно видеть, что $z'_t(\delta_3,t_1) \leq 0$, и, так как $z(\delta_3,t_1) < 0$ и $b(x) < 0$, то $b(\delta_3)z(\delta_3,t_1) > 0$. Тогда во внутренней точке (δ_3,t_1) не выполняется равенство (13):

$$z_t(\delta_3,t_1) \leq 0 < a^2 z_{xx}(\delta_3,t_1) + b(\delta_3)z(\delta_3,t_1).$$

Противоречие. □

Лемма 4. *При сделанных предположениях на вспомогательную задачу для ее решения при любых* $t \in [0,T]$ *справедливо неравенство* $\int\limits_0^l z(x,t)\,dx > 0$.

Доказательство. Утверждение леммы 4 непосредственно вытекает из леммы 2 и Теоремы 1. □

Аналогично [6, 7] справедлива следующая

Теорема 2. *Решение нелинейной задачи* (1)–(4), (11) *выражается через решение линейной задачи* (13)–(15) *в виде*

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\int\limits_0^l z(x,t)\,dx}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть функция $y(x,t)$ задана формулой (19), где $z(x,t)$ – решение линейной задачи (13)–(15). Непосредственно проверяются краевые и начальное условия (2), (3). Пусть $p(t) = \int\limits_0^l z(x,t)\,dx$. Тогда

$$y_t'(x,t) = \left(\frac{z(x,t)}{p(t)}\right)_t' = \frac{z_t'(x,t)}{p(t)} - \frac{p_t' z(x,t)}{p^2(t)} =$$

$$= \frac{a^2 z_{xx}''(x,t) + b(x)z(x,t)}{p(t)} - y(x,t)\frac{\int\limits_0^l a^2 z_{xx}''(x,t) + b(x)z(x,t)\,dx}{p(t)} =$$

$$= a^2 y_{xx}''(x,t) + b(x)y(x,t) - y(x,t)\int\limits_0^l b(x)y(x,t)\,dx,$$

что и требовалось доказать. □

Из теоремы 2 следует, что условие (7) верно при любом $t \in [0,T]$. Достаточность выбора управления вида (11) доказана.

В задачах оптимального управления важную роль играет непрерывная зависимость решения от управляющих параметров, в данном случае от управляющей функции.

Докажем сначала следующее неравенство. Пусть $w_i(x,t) \in C(Q)$, $i = 1,2,3$, $|w_3(x,t)| \le 1$ для $t \le t_0$. Тогда при $t \le t_0$ выполнено

$$\left|\int\limits_0^l w_1(x,t)w_2(x,t)w_3(x,t)\,dx\right| \le$$

$$\le \|w_1(x,t)\|_2 \cdot \|w_2(x,t)w_3(x,t)\|_2 \le \|w_1(x,t)\|_2 \cdot \|w_2(x,t)\|_2. \quad (20)$$

Теорема 3. *Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $0 < \varepsilon < 1$ такое, что если для непрерывных функций $\beta_0(x)$ и $\beta(x)$ выполняется неравенство $\|\beta(x) - \beta_0(x)\|_2 < \varepsilon$, то $\|z(x,T,\beta) - z(x,T,\beta_0)\|_2 < \varepsilon_1$.*

Доказательство. Определим квадрат квадратичной нормы непрерывной функции $\widehat{b}(x)$: $\|\widehat{b}\|_2^2 = \int\limits_0^l \widehat{b}^2(x)\,dx$. Из неравенства (16) справедлива оценка

$$\|z(x,t,\beta_0)\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^l z^2(x,t,\beta_0)\,dx} \le C_1\varphi_M\sqrt{l} = C_2, \quad (21)$$

где $\varphi_M = \max\limits_{0\le x\le l}|\varphi(x)|$, C_2 – константа.

Нетрудно видеть, что разность $\delta(x,t) = z(x,t,\beta) - z(x,t,\beta_0)$ – решение следующей задачи:

$$\delta_t'(x,t) = a^2\delta_{xx}''(x,t) + \beta_0(x)\delta(x,t) + (\beta(x) - \beta_0(x))z(x,t,\beta) \quad (22)$$

с краевыми и начальным условиями

$$\delta'_x(0,t)=\delta'_x(l,t)=0, \quad \delta(x,0)=0. \tag{23}$$

Обозначим $\Phi(t)=\|\delta(x,t)\|_2^2\not\equiv 0$, иначе теорема доказана. Пусть $B_3=1+$ $+\max\{\max\limits_{0\le x\le l}\beta_0(x);0\}$, $B_4=C_2{+}1$, $B_5=B_4B_3^{-1}(\exp(2B_3T){-}1)$, где B_i, $i=3,4,5$, – положительные константы, зависящие только от $\beta_0(x)$, $\varphi(x)$, T, l и a^2.

Возьмем ε такое, что $\varepsilon<\min\{1,B_5^{-1}\}$. Умножив обе части (22) на $\delta(x,t)$ и взяв от обеих частей интеграл по x от 0 до l, получим

$$\int\limits_0^l \delta(x,t)\delta'_t(x,t)\,dx=\int\limits_0^l (a^2\delta(x,t)\delta''_{xx}(x,t)+\beta_0(x)\delta^2(x,t))\,dx+ \\ +\int\limits_0^l(\beta(x)-\beta_0(x))z(x,t,\beta)\delta(x,t)\,dx. \tag{24}$$

Возможны два случая:

1-й случай: при любом $t\in[0,T]$ верно $|\delta(x,t)|<1$;

2-й случай: найдется $t\in[0,T]$, при котором $|\delta(x,t)|=1$. Вследствие непрерывности функции $\delta(x,t)$ существует $t_0=\min\limits_{t\in[0,T]}\{t:|\delta(x,t)|=1\}$.

Рассмотрим 1-й случай. Перепишем (24), интегрируя по частям и учитывая условия (23), затем, мажорируя и применяя неравенства (20) и (21), имеем

$$\frac{1}{2}\Phi'_t(t)=-a^2\int\limits_0^l \delta_x'^2(x,t)+\int\limits_0^l\beta_0\delta^2(x,t)\,dx+\int\limits_0^l(\beta(x)-\beta_0(x))z(x,t,\beta)\delta(x,t)\,dx\le \\ \le 0+(B_3-1)\Phi(t)+\|(\beta(x)-\beta_0(x))\|_2\cdot\|z(x,t,\beta)\|_2\le(B_3-1)\Phi(t)+ \\ +\varepsilon(\|z(x,t,\beta_0)\|_2+\|\delta(x,t)\|_2)<B_3\Phi(t)+\varepsilon(C_2+1).$$

Тогда последнее неравенство можно переписать как $\Phi'_t(t)<2B_3\Phi(t)+2B_4\varepsilon$, причем $\Phi(0)=0$. Решением задачи Коши $\psi'_t(t)=2B_3\psi(t)+2B_4\varepsilon$, $\psi(0)=0$, является функция $\psi(t)=\varepsilon B_4B_3^{-1}(\exp(2B_3t)-1)$, поэтому по теореме Чаплыгина $\Phi(t)<\psi(t)$. Так как функция $\psi(t)=\varepsilon B_4B_3^{-1}(\exp(2B_3t)-1)$ возрастает при $t\ge 0$, $\psi(t)\le\varepsilon B_5$. Следовательно, для любого $t\in[0,T]$ $\|\delta(x,t)\|_2=\sqrt{\Phi(T)}<\sqrt{\varepsilon B_5}=\varepsilon_1$, напомним, что B_5 – положительная константа, зависящая только от $\beta_0(x)$, $\varphi(x)$, T, l и a^2. Во втором случае все предыдущие оценки для $\Phi(t)$ верны на отрезке $[0,t_0]$ и

$$1=\Phi(t_0)<\varepsilon B_4B_3^{-1}(\exp(2B_3t_0)-1)\le\varepsilon B_4B_3^{-1}(\exp(2B_3T)-1)=\varepsilon B_5.$$

Противоречие. Второй случай не возможен для достаточно малых ε. Теорема доказана. □

4. Счетная система дифференциальных уравнений

Пусть $v_i(x)$, $i=0,1,\ldots,+\infty$, – система косинусов [23]: $v_i(x)=\cos(\lambda_i x)$, $\lambda_i=$ $=\dfrac{\pi i}{l}$, $i=0,1,\ldots,+\infty$, – полная ортогональная система на отрезке $[0,l]$ для функций, удовлетворяющих краевым условиям (12). Выполняются равенства

$\int\limits_0^l v_i^2(x)\,dx = l/2,\ i = 1,2,\ldots,+\infty$. Разложим по системе косинусов функции $z(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \xi_i(t)v_i(x),\ b(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i v_i(x)$ и $\varphi(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varphi_i v_i(x)$. Формулы для нахождения коэффициентов разложения широко известны и имеются, например, в [23]. Подставляя их в (13) и делая стандартные преобразования, описанные, например, в [20], а затем, используя формулу «произведение косинусов» для выражения $b(x)z(x,t)$, имеем

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \xi'_{it}(t)v_i(x) - \sum_{i=0}^{+\infty} a^2\xi_i(t)v''_{ixx}(x) - b(x)z(x,t) = \sum_{i=0}^{+\infty}(\xi'_{it}(t) + a^2\lambda_i^2\xi_i(t))v_i(x) -$$
$$- \sum_{i=0}^{+\infty} b_i v_i(x) \sum_{i=0}^{+\infty} \xi_i(t)v_i(x) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\xi'_{it}(t) + a^2\lambda_i^2\xi_i(t) - \sum_{j=0}^{+\infty}\widehat{c}_{ij}\xi_j(t)\right)v_i(x) = 0,$$

где $\widehat{c}_{ij}$ совпадают с c_{ij} при $i \neq j$, (см. ниже (26), (27)); $\widehat{c}_{ij} = b_0 + \dfrac{1}{2}\,b_{2i}$ при $i = j$. Получим бесконечномерную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно коэффициентов Фурье $\xi_i(t)$, $i = 0,1,\ldots,+\infty$, функции $z(x,t)$ с начальными условиями

$$\xi'_t(t) = C\xi(t), \quad \xi_i(0) = \varphi_i, \quad i = 0,1,\ldots,+\infty, \tag{25}$$

где $\xi(t)$ – бесконечномерная вектор-функция с компонентами $\xi_i(t)$, $i = 0,\ 1,\ldots,+\infty$, C – стационарная матрица бесконечной размерности с элементами

$$c_{00} = b_0,\ c_{0j} = \frac{1}{2}\,b_j,\ j = 1,2,\ldots,+\infty,\ c_{ii} = b_0 + \frac{1}{2}\,b_{2i} - a^2\lambda_i^2,\ i = 1,2,\ldots,+\infty, \tag{26}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i+j} + b_{|i-j|}), \quad i \neq j, \quad i = 1,2,\ldots,+\infty, \quad j = 0,1,\ldots,+\infty. \tag{27}$$

5. Исследование усеченной задачи

Для получения численного решения задачи (13)–(15) необходимо понять: можно ли «усекать» бесконечную систему дифференциальных уравнений (25)–(27), то есть искать решение конечной $(N+1)$-мерной системы, принимая $\xi_i(t)$, $i = N+1, N+2,\ldots,+\infty$, равными нулю. Будут ли полученные решения усеченной системы близки к решению бесконечномерной системы по какой-либо метрике?

Назовем N числом усечения. Обозначим решение задачи Коши усеченной задачи, соответствующей системе (25)–(27) через $(N+1)$-мерную вектор-функцию $\xi^N(t) = (\xi_0^N(t),\ldots,\xi_N^N(t))^T$. Усеченная система для (25) представляется в матричном виде

$$\xi_t^N(t) = \widetilde{C}\xi^N(t), \quad \xi_i^N(0) = \varphi_i, \quad i = 0,1,\ldots,N, \tag{28}$$

где $\widetilde{C}$ – стационарная матрица размерности $(N+1)\times(N+1)$ с элементами

$$\widetilde{c}_{00} = b_0, \quad \widetilde{c}_{0j} = \frac{1}{2}\,b_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad \widetilde{c}_{ii} = b_0 + \frac{1}{2}\,b_{2i} - a^2\lambda_i^2, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{29}$$

$$\widetilde{c}_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i+j} + b_{|i-j|}), \quad i \neq j, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq N. \tag{30}$$

Одним из способов решения таких систем является матричный: $\xi^N(t) = \exp(\widetilde{C}t)\xi^N(0)$, где вектор $\xi^N(0) = (\varphi_0, \ldots, \varphi_N)^T$. Вопросы, связанные с разбором получения экспоненты от конечной (в смысле размерности) матрицы, можно найти в [24]. Кроме того, из (28)–(30) следует, что после усечения останутся только коэффициенты Фурье функции $b(x)$ с номерами от 0 до $2N$, то есть, для усеченной задачи достаточно использовать функцию

$$\widetilde{b}_N(x) = \sum_{i=0}^{2N} b_i v_i(x). \tag{31}$$

Для усеченной задачи также достаточно использовать начальную функцию

$$\widetilde{\varphi}_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i v_i(x).$$

6. Исследование оптимизационной задачи

Перейдем к рассмотрению поставленной задачи. Перепишем критерий качества и ограничение на управление через коэффициенты Фурье b_i, $\xi_i(T)$. Таким образом, осуществляется переход от распределенной к сосредоточенной оптимизационой задаче. Условие (6) на управляющую функцию запишется в виде

$$\int_0^l b^2(x)\,dx = \int_0^l \left(\sum_{i=0}^{+\infty} b_i v_i\right)^2 dx = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i^2 \int_0^l v_i^2(x)\,dx = lb_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \le c^2. \tag{32}$$

Так как $\int\limits_0^l z(x,T)\,dx = \xi_0(T)l$, то эквивалентный (8) критерий качества в новой записи с учетом Теоремы 2 примет вид:

$$J_0(b(x)) = l^{-2}\xi_0^{-2}(T)\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{ij}\xi_i(T)\xi_j(T), \tag{33}$$

где $\alpha_{ij} = \int\limits_A v_i(x)v_j(x)\,dx$, $i = 0, 1, \ldots, +\infty$, $j = 0, 1, \ldots, +\infty$. Критерий (33) зависит только от управляющей функции $b(x)$ в силу равенства (10).

Перейдем к рассмотрению усеченной задачи. Отождествим с решением усеченной задачи (28) функцию

$$z_N(x,t) = \sum_{i=0}^{N} \xi_i^N(t) v_i(x).$$

Заметим, что, вообще говоря, $z_N(x,t) \ne z(x,t,\widetilde{b}_N)$ при $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}_N(x)$!

Для усеченной задачи условие (32) и критерий (33) примут вид

$$lb_0^2 + \sum_{i=1}^{2N} \frac{l}{2} b_i^2 \le c^2, \tag{34}$$

$$J_N(\widetilde{b}_N(x)) = l^{-2}(\xi_0^N(T))^{-2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}\xi_i^N(T)\xi_j^N(T). \tag{35}$$

Очевидно, критерии (33) и (35) неэквивалентны. Фактически (35) эквивалентен

$$\widetilde{J}'_N(\widetilde{b}_N(x)) = l^{-2}(\xi_0^N(T))^{-2}\int\limits_A z_N^2(x,T)\,dx. \tag{36}$$

Для дальнейшего численного решения оптимизационной задачи докажем следующие утверждения.

Теорема 4. *Для любого $\varepsilon_2 > 0$ при достаточно больших N выполняется $|J_0(b(x)) - J_N(\widetilde{b}_N(x))| < \varepsilon_2$, где $\widetilde{b}_N(x)$ задается формулой (31).*

Доказательство. Поскольку из равенства Парсеваля следует, что $\widetilde{b}_N(x) \to \to b(x)$ при $N \to +\infty$ по квадратичной норме, для любого достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ по теореме 3 для достаточно больших N верно $\|z(x,T) - z_N(x,T)\|_2 < \varepsilon_1$. Кроме того, последнее неравенство эквивалентно

$$l(\xi_0^N(T) - \xi_0(T))^2 + \sum_{i=1}^{N}\frac{l}{2}(\xi_i^N(T) - \xi_i(T))^2 + \sum_{i=N+1}^{+\infty}\frac{l}{2}\xi_i^2(T) < \varepsilon_1^2. \tag{37}$$

Из (37) следует, что $|\xi_0^N(T) - \xi_0(T)| < \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{l}} = \varepsilon_4$, а также $\xi_i^N(T) \to \xi_i(T)$, $i = = 0, 1, \ldots, N$, при $N \to +\infty$.

Примем, что ε_1 – положительная константа такая, что $0 < \varepsilon_4 < \min\left\{1, \dfrac{1}{2}\xi_0(T)\right\}$.

По лемме 4: $0 < \int\limits_0^l z(x,T)\,dx = \xi_0(T)l$, а значит, $\xi_0(T) > 0$ и, соответственно, $\xi_0^N(T) > 0$.

Учитывая это и используя представления критерия качества в виде различных выражений (8) и (33), (35) и (36), имеем

$$\begin{aligned}
&|J_0(b(x)) - J_N(\widetilde{b}_N(x))| = |J(b(x)) - \widetilde{J}'_N(\widetilde{b}_N(x))| = \\
&= l^{-2}\left|(\xi_0(T))^{-2}\int\limits_A z^2(x,T)\,dx - (\xi_0^N(T))^{-2}\int\limits_A z_N^2(x,T)\,dx\right| = \\
&= l^{-2}\left|(\xi_0(T))^{-2} - (\xi_0^N(T))^{-2}\right|\int\limits_A z_N^2(x,T)\,dx + (l\xi_0(T))^{-2}\left|\int\limits_A z^2(x,T)\,dx - \int\limits_A z_N^2(x,T)\,dx\right| \le \\
&\le \frac{|\xi_0^N(T) - \xi_0(T)||\xi_0^N(T) + \xi_0(T)|}{l^2(\xi_0^N(T)\xi_0(T))^2}\int\limits_A z_N^2(x,T)\,dx + \\
&+ B_6\left|\int\limits_A (z(x,T) - z_N(x,T))(z(x,T) + z_N(x,T))\,dx\right|.
\end{aligned} \tag{38}$$

Мажорируем первое слагаемое в выражении(38):

$$\begin{aligned}
&\frac{|\xi_0^N(T) - \xi_0(T)||\xi_0^N(T) + \xi_0(T)|}{l^2(\xi_0^N(T)\xi_0(T))^2}\int\limits_A z_N^2(x,T)\,dx \le \varepsilon_4\frac{2\xi_0(T) + \varepsilon_4}{l^2\frac{1}{4}\xi_0^4(T)}\|z_N^2(x,T)\|_2^2 \le \\
&\le \varepsilon_4\frac{8\xi_0(T) + 4\varepsilon_4}{l^2\xi_0^4(T)}(\|z(x,T)\|_2 + \varepsilon_1)^2 \le \varepsilon_4\frac{8\xi_0(T) + 4}{l^2\xi_0^4(T)}(\|z(x,T)\|_2 + \sqrt{l})^2 = \varepsilon_4 B_7.
\end{aligned}$$

Оценим далее все выражение (38)

$$\varepsilon_4 B_7 + B_6\left|\int\limits_A (z(x,T)-z_N(x,T))(z(x,T)+z_N(x,T))\,dx\right| \le$$

$$\le \varepsilon_4 B_7 + B_6\sqrt{\int\limits_A (z(x,T)-z_N(x,T))^2\,dx}\sqrt{\int\limits_A ((z(x,T)+z_N(x,T))^2\,dx} \le$$

$$\le \varepsilon_4 B_7 + B_6\|z(x,T)-z_N(x,T)\|_2\cdot\|2z(x,T)+(z_N(x,T)-z(x,T))\|_2 \le$$

$$\le \varepsilon_3(B_7+2B_6\|z(x,T)\|_2)+B_6\varepsilon_1^2 \le \varepsilon_3 B_8 = \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_3 = \max\{\varepsilon_1,\varepsilon_4\}$, а B_i, $i = 6,7,8$, – некоторые положительные константы, зависящие только от функций $b(x)$ и $z(x,T,b)$, констант T, l и a. □

Теорема 5. *Для любого $\varepsilon_5 > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при достаточно больших N, если $\|\widetilde{\beta}_N(x)-\widetilde{b}_N(x)\|_2 < \varepsilon/3$, то верно $|J_N(\widetilde{\beta}_N(x))-J_N(\widetilde{b}_N(x))| < \varepsilon_5$.*

Доказательство. Из свойств нормы и равенства Парсеваля следует, что для достаточно большого N выполняются неравенства $\|b(x)-\widetilde{b}_N(x)\|_2 < \varepsilon/3$, $\|\beta(x)-\widetilde{\beta}_N(x)\|_2 < \varepsilon/3$, тогда

$$\|b(x)-\beta(x)\|_2 \le \|b(x)-\widetilde{b}_N(x)\|_2 + \|\widetilde{b}_N(x)-\widetilde{\beta}_N(x)\|_2 + \|\widetilde{\beta}_N(x)-\beta(x)\|_2 < \varepsilon. \quad (39)$$

По свойству нормы и теореме 4

$$|J_N(\widetilde{\beta}_N(x))-J_N(\widetilde{b}_N(x))| \le |J_N(\widetilde{\beta}_N(x))-J_0(\beta(x)|+|J_0(\beta(x))-J_0(b(x))|+$$
$$+|J_0(b(x))-J_N(\widetilde{b}_N(x))| < 2\varepsilon_2 + |J_0(\beta(x))-J_0(b(x))|. \quad (40)$$

Вследствие (39) из теоремы 3 можно следует $\|z(x,T,b)-z(x,T,\beta)\|_2 < \varepsilon_1$, следовательно, аналогично доказательству теоремы 4 имеем $0 < |\xi_0^\beta(T)-\xi_0^b(T)| < \varepsilon_4$, где $\xi_0^\beta(T)$, $\xi_0^b(T)$ – нулевые коэффициенты Фурье функций $z(x,T,\beta)$ и $z(x,T,b)$ соответственно. Возьмем ε_1 такое, что $\xi_0^\beta(T) > \dfrac{1}{2}\xi_0^b(T) > 0$ (напомним, что $\varepsilon_4 = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{l}}$), тогда

$$|J_0(\beta(x))-J_0(b(x))| = \left|\frac{1}{(l\xi_0^\beta(T))^2}\int\limits_A z^2(x,T,\beta)\,dx - \frac{1}{(l\xi_0^b(T))^2}\int\limits_A z^2(x,T,b)\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{(l\xi_0^\beta(T))^2}-\frac{1}{(l\xi_0^b(T))^2}\right|\int\limits_A z^2(x,T,\beta)\,dx + \frac{1}{(l\xi_0^b(T))^2}\left|\int\limits_A (z^2(x,T,\beta)-z^2(x,T,b))\,dx\right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon_4|\xi_0^\beta(T)+\xi_0^b(T)|\cdot\|z(x,T,\beta)\|_2^2}{(\xi_0^\beta(T)\xi_0^b(T))^2} + \frac{1}{(l\xi_0^b(T))^2}\varepsilon_1\cdot\|z(x,T,\beta)+z(x,T,b)\|_2 \le$$

$$\le \varepsilon_4\frac{|\varepsilon_4+2\xi_0^b(T)|\cdot(\|z(x,T,b)\|_2+\varepsilon_1)^2}{(\frac{1}{2}\xi_0^b(T)\xi_0^b(T))^2} + \varepsilon_1\frac{(\varepsilon_1+2\|z(x,T,b)\|_2)}{(l\xi_0^b(T))^2} < \varepsilon_3 B_9,$$

где B_9 – положительная константа, зависит только от функций $b(x)$ и $z(x,T,b)$, констант T, l и a. Из (40) следует

$$|J_N(\widetilde{\beta}_N(x))-J_N(\widetilde{b}_N(x))| < 2\varepsilon_2+\varepsilon_3 B_9 = \varepsilon_5.$$

□

Лемма 5. *Пусть функция* $\rho(x) = b(x) + \rho_0$, *где* ρ_0 *– некоторая константа, тогда верно равенство*

$$J(\rho(x)) = J(b(x)). \tag{41}$$

Доказательство. Из леммы 1 известно, что выполняется равенство $z(x,t,\rho) = \exp(\rho_0 t) z(x,t,b)$, но тогда из теоремы 2 верно равенство $y(x,t,\rho) = y(x,t,b)$, а следовательно, верно и равенство (41). □

Из леммы 5 и условий (32), (34) следует, что для поиска оптимальной управляющей функции разумнее брать $b_0 = 0$.

7. Алгоритм поиска оптимального управления

При поиске оптимального управления возникают следующие трудности. Во-первых, ситуация усложняется тем, что для каждой непрерывной функции $b(x)$ можно, разложив ее в ряд Фурье, получить вектор $(b_0, \ldots, b_i, \ldots)^T$, обратное, вообще говоря, неверно. Однако заметим, если вектор $(b_0, \ldots, b_{2N})^T$ – конечный, то он однозначно определяет непрерывную (и даже непрерывно дифференцируемую сколь угодно раз) функцию $\widetilde{b}_N(x)$, см. (31). Во-вторых, (в том числе и из-за предыдущего утверждения), речь может идти только о поиске точной нижней грани критерия (8), а не о нахождении его минимума.

Иногда для определенности будем у критерия качества аргументом записывать не управляющую функцию $b(x)$, а соответствующий ей вектор с коэффициентами разложения – управляющими параметрами (набор управляющих параметров может быть конечным или бесконечным).

Возьмем достаточно большое N. Полагаем $b_0 = 0$. В $2N$-мерном кубе: $-\sqrt{2l^{-1}}c \leq b_i \leq \sqrt{2l^{-1}}c$, $i = 1, 2, \ldots, 2N$, осуществляется покоординатно последовательный перебор точек – управляющих констант – с неким малым шагом h_i по i-й координате, которые выбираются так, чтобы ряд сходился: $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} h_i^2 = S_h$ (например, $h_i = \dfrac{\delta_0}{i}$, $S_h = \dfrac{\pi^2}{6}\delta_0^2$, здесь $\delta_0 < \dfrac{4\varepsilon}{\pi\sqrt{3l}}$, где ε – достаточно малая положительная константа из теоремы 5, мажорирующая константа для δ_0 будет объяснена ниже). По каждой точке перебора, удовлетворяющей условию (34), строится вектор управления $(b_0, \ldots, b_{2N})^T$ и решается усеченная задача (28). По полученному $(N+1)$-мерному вектору решений $(\xi_0^N(T), \ldots, \xi_N^N(T))^T$ вычисляется $J_N(b_0, \ldots, b_{2N})$, значение которого проверяется на минимум критерия (35). Далее перебор продолжается. В процессе перебора находятся оптимальные управляющие параметры вектора $\overline{b}_N^* = (b_0^*, \ldots, b_{2N}^*)^T$, $b_0^* = 0$, и минимальное значение $J_N^*(\overline{b}_N^*)$. Далее рассматриваем в качестве «числа усечения» число $N+1$. Получим оптимальные параметры $\overline{b}_{N+1}^*$ и оптимальное значение $J_{N+1}^*(\overline{b}_{N+1}^*)$.

Одним из вариантов останова алгоритма является условие

$$0 < J_N^*(\overline{b}_N^*) - J_{N+1}^*(\overline{b}_{N+1}^*) < 0.5\varepsilon_6, \tag{42}$$

где ε_6 – некоторая допустимая погрешность. Если неравенство (42) не выполняется, то берется другая, бóльшая пара последовательных чисел. И так далее, пока условие (42) не выполнится. Нетрудно видеть при этом, что предложенный останов алгоритма обязательно сработает. Последовательность $\{\overline{b}_N^*\}$ является минимизирующей. Для достаточно больших N значение критерия $J_N^*(\overline{b}_N^*)$ может быть сколь угодно близко к оптимальному значению исходной оптимизационной задачи.

Докажем это. Пусть $C(b)$ – множество непрерывных функций $b(x)$, удовлетворяющих условиям (6), (12) и $b_0 = 0$. Обозначим $J_{00} = \inf\limits_{b\in C(b)} J_0(b(x))$. Тогда для любого достаточно малого ε_2 существует функция $b(x) \in C(b)$ такая, что

$$J_0(b(x)) - J_{00} < \varepsilon_2. \tag{43}$$

Из теоремы 4 следует, что для любого ε_2 существует достаточно большие N, для которых верно

$$|J_0(b(x)) - J_N(\widetilde{b}_N(x))| < \varepsilon_2, \tag{44}$$

функция $\widetilde{b}_N(x)$ строится по формуле (31). Сам управляющий вектор $(b_0, \ldots, b_{2N})^T$ мог и «не попасть в перебор», однако за счет выбора δ_0 можно сделать так, чтобы ближайший к нему вектор, задействованный в переборе $\overline{b}_N^{\mathrm{per}} = (0, b_1^{\mathrm{per}}, \ldots, b_{2N}^{\mathrm{per}})^T$ находился бы близко к $(b_0, \ldots, b_{2N})^T$. Для ближайшего вектора перебора верна оценка

$$\left\| \widetilde{b}_N(x) - \sum_{i=1}^{2N} b_i^{\mathrm{per}} v_i(x) \right\|_2 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{2}\frac{\pi^2}{6}\delta_0^2}.$$

Для применения теоремы 5 достаточно выполнения неравенства $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{2}\frac{\pi^2}{6}\delta_0^2} < \frac{\varepsilon}{3}$. Отсюда следует, что при $\delta_0 < \frac{4\varepsilon}{\pi\sqrt{3l}}$ справедливо неравенство $|J_N(\widetilde{b}_N(x)) - J_N(\overline{b}_N^{\mathrm{per}})| < \varepsilon_5$.

Согласно алгоритму нахождения минимума выполняется неравенство $J_N^*(\overline{b}_N^*) \le J_N(\overline{b}_N^{\mathrm{per}})$. Тогда $J_N(\overline{b}_N^*) \le J_N(\widetilde{b}_N(x)) + \varepsilon_5$, вследствие (44) верно $J_N^*(\overline{b}_N^*) \le J_0(b(x)) + \varepsilon_2 + \varepsilon_5$ и далее из (43) следует

$$J_N^*(\overline{b}_N^*) < J_{00} + \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_2 = J_{00} + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_5.$$

В силу произвольности выбора малых постоянных ε_2 и ε_5 выполняется $J_N^*(\overline{b}_N^*) \to J_{00}$ при $N \to +\infty$.

Заключение

Поставлена задача оптимального охлаждения участка стержня для уравнения теплопроводности с фазовым ограничением и критерием качества терминального типа. Подобрано специфическое управление, при котором для температуры стержня поставленное фазовое ограничение выполняется автоматически, при этом изменение температуры в стержне описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением с начальным и краевыми условиями. Оно имеет точное решение благодаря связи его решения с решением линейной начально-краевой задачи. Осуществлен переход сначала к счетной системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье и, далее, к усеченной, конечной системе с постоянными коэффициентами. Доказана сходимость решений вспомогательных задач к решению исходной. Предложен алгоритм численного решения оптимизационной задачи, при его работе находится минимизирующая последовательность управляющих функций. Показано, что для достаточно больших N оптимальные значения критериев вспомогательных усеченных задач будут сколь угодно близки к оптимальному значению исходной оптимизационной задачи.

Литература

1. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. – СПб.: Лань, 2017. – 292 с.

2. *Kuzenkov O.A., Novozhenin A.V.* Optimal control of measure dynamics // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2015. – V. 21, No 1–3. – P. 159–171. – doi: 10.1016/j.cnsns.2014.08.024.
3. *Вайнберг М.М.* Интегро-дифференциальные уравнения // Итоги науки. Сер. Матем. анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962. – М.: ВИНИТИ, 1964. – С. 5–37.
4. *Орлов С.С.* Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравне-ний высоких порядков в банаховых пространствах – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 150 с.
5. *Власов В.В., Медведев Д.А., Раутиан Н.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ // Соврем. проблемы математики и механики. Математика. – 2011. – Т. 8, Вып. 1. – С. 8–306.
6. *Кузенков О.А., Эгамов А.И.* Теорема существования решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений и ее приложения // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Матем. моделирование и оптим. управление. – 1997. – № 1. – С. 47–54.
7. *Кузенков О.А.* Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 24–32.
8. *Egamov A.I.* The existence and uniqueness theorem for initial-boundary value problem of the same class of integro-differential PDEs // Bychkov I., Kalyagin V., Pardalos P., Prokopyev O. (Eds.) Network Algorithms, Data Mining, and Applications. NET 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, V. 315. – Springer, 2020. – P. 173–186. – doi: 10.1007/978-3-030-37157-9_12.
9. *Бураго П.Н., Эгамов А.И.* О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журн. Средневолж. матем. о-ва. – 2019. – Т. 21, № 4. – С. 413–429. – doi: 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429.
10. *Бутковский А.Г.* Управление системами с распределенными параметрами. (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 11. – С. 16–65.
11. *Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М.* Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – 143 с.
12. *Кузенков О.А., Плотников В.И.* Сходимость конечномерных приближений в задаче оптимального управления сильно параболической системой // Конструирование алгоритмов и решениие задач математической физики: Сб. тр. – М.: Изд-во Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1989. – С. 232–234.
13. *Кузенков О.А., Новоженин А.В.* Оптимизация динамики меры. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. – 142 с.
14. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
15. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
16. *Жаутыков О.А.* Счетные системы дифференциальных уравнений и их применения // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 2. – С. 162–170.
17. *Коржавина М.С., Сумин В.И.* О первой начально-краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемыми старшими коэффициентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа». – Воронеж, 2019. – С. 156–160.
18. *Новоженов М.М., Сумин М.И.* Оптимальное управление полулинейным параболическим уравнением с поточечным фазовым ограничением // Вестн. Нижегор. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Матем. моделирование и оптим. управление. – 2001. – № 2. – С. 261–269.

19. *Тагиев Р.К.* Задача оптимального управления для квазилинейного параболического уравнения с управлениями в коэффициентах и с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 380–392. – doi: 10.1134/S0374064113030138.

20. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

21. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.

22. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 620 с.

23. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы Математического анализа. Ч. 2. – М.: Физматлит, 2002. – 464 с.

24. *Moler C., Van Loan Ch.* Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later // SIAM Rev. – 2003. – V. 45, No 1. – P. 3–49. – doi: 10.1137/S00361445024180.

Поступила в редакцию
27.11.2019

Эгамов Альберт Исмаилович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *albert810@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 2, pp. 193–210

doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.193-210

Construction of a Minimizing Sequence for the Problem of Cooling of the Given Segments of the Rod with Phase Constraint

A.I. Egamov

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, 603950 Russia
E-mail: *albert810@yandex.ru*

Received November 27, 2019

Abstract

For the process of controlling the temperature of a thin rod, an optimization problem of cooling its given segments was set. The cooling control was selected so that the phase restriction occurs throughout the exposure. As a result, the heat equation with the control action was transformed into a nonlinear integro-differential equation. The relation between the obtained nonlinear initial-boundary value problem and the standard linear problem of the heat equation, which is solved by the Fourier method, was shown. All this makes it possible to move from the initial distributed problem to the concentrated optimization problem with respect to the Fourier coefficients of the solution of the linear problem. The possibility of its reduction to a finite shortened system was demonstrated for the resulting countable system of differential equations. The algorithm for searching the control coefficients of a shortened problem was given in order to find the optimal control parameters and the optimal value of the quality criterion for shortened problems. It was proved that a minimizing sequence of control parameters was obtained for the initial optimization problem.

Keywords: second initial-boundary value problem, integro-differential equation, counting system of differential equations, shortened system, minimizing sequence

References

1. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. *Vvedenie v teoriyu upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* [Introduction to the Control Theory of Systems with Distributed Parameters]. St. Petersburg, Lan', 2017. 292 p. (In Russian)

2. Kuzenkov O.A., Novozhenin A.V. Optimal control of measure dynamics. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2015, vol. 21, nos. 1–3, pp. 159–171. doi: 10.1016/j.cnsns.2014.08.024.

3. Weinberg M.M. Integro-differential equations. In: *Itogi nauki. Ser. Matematicheskii analiz. Teoriya veroyatnostei. Regulirovanie. 1962* ["Integro-Differential Equations", Results of Science. Series of Mathematical Analysis. Probability Theory. Regulation. 1962]. Moscow, VINITI, 1964, pp. 5–37. (In Russian)

4. Orlov S.S. *Obobshchennye resheniya integro-differentsial'nykh uravnenii poryadkov v banakhovykh prostranstvakh* [Generalized Solutions of High-Order Integro-Differential Equations in Banach Spaces]. Irkutsk, Izd. IGU, 2014. 150 p. (In Russian)

5. Vlasov V.V., Medvedev D.A., Rautian N.A. Functional differential equations in Sobolev spaces and their spectral analysis. *Sovrem. Probl. Mat. Mekh. Mat.*, 2011, vol. 8, no. 1, pp. 8–306. (In Russian)

6. Kuzenkov O.A., Egamov A.I. A theorem for the existence of one class of integro-differential equations and its applications. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N.I. Lobachesvkogo. Ser. Mat. Model. Optim. Upr.*, 1997, no. 1, pp. 47–54. (In Russian)

7. Kuzenkov O.A. The Cauchy problem for a class of nonlinear differential equations in a Banach space. *Differ. Equations*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 23–32. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000028710.25531.0d.

8. Egamov A.I. The existence and uniqueness theorem for initial-boundary value problem of the same class of integro-differential PDEs. In: Bychkov I., Kalyagin V., Pardalos P., Prokopyev O. (Eds.) *Network Algorithms, Data Mining, and Applications. NET 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.* Springer, 2020, vol. 315, pp. 173–186. doi: 10.1007/978-3-030-37157-9_12.

9. Burago P.N., Egamov A.I. On the connection between solutions of initial-boundary value problems for a class of integro-differential PDE and a linear hyperbolic equation. *Zh. Srednevolzh. Mat. O-va.*, 2019, vol. 21, no. 4, pp. 413–429. doi: 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429.

10. Butkovskiy A.G. Control of distributed systems (survey). *Avtom. Telemekh.*, 1979, no. 11, pp. 16–65. (In Russian)

11. Vasil'ev F.P., Ishmukhametov A.Z., Potapov M.M. *Obobshchennyi metod momentov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Generalized Method of Moments in Optimal Control Problems]. Moscow, Izd. MGU, 1968. 143 p. (In Russian)

12. Kuzenkov O.A., Plotnikov V.I. Convergence of finite-dimensional approximations in the optimal control problem for a strongly parabolic system. In: *Konstruirovanie algoritmov i reshenie zadach matematicheskoi fiziki* [Design of Algorithms and Solution of Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Izd. Inst. Prikl. Mat. Akad. Nauk SSSR, 1989, pp. 232–234. (In Russian)
13. Kuzenkov O.A., Novozhenin A.V. *Optimizatsiya dinamiki mery* [Optimization of Measure Dynamics]. Nizhny Novgorod, Izd. NNGU, 2013. 142 p. (In Russian)
14. Weinberg M.M. *Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineinykh uravnenii* [The Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Non-Linear Equations]. Moscow, Nauka, 1986. 416 p. (In Russian)
15. Grebenikov E.A. *Metod usredneniya v prikladnykh zadachakh* [Method of Averaging in Applied Problems]. Moscow, Nauka, 1986. 256 p. (In Russian)
16. Zhautykov O.A. Infinite systems of differential equations and their applications. *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 2, pp. 162–170. (In Russian)
17. Korzhavina M.S., Sumin V.I. On the first initial-boundary value problem for a semilinear parabolic equation with controlled higher coefficients. *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy: Materialy Mezhdunar. konf. "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola"* [Current Methods of the Theory of Function and Related Problems: Proc. Int. Conf. "Winter School on Mathematics in Voronezh"]. Voronezh, 2019, pp. 156–160. (In Russian)
18. Novozhenov M.M., Sumin M.I. Optimal control of semilinear parabolic equation with pointwise state constraint. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N.I. Lobachevskogo. Ser. Mat. Model. Optim. Upr.*, 2001, no. 2, pp. 261–269. (In Russian)
19. Tagiev R.K. Optimal control problem for a quasilinear parabolic equation with controls in the coefficients and with state constraints. *Differ. Equations*, vol. 49, no. 3, pp. 369–381. doi: 10.1134/S0012266113030129.
20. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 400 p. (In Russian)
21. Friedman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type]. Moscow, Mir, 1968. 428 p. (In Russian)
22. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii* [Computation Methods]. Vol. 2. Moscow, GIFML, 1959. 620 p. (In Russian)
23. Il'in V.A., Poznyak E.G. *Osnovy matematicheskogo analiza* [Foundations of Mathematical Analysis]. Pt. 2. Moscow, Fizmatlit, 2002. 464 p. (In Russian)
24. Moler C., Van Loan Ch. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Rev.*, 2003, vol. 45, no. 1, pp. 3–49. doi: 10.1137/S00361445024180.

Для цитирования: *Эгамов А.И.* Построение минимизирующей последовательности для задачи охлаждения заданных участков стержня с фазовым ограничением // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 2. – С. 193–210. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.193-210.

For citation: Egamov A.I. Construction of a minimizing sequence for the problem of cooling of the given segments of the rod with phase constraint. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 193–210. doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.193-210. (In Russian)