Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100 - математика
Направление:уравнения в частных производных

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

"Преобразование Карлемана-Фурье и его приложение"

Работа завершена:
«___»_____2014 г. _____(С.И.Салимшина)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
канд.физ.-мат. наук,доцент
«___»_____2014 г. _____(Л.Г.Салехов)

Заведующий кафедрой
Научный руководитель
док.физ.-мат. наук,профессор
«___»_____2014 г. _____(Ю.В.Обносов)

Казань-2014 г.

Содержание

1. Введение

2

2. Постановка темы.

3

3. Теоретические сведения

4

4. Метод преобразования Карлемана-Фурье в исследовании обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами в сверточной алгебре $\int'_+$.

7

5.Пример применения преобразования Карлемана-Фурье к решению обыкновенных дифференциальных уравнений в $\int'_+$.

12

6.Метод преобразования Карлемана-Фурье в обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях порядка m.

14

7. Список использованной литературы

18

Введение.

Многие задачи классической математической физики сводятся к краевым задачам для дифференциальных (интегро-дифференциальных) уравнений- уравнений математической физики.Основными математическими средствами исследования этих задач служат теория дифференциальных уравнений (включая родственные области: интегральные уравнения и вариационное исчисление),теория функций,функциональный анализ, теория вероятностей,приближенные методы и вычислительная математика.

Изучение математических моделей квантовой физики потребовало привлечение новых областей математики,таких как теории обобщенных функций,теории функций комплексных переменных, топологических и алгебраических методов.

С появлением ЭВМ существенно расширился класс математических моделей,допускающих детальный анализ;появилась реальная возможность ставить вычислительные эксперименты.В этом интенсивном взаимодействии теоретической физики и современной математики создаются качественные новые классы моделей современной математической физики.

Среди задач математической физики выделяется важный класс корректно поставленных задач,т.е. задач,для которых решение существует,единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

Точное определение обобщенного решения опирается на понятие обобщенной производной и вообще,обобщенной функции.Аппарат теории обобщенных функций служит удобным средством для исследования линейных краевых задач математической физики в обобщенной и классической постановках.

Обобщенные функции впервые в науку были введены П.Дираком в его квантомеханических исследованиях,в которых систематически использовалась знаменитая δ-функция.Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л.Соболевым и Л.Шварцем.В дальнейшем теория обобщенных функций интенсивно развивалась многими математиками.В настоящее время теория обобщенных функций далеко продвинута вперед,имеет многочисленные применения в физике и математике и прочно вошла в обиход математика,физика и инженера.

Как правило,решения в классических постановках задач подразделяются гладкими и удовлетворяющему уравнению в любых точках задания уравнения точек решения,т.о. предполагают непрерывность,направленность правой части уравнения в его области значения.Однако,в наиболее интересных практических задачах правая часть имеет довольно сильные особенности (характеризует интенсивность внешних воздействий).Поэтому для этих задач классическая постановка оказывается недостаточной.Чтобы поставить такие задачи,требуется отказаться от гладкости решения и вводить так называемое обобщенное решение.

Дальнейшее изучение только помогает обогатить теорию обобщенных решений методам комплексного решения.Но иногда на практике использование некоторых методов является проблематичным (например,техника построения сходящихся рядов посредством вычитания функции,развитая математиком Миттаг-Леффлера),поэтому приходится использовать промежуточные пространства для более удобного расчета поставленной задачи,о которых и будет идти речь в данной работе.

Постановка темы.

1.Рассмотреть применение преобразования Карлемана-Фурье в исследовании обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в сверточной алгебре $\int'_+$.

2. Привести примеры.

3. Сделать обобщение на уравнения для $n^{го}$ порядка.

Некоторые теоретические сведения.

Определения

1) $\int$ - пространство функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, бесконечно дифференцируемых в классическом смысле всюду на $\mathbb{R}^n$ и быстро убывающих на бесконечности.

2) $\int'$ - пространство обобщенных функций медленного роста

3) $\int'_+$ - пространство обобщенных функций медленного роста с носителем в $\mathbb{R}_+$.

4) Обобщенная функция - линейный непрерывный функционал

5) $\mathcal{D}(\Omega)$ -пространство функций, бесконечно дифференцируемых и финидных в Ω.

6) $\mathcal{D}'(\Omega)$ -пространство обобщенных функций, бесконечно дифференцируемых и финидных в Ω.

7) $\mathcal{D}'_+(\Omega)$ -сверточная алгебра обобщенных функций, бесконечно дифференцируемых и финидных в Ω, носители которых лежат в $\mathbb{R}_+$.

8)$T \in \mathcal{D}'(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$. **частная производная мультииндекса** α от T : $D^\alpha T$ определяется по формуле:

$$< D^\alpha T, \varphi >:= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \qquad \forall \alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$$

9)**Функция Хевисайда** $Y(t)$:

$$Y(t) := \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Свойства:

1)$\frac{dY}{dt} = \delta$

$\mathcal{F}(Y) = \delta_+$

10)**Мера Дирака** δ-обобщенная функция порядка не выше нуля,мера Радона:

$$< \delta, \varphi >:= \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in \int(\mathbb{R})$$

$$\delta_- - \delta_+ = \delta$$

Формула Сохоцкого-Боголюбова-Гейзенберга:

$$\begin{cases} \delta_+ = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2\pi i} V.p.\frac{1}{t} \\ \delta_- = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i} V.p.\frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\delta_+ * \delta_- = 0 u \delta_\pm^{*2} = \delta_\pm$$

Обобщенные функции $\delta_+ u \delta_-$ обладают следующими свойствами:

1)$\delta_\pm^* = \delta_\pm$;

2)$\delta_+ * \delta_- = 0$;

3)$\delta_+ + \delta_- = \delta$

11)**Главное значение по Коши:**

$$V.p.\frac{1}{t} = \pi i(\delta_- - \delta_+)$$

$$< V.p.\frac{1}{t}, \varphi >:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Через $x\xi = \xi x := \sum_{k=1}^{n} x_k\xi_k, где x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать скалярное произведение 2х векторов. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Положим:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi ix\xi}dx, \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{F}$ называется преобразованием Фурье.

Тогда ***копреобразование Фурье*** $\overline{\mathcal{F}}$ определяется по формуле:

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx, \qquad \forall\xi \in \mathbb{R}$$

Пусть $f(t)$ -функция медленного роста,определенная на оси $\mathbb{R}$,т.е. непрерывная функция, растущая на бесконечности не быстрее полинома. Тогда существует ***преобразование Карлемана-Фурье*** от этой функции:

$$\mathcal{KF}(f)(z) := \begin{cases} \int_0^\infty e^{2\pi i\xi z}f(\xi)d\xi, & Imz > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{2\pi i\xi z}f(\xi)d\xi, & Imz < 0 \end{cases}$$

Очевидно, преобразование Карлемана-Фурье от f есть ***аналитическое представление для образа Фурье*** функции f, т.е.

$$\mathcal{KF}(f)(z) = (\widehat{\mathcal{F}f})(z), \qquad Imz \neq 0$$

где

$$(\widehat{\mathcal{F}f})(z) :=< \mathcal{F}f, \frac{1}{2\pi i(t-z)} >, \qquad Imz \neq 0$$

Обратное преобразование Карлемана-Фурье определяется по формуле:

$$\mathcal{KF}^{-1}(f)(z) := \begin{cases} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i\xi z}f(\xi)d\xi, & Imz > 0 \\ -\int_0^\infty e^{2\pi i\xi z}f(\xi)d\xi, & Imz < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{KF}^{-1}(f)(z) = (\widehat{\overline{\mathcal{F}}f})(z),$$

где $\overline{\mathcal{F}}$ - копреобразование Фурье от f.

Пусть теперь $T \in \int'$, известно, что T представима в следующем виде:

$$T = \frac{d^m}{dt^m}f(t),$$

где $m \in \mathbb{N}$, а f - функция медленного роста. ***Преобразование Карлемана-Фурье от обобщенной функции T*** медленного роста определяется по формуле:

$$\mathcal{KF}(T)(z) := (-2\pi iz)^m\mathcal{KF}(f)(z), \qquad Imz \neq 0$$

$\frac{d^m}{dt^m}$- производная конечного порядка в смысле обобщенных функций. Очевидно, $\mathcal{KF}(T)(z)$ есть аналитическое представление для преобразования Фурье обобщенной функции T, т.е. имеет место равенство:

$$\mathcal{F}(T) = \mathcal{KF}^+(T) - \mathcal{KF}^-(T)$$

Которое понимается в смысле обобщенной функции, т.е.:

$$< \mathcal{F}(T), \varphi >= \lim_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}} \{\mathcal{KF}^+(T)(t+i\varepsilon) - \mathcal{KF}^-(T)(t-i\varepsilon)\}\varphi(t)dt \qquad \forall\varphi \in \int$$

Свойства преобразования Фурье.

Если преобразование Фурье основано на формуле:

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t\xi}\varphi(t)dt, \qquad \forall\varphi \in \int(\mathbb{R}^n), \forall n \in \mathbb{N}$$

1)$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{X}}) = \delta_a, \qquad \forall a \in \mathbb{R}_n$
2)$\mathcal{F}(\delta_a) = \mathcal{X}, \qquad \mathcal{X} = e^{2\pi i a x}$
3)$\mathcal{F}[(2\pi i x)^\alpha] = D^\alpha\delta, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{N}^n$
4)$\mathcal{F}(D^\alpha\delta) = (-2\pi i\xi)^\alpha$
5)$\mathcal{F}(V.p.\frac{1}{x})(\xi) = -\pi i Sgn\xi$
6)$\mathcal{F}(Sgnx)(\xi) = \frac{1}{\pi i}V.p.\frac{1}{\xi}$

$$Y(t) := \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{KF}(Y)(z) := \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{2\pi i t z}Y(t)dt, Imz > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{2\pi i t z}Y(t)dt, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{2\pi i t z}dt, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i z}, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases}$$

Отсюда,

$$\mathcal{F}(Y)(x) = \mathcal{KF}(Y)^+(x) - \mathcal{KF}(Y)^-(x) = \delta_+(x)$$

Формула Пуанкаре-Бертрана:

$$\frac{1}{\pi i}V.p.\frac{1}{t} * \frac{1}{\pi i}V.p.\frac{1}{t} = (\frac{1}{\pi i}V.p.\frac{1}{t})^{*2} = \delta$$

Метод преобразования Карлемана-Фурье в исследовании обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с постоянными коэффициентами в сверточной алгебре $\int'_+$.

Рассмотрим уравнение:

$$L(U) \equiv \frac{d^2U}{dt^2} + p\frac{dU}{dt} + qU = W, \qquad W \in \int'_+, p, q - const. \tag{1}$$

Пусть E- элементарное решение оператора уравнения, т.е. E есть обобщенная функция из $\int'_+$, являющаяся решением уравнения в $\int'_+$.

$$LE = \frac{d^2E}{dt^2} + p\frac{dE}{dt} + qE = \delta, \qquad \delta \in \int'_+ \tag{2}$$

Применяем преобразование Карлемана-Фурье к уравнению (2).Учитывая, что $\delta \in \int'_+$,имеем:

$$\mathcal{KF}(\delta)^+(z) = \mathcal{KF}(\frac{d}{dt}Y(t))^+(z) = (-2\pi iz)\mathcal{KF}(Y)^+(z) =$$

$$= (-2\pi iz)\int_0^\infty e^{2\pi itz}dt = (-2\pi iz)\{-\frac{1}{2\pi iz}\} = 1, \qquad Imz > 0$$

Тогда образ уравнения (2) при преобразовании Карлемана-Фурье будет:

$$\{(-2\pi iz)^2 + p(-2\pi iz) + q\}\mathcal{KF}(E)^+(z) = 1, \qquad Imz > 0$$

или

$$\{-4\pi^2z^2 - 2\pi ipz + q\}\mathcal{KF}(E)^+(z) = -\frac{1}{4\pi^2}, \qquad Imz > 0 \tag{3}$$

Найдем нули полинома $P(z) = z^2 + \frac{dp}{2\pi}z$

$$z_{1,2} = \frac{-i\pi}{4\pi} \pm \sqrt{-\frac{p^2}{16\pi^2} + \frac{q}{4\pi^2}} = \frac{-ip \pm \sqrt{4q - p^2}}{4\pi}$$

$$z_1 = \frac{-i\pi}{4\pi} + w,$$

$$z_2 = \frac{-i\pi}{4\pi} - w$$

[I].Случай $4q - p^2 > 0$,тогда

$$z_{1,2} = \frac{-i\pi}{4\pi} \pm w,$$

где $w = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{4\pi} \in \mathbb{R}$

a) Пусть $p > 0$,тогда z_1 и $z_2 \in \{Imz < 0\}$ и уравнение (3) в $Imz > 0$ имеет решение:

$$\mathcal{KF}(E)^+(z) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}, \qquad Imz > 0 \tag{4}$$

Откуда:

$$\mathcal{F}(E)(\xi) = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \mathcal{KF}(E)^+(\xi + i\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Тогда:

$$E(x) = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(E)](x) = \int_{\mathbb{R}} \{-\frac{e^{-2\pi i\xi x}}{4\pi^2(\xi - z_1)(\xi - z_2)}\}d\xi$$

Вычислим интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)} = 2\pi i \begin{cases} -[res_{\xi=z_1} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\xi-z_1)(\xi-z_2)} + res_{\xi=z_2} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\xi-z_1)(\xi-z_2)}], & x > 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases} =$$

$$= -2\pi i Y(x) \frac{1}{z_1 - z_2} \{e^{-2\pi i z_1 x} - e^{-2\pi i z_2 x}\} = -2\pi i Y(x) \frac{1}{2w} \{e^{-2\pi i x(-\frac{ip}{4\pi} + w)} - e^{-2\pi i x(-\frac{ip}{4\pi} - w)}\} =$$

$$= -2\pi i Y(x) \frac{1}{2w} e^{-\frac{p}{2}x} \{e^{-2\pi i w x} - e^{2\pi i w x}\} = \frac{2\pi}{w} Y(x) \frac{e^{-\frac{p}{2}x}}{2i} \{e^{-2\pi i w x} - e^{2\pi i w x}\} =$$

$$= -\frac{2\pi}{w} Y(x) e^{-\frac{p}{2}x} \sin 2\pi w x$$

Тогда:

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \{-\frac{2\pi}{w} Y(x) e^{-\frac{p}{2}x} \sin 2\pi w x\}$$

или

$$E(x) = Y(x) e^{-\frac{p}{2}x} \frac{\sin 2\pi w x}{2\pi w} \in \int_+' \tag{5}$$

Т.к $E(x) \in \int_+'$,то$\forall W \in \int_+'$ $\exists!$ решение уравнения (1) в $\int_+'$, которое имеет вид:

$$U(x) = E(x) * W = Y(x) e^{-\frac{p}{2}x} \frac{\sin 2\pi w x}{2\pi w} * W \tag{6}$$

Поскольку решение $U(x) \in \int_+' \subset \int$, то можно найти аналитическое представление для U по формуле:

$$\widehat{U}(z) = \mathcal{KF}\overline{\mathcal{F}}U(z), \qquad Imz \neq 0 \tag{7}$$

которое будет решением краевой задачи о скачке:

$$L(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) = \frac{d^2}{dt^2}(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) + p\frac{d}{dt}(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) + q(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) = W \tag{8}$$

где $\widehat{U}^{\pm}$- граничные значения (в смысле обобщенной функции из $\int'$) кусочно-голоморфной функции $\widehat{U}(z)$

Далее образ Фурье уравнения (1) есть также краевая задача отыскания аналитической в $Imz > 0$ функции $\mathcal{KF}(U)^+(z)$ по граничному условию

$$(x^2 + \frac{pi}{2\pi}x - \frac{q}{4\pi^2})\mathcal{F}(U)^+(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}(W)^+(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Решение этой задачи дает формула:

$$\mathcal{KF}(U)^+(z) = -\frac{\mathcal{KF}(W)^+(z)}{4\pi^2(z - z_1)(z - z_2)}, \qquad Imz > 0$$

При $p < 0$ $E\overline{\in}\int_+'$

b)Пусть $p = 0$,тогда $q > 0$,а $z_1 = \frac{\sqrt{q}}{2\pi}$ и$z_2 = -\frac{\sqrt{q}}{2\pi} \in \mathbb{R}$, тогда:

$$\mathcal{KF}(E)^+(z) = -\frac{1}{4\pi^2}\{\frac{1}{z - z_1}\frac{1}{z_1 - z_2} - \frac{1}{z - z_2}\frac{1}{z_1 - z_2}\} = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{z_1 - z_2}\{\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{q}}\{\frac{1}{z - \frac{\sqrt{q}}{2\pi}} - \frac{1}{z + \frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\} \qquad Imz > 0$$

Тогда $\forall\varphi \in \int$:

$$\mathcal{F}(E)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{4\pi\sqrt{q}}\{\frac{1}{x+i\varepsilon-\frac{\sqrt{q}}{2q}} - \frac{1}{x+i\varepsilon+\frac{\sqrt{q}}{2q}}\}\varphi(x)dx =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{q}}\{2\pi i\tau_{-\frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\delta_+(x) - 2\pi i\tau_{\frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\delta_+(x)\} =$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{q}}\{\tau_{-\frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\delta_+(x) - \tau_{\frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\delta_+(x)\}$$

Итак,

$$\mathcal{F}(E)(x) = \frac{1}{2i\sqrt{q}}\{\tau_{-\frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\delta_+(x) - \tau_{\frac{\sqrt{q}}{2\pi}}\delta_+(x)\}$$

Откуда

$$E(x) = \frac{1}{2i\sqrt{q}}\{e^{i\sqrt{q}x} - e^{-i\sqrt{q}x}\}Y(x) = Y(x)\frac{\sin\sqrt{q}x}{\sqrt{q}}$$

Т.к.$E(x) \in \int'_+$,то в $\int'_+ \exists!$решение $\forall W \in \int'_+$,которое имеет вид:

$$U = E(x) * W = Y(x)\frac{\sin\sqrt{q}x}{\sqrt{q}}$$

Т.к.$U \in \int'_+ \subset \int'$,то $\exists$ аналитическое преобразование $\widehat{U}(z)$для U ,определяемое по формуле (7),которое будет решением задачи о скачке: $L(\widehat{U}^+ - \widehat{U}^-) = W$,где p=0, а $\widehat{U}^\pm$ -граничные значения для $\widehat{U}(z)$.

А краевая задача для $\mathcal{KF}(U)^+(z)$:

$$(x^2 - \frac{q}{4\widehat{U}^2})\mathcal{F}(U)^+ = -\frac{1}{4\widehat{U}^2}\mathcal{F}(W)^+$$

Имеет решение:

$$\mathcal{KF}(U)^+(z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{q}}\{\frac{1}{z-\frac{\sqrt{q}}{2i}} - \frac{1}{z+\frac{\sqrt{q}}{2i}}\}, \qquad Imz > 0$$

[II].Случай $4q - p^2 < 0$, тогда

$$z_{1,2} = \frac{-ip}{4\pi} \pm iw_1,$$

где

$$w_1 = \frac{\sqrt{p^2-4q}}{4\pi} > 0$$

a) Пусть $p > 0$,тогда $z_1 \in \{Imz < 0\}$ и

$$z_1 = -\frac{i}{4\pi}(p + \sqrt{p^2-4q})$$

$$z_2 = -\frac{i}{4\pi}(p - \sqrt{p^2-4q})$$

$$z_1z_2 = -\frac{1}{16\pi^2}[p^2 - (p^2-4q)] = -\frac{q}{4\pi^2}$$

1') Если $q > 0$,то $z_2 = -\frac{i}{4\pi}(p - \sqrt{p^2-4q}) \in \{Imz < 0\}$
если $0 < q < \frac{p^2}{4}$, то z_1и$z_2 \in \{Imz < 0\}$
Итак, при $p > 0$ и $0 < q < \frac{p^2}{4}$ корни z_1 и $z_2 \in \{Imz < 0\}$
2') Если $q < 0$,то $z_2 \in \{Imz > 0\}$, а $z_1 \in \{Imz < 0\}$
b) Пусть $p < 0$,тогда $z_1 \in \{Imz > 0\}$ и $z_2 \in \{Imz > 0\}$
1") Если $0 < q < \frac{p^2}{4}$ то z_1 и $z_2 \in \{Imz > 0\}$

2") Если $q<0$,то $z_2\in\{Imz>0\}$, а $z_1\in\{Imz<0\}$

Итак:

$$a)При: p>0 и \begin{cases} 0<q<\frac{p^2}{4} имеем: z_1 и z_2\in\{Imz<0\} \\ q<0 имеем: \begin{cases} z_1\in\{Imz<0\} \\ z_2\in\{Imz>0\}\end{cases}\end{cases}$$

$$b)При: p<0 и \begin{cases} 0<q<\frac{p^2}{4} имеем: z_1 и z_2\in\{Imz>0\} \\ q<0 имеем: \begin{cases} z_1\in\{Imz<0\} \\ z_2\in\{Imz>0\}\end{cases}\end{cases}$$

Пусть $p>0$ и $0<q<\frac{p^2}{4}$,тогда $z_1 и z_2\in Imz<0\Rightarrow$ уравнение (3) имеет решение:

$$\mathcal{KF}(E)^+(z)=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)},\qquad Imz>0$$

Откуда:

$$\mathcal{F}(E)(x)=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(x-z_1)(x-z_2)}$$

Тогда:

$$E(x)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\xi-z_1)(\xi-z_2)}d\xi=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}2\pi i\begin{cases} -\frac{1}{z_1-z_2}e^{-2\pi i z_1\xi}-\frac{1}{z_1-z_2}e^{-2\pi i z_2\xi}=-\frac{1}{4\pi^2}2\pi i(-\frac{1}{2iw})\{e^{-2\pi i(-\frac{ip}{4\pi}+iw_1)x}-e^{-2\pi i(-\frac{ip}{4\pi}-iw_1)x}\}, x>0 \\ 0, \qquad x<0\end{cases}$$

Замечание:$z_1-z_2=(-\frac{ip}{4\pi}+iw_1)-(-\frac{ip}{4\pi}-iw_1)=2iw_1$

$$=-\frac{Y(x)}{2\pi i}\frac{1}{w_1 2i}e^{-\frac{p}{2}x}\{e^{2\pi w_1 x}-e^{-2\pi w_1 x}\}=\frac{Y(x)}{2\pi w_1}e^{-\frac{p}{2}x}\sinh 2\pi w_1 x$$

Итак,

$$E(x)=Y(x)e^{-\frac{p}{2}x}\frac{\sinh 2\pi w_1 x}{2\pi w_1}\in\mathcal{D}'_+$$

или:

$$E(x)=Y(x)e^{-\frac{p}{2}x}\frac{1}{p^2-4q}\{e^{\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}x}-e^{-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}x}\}$$

Из последнего представления очевидно,что $E(x)\in\int'_+$,а тогда $\exists!$ решение уравнения (1) в $\int'_+$ и $\forall W\in\int'_+$.

Оно имеет вид:

$$U=E(x)*W\in\int'_+$$

Т.к.$U\in\int'_+$,то $\exists\widehat{U}(z)$,определяемое по формуле:

$$\widehat{U}(z)=\mathcal{KF}\{\overline{\mathcal{F}}(U)\}(z),\qquad Imz>0$$

которое является решением краевой задачи:

$$L(\widehat{U}^+-\widehat{U}^-)=W$$

А аналитическая функция $\mathcal{KF}(U)^+(z)$,имеющая вид:

$$\mathcal{KF}(U)^\pm(z)=-\frac{1}{4\pi^2}\frac{\mathcal{KF}(W)^+(z)}{(z-z_1)(z-z_2)},\qquad Imz>0$$

есть решение краевой задачи (9):

$$(x^2+\frac{pi}{2\pi}x-\frac{q}{4\pi^2})\mathcal{F}(U)^+=-\frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}(W)^+$$

Пусть теперь $p>0$ и $q<0$,тогда $z_1\in\{Imz<0\}$и $z_2\in\{Imz>0\}$ Рассмотрим уравнение (3) в $Imz>0$.На оси $\mathbb{R}$оно имеет вид:

$$(x^2+\frac{pi}{2\pi}x-\frac{q}{4\pi^2})\mathcal{F}(E)^+(x)=-\frac{1}{4\pi^2} \qquad (*)$$

Функция

$$\frac{1}{x^2+\frac{pi}{2\pi}x-\frac{q}{4\pi^2}}(\frac{1}{4\pi^2})$$

имеет аналитическое представление:

$$-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(x-z_1)(x-z_2)}=-\frac{1}{4\pi^2}\begin{cases}\frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{z-z_1}, & Imz>0\\ \frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{z-z_2}, & Imz<0\end{cases}$$

Т.е.

$$\mathcal{F}(E)^+(z)=\frac{1}{z_1-z_2}\frac{1}{z-z_1}\frac{-q}{4\pi^2}$$

но эта функция не удовлетворяет уравнению (3)!

При $p<0$ и $0<q<\frac{p^2}{4}$, а также при $p=0$ и $q<0$ исследуется аналогично и $E\overline{\in}\int'_+$.

Итак,имеем следующий результат:

Если $4q-p^2>0$ и $p>0$,то $\exists$ элементарное решение $E\in\int'_+$,которое имеет вид:

$$E(x)=Y(x)e^{-\frac{p}{2}x}\frac{\sin 2\pi wx}{2\pi w},$$

где $w=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{4\pi}$

и уравнение (1) в $\int'_+$ имеет и при том ! решение $\forall W\in\int'_+$,которое определяется формулой:

$$U=E*W \qquad (**)$$

Если $4q-p^2>0$ и $p<0$ то не $\exists$ элементарного решения в $\int'_+$.

Если $p=0,q>0$ то $\exists$ элементарное решение $E(x)\in\int'_+$:

$$E(x)=Y(x)\frac{\sin\sqrt{q}x}{\sqrt{q}}$$

$\Rightarrow$уравнение (1) $\forall W\in\int'_+$ имеет ! решение в $\int'_+$,которое определяется по формуле $(**)$

Если $4q-p^2<0$ и $p>0$ а $0<q<\frac{p^2}{4}$,то $\exists$ элементарное решение $E(x)\in\int'_+$:

$$E(x)=Y(x)e^{-\frac{p}{2}}\frac{\sinh 2\pi w_1x}{2\pi w_1},$$

где $w_1=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{4\pi}$

а тогда $\exists!$ решение уравнения (1) в $\int'_+$,которое имеет вид $(**)$.

Если $4q-p^2<0,p>0$ а $q<0$,то не $\exists$ элементарного решения $E\in\int'_+$

Если $4q-p^2<0,p<0$ а $0<q<\frac{p^2}{2}$,а также при $p=0$ и $q<0$, то не $\exists$ элементарного решения $E\in\int'_+$

Пример применения преобразования Карлемана-Фурье к решению обыкновенных дифференциальных уравнений в $\int'_+$.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^{2U}}{dt^2} + 4\pi\alpha i\frac{dU}{dt} - (2\pi)^2(\alpha^2+\beta^2)U = W, \tag{1}$$

где $W \in$
$mathcals'_+, \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$

Применяем метод преобразования Карлемана-Фурье.

Найдем элементарное решение E.По определению элементарного решения,имеем:

$$\frac{d^2E}{dt^2} + 4\pi\alpha i\frac{dE}{dt} - (2\pi)^2(\alpha^2+\beta^2)E = \delta \tag{2}$$

Т.к.

$$\mathcal{KF}(\delta)(z) = \mathcal{KF}\{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}sgnt)\}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & Imz > 0 \\ -\frac{1}{2}, & Imz < 0 \end{cases}$$

То аналитическое представление для (2) будет:

$$\{(-2\pi iz)^2 - 4\pi\alpha i(-2\pi iz) - (2\pi)^2(\alpha^2+\beta^2)\}\mathcal{KF}(E)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & Imz > 0 \\ -\frac{1}{2}, & Imz < 0 \end{cases}$$

$$\{-4\pi^2z^2 - 8\pi^2z - 4\pi^2(\alpha^2+\beta^2)\}\mathcal{KF}(E)(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & Imz > 0 \\ -\frac{1}{2}, & Imz < 0 \end{cases}$$

$$\{z^2 2\alpha z + (\alpha^2+\beta^2)\}\mathcal{KF}(E)(z) = -\frac{1}{8\pi^2}\begin{cases} 1, & Imz > 0 \\ -1, & Imz < 0 \end{cases}$$

Полином имеет нули:

$$z_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 - \beta^2} = -\alpha \pm i\beta$$

$$z_1 = -\alpha + i\beta \in Imz > 0$$

$$z_2 = -\alpha - i\beta \in Imz < 0$$

Поэтому формула:

$$\mathcal{KF}(E)(z) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, Imz \neq 0$$

не дает аналитического представления для $\mathcal{F}(E)$.Но т.к. аналитическое представление определяется с точностью до аддитивной целой аналитической функции $P(z)$, то рассмотрим аналитическое представление для (2) в виде:

$$(z-z_1)(z-z_2)\mathcal{KF}(E)(z) = \begin{cases} -\frac{1}{8\pi^2} + a_0 + a_1z, & Imz > 0 \\ \frac{1}{8\pi^2} + a_0 + a_1z, & Imz < 0 \end{cases}$$

где $a_0 u a_1$-произвольные const подберем так,чтобы убрать простые полиномы в точках $z_1 u z_2$,где вычеты в точках $z_1 u z_2$ приравняем нулю у функций:

$$\frac{-\frac{1}{8\pi^2} + a_0 + a_1z}{(z-z_1)(z-z_2)} u \frac{\frac{1}{8\pi^2} + a_0 + a_1z}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

Имеем:

$$\begin{cases} -\frac{1}{8\pi^2} + a_0 + a_1z = 0 \\ \frac{1}{8\pi^2} + a_0 + a_1z = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1(z_1 - z_2) - \frac{1}{4\pi^2} = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{2i\beta} = \frac{1}{8\pi^2 i\beta}$$

Где

$$\{a_0 = -\frac{1}{8\pi^2} - a_1 z_2 = -\frac{1}{8\pi^2} - a_1(-\alpha - i\beta) = -\frac{1}{8\pi^2} - \frac{1}{8\pi^2 i\beta}(-\alpha - i\beta)\}$$

Тогда имеем аналитическое представление для $\mathcal{F}(E)$

$$\mathcal{K}\mathcal{F}(E)(z) = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^2 i\beta}\frac{1}{z-z_2}, Imz > 0 \\ \frac{1}{8\pi^2 i\beta}\frac{1}{z-z_1}, Imz < 0 \end{cases} = \frac{1}{8\pi^2 i\beta}\begin{cases} \frac{1}{z-z_2}, Imz > 0 \\ \frac{1}{z-z_1}, Imz < 0 \end{cases}$$

Тогда:

$$\mathcal{F}(E)(\xi) = \frac{1}{8\pi^2 i\beta}\{\frac{1}{\xi - z_2} - \frac{1}{\xi - z_1}\} = \frac{z_1 - z_2}{8\pi^2(i\beta)}\frac{1}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)} = -\frac{2i\beta}{8\pi^2(i\beta)}\frac{1}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)}$$

или

$$\mathcal{F}(E)(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Тогда:

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(\xi - z_1)(\xi - z_2)} d\xi = -\frac{1}{4\pi^2} 2\pi i \begin{cases} -res_{\xi = z_2} f, x > 0 \\ res_{\xi = z_1} f, x < 0 \end{cases} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} 2\pi i \begin{cases} -\frac{e^{-2\pi i z_2 x}}{z_2 - z_1}, x > 0 \\ \frac{e^{-2\pi i z_1 x}}{z_1 - z_2}, x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{4\pi^2} 2\pi i \frac{1}{z_1 - z_2}\begin{cases} e^{-2\pi i z_2 x}, x > 0 \\ e^{-2\pi i z_1 x}, x < 0 \end{cases} =$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} 2\pi i \frac{1}{2i\beta}\begin{cases} e^{-2\pi i x(-\alpha - i\beta)}, x > 0 \\ e^{-2\pi i x(-\alpha + i\beta)}, x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{4\pi\beta} e^{2\pi i\alpha x}\begin{cases} e^{-2\pi\beta x}, x > 0 \\ e^{2\pi\beta x}, x < 0 \end{cases} =$$

$$-\frac{1}{4\pi\beta} e^{2\pi i\alpha x - 2\pi\beta|x|}$$

Итак,

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi\beta} e^{2\pi i\alpha x - 2\pi\beta|x|} \in \mathcal{A}$$

Замечание:
Если $E(x) \in \Theta'_c, \Rightarrow$ у уравнения (1)$\exists!$ решение при $\forall\ W \in \int'$, которая имеет вид:

$$U = E(x) * W = -\frac{1}{4\pi\beta} e^{-2\pi\beta|x| + 2\pi i\alpha x} * W$$

Метод преобразования Карлемана-Фурье в обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях порядка m.

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка m с постоянными коэффициентами в пространстве обобщенных функций медленного роста $\int'_+$:

$$P(D)U = W \tag{$*$}$$

где P(D) есть дифференциальный полином вида:

$$P(D) = \sum_{k=0}^{m} a_k D^{m-k},$$

$$a_0 = 1, a_k = const \in \mathbb{C}, k = \overline{1, m}$$

где $D = (-\frac{1}{2\pi i})\frac{d}{dt}$- оператор дифференцирования в смысле обобщенных функций.

W-заданная обобщенная функция из $\int'_+$

U-искомая обобщенная функция из $\int'_+$.

Для отыскания решения уравнения $(*)$ будем использовать элементарное решение, а для отыскания элементарного решения применим преобразование Карлемана-Фурье в $\int'_+$.

Рассмотрим дифференциальный полином, примененный к искомому элементарному решению. По определению элементарного решения имеем уравнение:

$$P(D)E = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} D^k E = \delta(t) \tag{1}$$

Применяя преобразование Карлемана-Фурье к (1), получим алгебраическое уравнение в $Imz > 0$, т.к. преобразование Карлемана-Фурье переводит сверточную алгебру $\int'_+$ в мультипликативную алгебру функций,аналитических в верхней полуплоскости,т.е. $\mathcal{KF}(\int'_+) = K_+$:

$$P(z)\mathcal{KF}(E)^+(z) = 1 \tag{2}$$

где

$$P(z) \equiv \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} z^k$$

Пусть корни полинома z_k кратности $(q_k), k = \overline{1, p}$, и их m штук,то $\sum_{k=1}^{p} q_k = m$;,тогда из алгебры известно,что этот полином можно разложить по своим корням:

$$\prod_{k=1}^{p} (z - z_k)^{q_k} \mathcal{KF}(E)^+(z) = 1, \qquad Imz > 0$$

I)Если все нули полинома лежат в верхней полуплоскости, то элементарного решения исходного уравнения не существует,т.к. при делении в знаменателе образуется полюс.

II)Пусть все нули полинома лежат на вещественной оси и кратны: $z_k = x_k, \forall k = \overline{1, p}, z \in \mathbb{R}$,

Представим уравнение (2)в следующем виде:

$$\prod_{k=1}^{p} (z - x_k)^{q_k} \mathcal{KF}(E)^+(z) = 1, \qquad Imz > 0$$

Перейдем к пределу при $Imz \to +0$ (предел может существовать и в классическом смысле).Используя связь между преобразованием Фурье и Карлемана-Фурье:

$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{K}\mathcal{F}^+(f) - \mathcal{K}\mathcal{F}^-(f)$,где $\mathcal{K}\mathcal{F}^\pm(f)$−предельные значения в смысле обобщенных функций сверху и снизу соответственно,имеем:

$$\prod_{k=1}^{p}(x - x_k)^{q_k}\mathcal{F}(E)(x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Используя фундаментальное свойство преобразования Фурье $\mathcal{F}(D^\alpha\delta) = (2\pi i\xi)^\alpha$,имеем:

$$\mathcal{F}\{\circledast_{k=1}^{p}(\frac{\delta'}{-2\pi i} - x_k\delta)^{*q_k}\}\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(\delta)$$

$$\mathcal{F}\{\circledast_{k=1}^{p}(\frac{\delta'}{-2\pi i} - x_k\delta)^{*q_k} * E\} = \mathcal{F}(\delta)$$

Известно,что если равны образы преобразования Фурье,то равны и его прообразы:

$$\{\circledast_{k=1}^{p}(\frac{\delta'}{-2\pi i} - x_k\delta)^{*q_k}\} * E = \delta$$

где $\circledast_{k=1}^{p}$-сверточное произведение.

Воспользуемся свойством $D^\alpha\delta * T = D^\alpha T$:

$$\prod_{k=1}^{p}(\frac{d}{dt} + 2\pi i x_k)^{q_k}E = (-2\pi i)^m\delta$$

Чтобы найти E, достаточно найти E_k:

$$(\frac{d}{dt} + 2\pi i x_k)^{q_k}E_k = \delta$$

Используя известный факт из УЧП(известна структура элементарного решения у этих операторов):

$$E_k = Y(t)e^{-2\pi i x_k t}\frac{t^{q_k-1}}{(q_k-1)!}, \qquad k = \overline{1,p}$$

Отсюда:

$$E = (-2\pi i)^m \circledast_{k=1}^{p} Y(t)\frac{e^{-2\pi i x_k t}t^{q_k-1}}{(q_k-1)!}$$

Т.к.$E \in \int'_+, mo \forall W \in \int'_+ \exists!$ решение уравнения $U = E * W$,равное:

$$U = (-2\pi i)^m \circledast_{k=1}^{p} Y(t)\frac{e^{-2\pi i x_k t}t^{q_k-1}}{(q_k-1)!} * W$$

Пример:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + w^2X = W \in \int'_+ \qquad (*)$$

$$P \equiv \frac{d^2}{dt^2} + w^2$$

Найдем элементарное решение:

$$\{(-2\pi iz)^2 + w^2\}\mathcal{KF}(E)^+(z) = 1, \qquad Imz > 0$$

$$\mathcal{KF}(E)^+(z) = -\frac{1}{4\pi^2z^2 + w^2}, \qquad Imz > 0$$

Т.е.

$$\mathcal{KF}(E)^+(z) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{z^2 - \frac{w^2}{4\pi^2}} = -\frac{1}{4\pi^2}\{\frac{1}{z - \frac{w}{2\pi}}\frac{1}{\frac{w}{\pi}} - \frac{1}{z + \frac{w}{2\pi}}\frac{1}{\frac{w}{\pi}}\} = -\frac{1}{4\pi w}\{\frac{1}{z - \frac{w}{2\pi}} - \frac{1}{z + \frac{w}{2\pi}}\} =$$

$$= \frac{i}{2w}\{-\frac{1}{2\pi i(z - \frac{w}{2\pi})} + \frac{1}{2\pi i(z + \frac{w}{2\pi})}\} = \frac{1}{2wi}\{\frac{1}{2\pi i(z - \frac{w}{2\pi})} - \frac{1}{2\pi i(z + \frac{w}{2\pi})}\}$$

Тогда:

$$\mathcal{F}(E)(\xi) = \frac{1}{2iw}\{\tau_{-\frac{w}{2\pi}}\delta_+ - \tau_{\frac{w}{2\pi}}\delta_+\}$$

Откуда:

$$E(t) = \frac{1}{w}\frac{1}{2i}\{Y(t)e^{iwt} - Y(t)e^{-iwt}\} = \frac{Y(t)}{w}\sin wt \in \int'_+$$

Тогда т.к. $E \in \int'_+$,то $\forall W \in \int'_+$ у уравнения $(*)\exists!$ решение,которое имеет вид:

$$X = E(t) * W \qquad (**)$$

Замечание:
Поскольку E $\in \mathcal{D}'_+$,то у уравнения $(*)\exists!$ решение $\forall W \in \mathcal{D}'_+$,которое также имеет вид $(**)$.

Список использованной литературы.

1)Владимиров В.С., "Уравнения математической физики.",М.Наука,1988г.,512 стр.

2)Владимиров В.С.,Михайлов В.П.,Вашарин А.А.,Каримова Х.Х.,Сидоров Ю.В.,Шабунин М.И. "Сборник задач по уравнениям математической физики.",М.Наука,1982г.,256 стр.

3)Салехов Л.Г. "Лекции по уравнениям в частных производных.",2011 г.

4)Салехов Л.Г. "Лекции по технике ядер.",2012 г.

5)Салехов Л.Г. "Лекции по интегральным преобразованиям в пространстве обобщенных функций." ,2014 г.

6)Бремерман Г. "Распределения,комплексные переменные и преобразования Фурье.",М.Мар. 1968 г.,276 стр.

7)Рудин У. "Функциональный анализ",М.: Мир, 1975г.,444 стр.

8)Шубин М.А."Лекции об уравнениях математической физики",МЦНМО,2003г.,303стр.

9)Антосик А.,Микусинский Я.,Сикорский Р. "Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.",Мир,1978г.

10)Агранович М.С. "Обобщенные функции", М.:МЦНМО,2009г.

11)Богачев В.И.,Смолянов О.Г. "Действительный и функциональный анализ",М.:РХД,2009 г.

12)Мирошин Н.В.,Логинов А.С.,Гордеев Ю.Н.,Простокишин В.М. "Интегральные и дифференциальные операторы и обобщенные функции.",М.:НИЯУ МИФИ,2010 г.-168 с.

13)Брычков Ю.А., Прудников А.П."Интегральные преобразования обобщенных функций."М.: Наука, 1977г.

14) Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., "Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши", УМН, 1953 г.