Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Кафедра теоретической механики

Специальность (010800.68): – механика и математическое моделирование

Специализация: теоретическая механика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Магистерская работа

Приближенные методы решения дробных интегро-дифференциальных уравнений в механике.

Работа завершена:

"20"июня 2014 г. А.Ф. Гилемзянов

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.ф.-м.н, доцент А.Ф. Галимянов
"20"июня 2014 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., академик АН РТ,
профессор Ю.Г. Коноплев
" 20"июня 2014 г.

Казань – 2014

Оглавление

Введение 3
Глава 1. Постановка задачи 4
Глава 2. Обобщенные приближенные методы 5
2.1. Классический метод Ритца 7
2.2. Метод Ритца в энергетических пространствах 9
2.3. Естественные и главные краевые условия 13
2.4. Метод Бубнова-Галеркина 14
Глава 3. Дробные интегралы и производные 21
3.1. Определение дробных интегралов и производных и простейшие свойства 21
3.2. Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции 25
3.3. Формулы композиции. Связь с полугруппами операторов 28
3.4. Дробные интегралы и производные Вейля периодических функций 34
Глава 4. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для дробно-интегральных и дробно-дифференциальных уравнений 37
4.1. Случай $A = I^{(\alpha)}$ 37
4.2. Метод Бубнова-Галеркина для случая $A = I^{(\alpha)}$ 38
4.3. Частный случай 39
4.4. Случай $A = D^{(\alpha)}$ 40
4.5. Метод Бубнова-Галеркина для случая $A = D^{(\alpha)}$ 42
Глава 5. Прямые методы решения дробно-дифференциальных уравнений механики сплошных сред 43
5.1. Определения дробной производной 43
5.2. Постановка начально-краевой задачи на примере уравнения теплопроводности 44
5.3. Общее дифференциальное уравнение вязкоупругого тела 44
5.4. Задача о деформировании тонкого стержня 45
Заключение 46
Список использованной литературы 47

Введение

Идея о распространении интегрирования и дифференцирования на нецелые порядки существует с самого зарождения интегрального и дифференциального исчислений. Однако, несмотря на обширную область возможного применения, до недавнего времени этой области уделялось мало внимания. К примеру, дробное исчисление используется в моделях вязкоупругих тел, сплошных сред с памятью, трансформации температуры и влажности в слоях атмосферы, в уравнениях диффузии и в других областях.

Как и большинство других интегро-дифференциальных, дробно-интегральные и дробно-дифференциальные уравнения не решаются точно. В связи с этим появляется необходимость в построении приближенных методов их решения. В данной работе предлагается один из таких методов.

Работа состоит из пяти глав. В первой главе дается постановка задачи, во второй и третьей приводятся предварительные сведения и результаты относительно приближенных методов решения и дробного исчисления соответственно, в четвертой главе строятся приближенные методы решения дробно-интегральных и дробно-дифференциальных уравнений, в пятой главе рассматривается использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред.

Глава 1. Постановка задачи

Дано уравнение

$$Au + Tu = f, \tag{1}$$

где $A -$ оператор дробного интегрирования или дробного дифференцирования, $T -$ некоторый оператор, $f -$ заданная функция. Оператор $(A + T)$ линейный, в общем случае неограниченный и не положительно определенный. Требуется построить метод приближенного решения уравнения (1) и оценить скорость сходимости приближенного решения к точному.

Глава 2. Обобщенные приближенные методы

Схема алгоритмов

Пусть в гильбертовом пространстве H рассматривается уравнение:

$$Lu = Au + Bu = f, f \in H, \tag{2.1}$$

где $A, B -$ линейные, т.е. адаптивные и однородные, но, возможно, неограниченные операторы в H с областями определения $D(A), D(B)$ соответсвенно. Предполагается, что $D(A) \subseteq D(B)$ и $D(A)$ плотно в H . Кроме того, введем в рассмотрение некоторый оператор K с областью определения $D(K) \supseteq D(A)$. Зададим функции

$$\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}, \dots \dots \varphi_N^{(N)}, N = 1,2, \dots$$

Каждая из которых принадлежит $D(A)$. Обозначим через H_N линейную оболочку функций $\varphi_i^{(N)}, i = 1, \dots N$. Будем считать, что для этих функций выполнены следующие условия:

1. При любом N функции $\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}, \dots \dots \varphi_N^{(N)}, N = 1,2, \dots$ линейно независимы,
2. Последовательность пространств $\{H_N\}$ предельно плотна в H , т.е. для любой функции $u \in H$ существуют такие элементы $\tilde{u}_N \in H_N$, $N = 1,2, \dots$, что

$$\|u - \tilde{u}_N\| = \inf_\omega \|u - \omega\| \leq \varepsilon\,(u, N), \omega \in H_N\ ,$$

где $\varepsilon(u, N) -$ оценки погрешности аппроксимации, $\varepsilon(u, N) \to 0,\ \ N \to \infty$.

Набор функций $\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}, \dots \dots \varphi_N^{(N)}, N = 1,2, \dots$ удовлетворяющих отмеченным условиям, будем называть базисом в H_N и обозначать $\{{\varphi_i}^N\}$. Входящие в него функции ${\varphi_i}^N$ назовем базисными.

Заметим, что базисные функции зависят от N и, вообще говоря, $\varphi_i^{N_1} \neq \varphi_i^{N_2}$ при $N_1 \neq N_2$. Однако не исключается возможность, когда этой зависимости не будет, например, в случае ${\varphi_i}^N = x^i, i = 1, \dots, N,\ N = 1,2, \dots$.Здесь мы имеем обычную расширяющуюся последовательность базисных функций.

Примером функций ${\varphi_i}^N$, зависящих от N, могут быть ступенчатые функции, определенные на (0,1) и имеющие вид

$${\varphi_i}^N = \begin{cases} 1, x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \\ 0, x \notin \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, N = 1,2, \dots .$$

Условимся в дальнейшем индексы N в обозначениях базисных функций$\varphi_i{}^N$ и коэффициентов $A_i{}^N$ в комбинациях $v_N = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} \varphi_i^N$ для упрощения обозначений опускать. Однако, зависимость от

N соответствующих функций и выражений, в которые они входят, в этом случае тем не менее подразумевается.

Введем еще один набор базисных функций, который (с учетом сделанных выше замечаний) обозначим через $\{\psi_i\}$ и который обязательно совпадает с$\{\varphi_i\}$. Предполагается, что все базисные функции φ_iпринадлежат множеству $D(K)$.

Будем искать приближенные решения уравнения (2.1) в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i; \tag{2.2}$$

здесь a_i определим из системы уравнений

$$(Au_N + Bu_N - f, K\psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.3}$$

где $(u, v) -$ скалярное произведение в пространстве H с нормой $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Разрешимость системы (2.3) и сходимость u_N к u при $N \to \infty$ в каком-либо смысле будут зависеть от выбора $K, \{\varphi_i\}, \{\varphi_j\}$ и от свойств операторов A, B. Выбирая эти операторы и базисы так или иначе, можно получить ряд известных методов приближенного решения уравнения (2.1). Поэтому будем рассматривать алгоритм (2.3) в качестве основного. Далее рассмотрим некоторые его частные случаи (например, метод Ритца, метод Бубнова-Галеркина и др.).

Условимся в дальнейшем в случаях, когда для изложения нет необходимости в представлении оператора L в виде $L = A + B$, считать B нулевым оператором (оператор аннулирования), т.е. $B = \theta$. Такие ситуации могут возникнуть, например, когда на L налагаются достаточно общие ограничения (например, лишь существование обратного оператора L^{-1}) или наоборот, сравнительно жесткие (самосопряженность, положительная определенность и др.). Это поможет нам, с одной стороны, несколько упростить обозначения, а с другой – вписать излагаемые методы в одну схему (2.3), следуя от простых методов к более сложным.

2.1 Классический метод Ритца.

Пусть в задаче (2.1) и в алгоритме (2.3) $B = \theta, K = 1 -$ тождественный оператор, $\varphi_i = \psi_i$, $A -$ симметричный положительно определенный оператор, т.е. $(Au, v) = (u, Av)$,

$(Au, u) \geq \gamma^2 \|u^2\|$, где$\gamma -$постоянная, $\gamma > 0$, $u, v \in D(A)$. В этом случае мы приходим к задаче

$$Au = f, \ \ f \in H \tag{2.4}$$

Общий алгоритм (2.3) при сделанных предположениях будем называть классическим методом Ритце; он состоит в следующем:

1. Выбирается базис $\{\varphi_i\}, \varphi_i \in D(A), i = 1, \dots, N, N = 1,2 \dots$
2. Приближенное решение ищется в виде
$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i, \tag{2.5}$$
3. Коэффициентыa_i , находятся из системы уравнений
$$(Au_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), i = 1, \dots, N, \tag{2.6}$$

Или, что, то же самое, из системы

$$\hat{A}a = f, \tag{2.3'}$$

где $\hat{A} -$ матрица с элементами $A_{ij} = \left(A\varphi_i, \varphi_j\right)$, $a = (a_1, a_N)^T$, $f = (f_1, \dots, f_N)^T$, $f_i = (f, \varphi_i)$.

Поскольку $A -$ положительно определенный оператор и $\{\varphi_i\} -$ линейно независимая система, то при $v_N = \sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i$, $b = (b_1, \dots, b_N)^T \neq 0 = (0, \dots, 0)^T$ имеем

$$(\hat{A}b, b)_2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_{ij} b_i b_j = (Av_N, v_N) \geq \gamma^2 \|v_N\|^2 > 0,$$

т.е. $\hat{A} -$ положительно определенная матрица, а значит, невырожденная. Итак, система (2.6) имеет единственное решение a, определяя тем самым единственную функцию u_N вида (2.5).

Для u_N можно получить априорную оценку; умножив уравнения (2.6) на a_iи просуммировав их по i , получим $(Au_N, u_N) = (f, u_N)$; но $(Au_N, u_N) \geq \gamma^2 \|u_N\|^2$; следовательно, $\|u_N\|^2 \leq |(f, u_N)|/\gamma^2$.

Оценим величину $|(f, u_N)|$, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского: $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, u, v \in H$. Тогда выполняется неравенство $|(f, u_N)| \leq \|f\| \|u_N\|$, и мы приходим к оценке

$$\|u_N\| \leq \|f\|/\gamma^2 \ . \tag{2.7}$$

При формулировке метода Ритца мы исходили из алгоритма (2.3), однако известно, что метод Ритца основан на отыскании минимума квадратичного функционала вида

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) \tag{2.8}$$

На множестве $D(A)$, принимаемом здесь также в качестве области определения $F(u)$. Так, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Для того, чтобы некоторый элемент $u_0 \in D(A)$ сообщал минимальное значение функционалу энергии $F(u)$, необходимо и достаточно, чтобы жтот элемент удовлетворял уравнению $Au_0 = f$. Такой элемент единственный.

Из этой теоремы следует, что задача (2.4) и задача минимизации (2.8) эквивалентны. Поэтому можно сформулировать метод Ритца следующим образом. Пусть H_N −линейная оболочка системы $\varphi_1, \dots, \varphi_N$. Поставим задачу об отыскании минимума функционала $F(u)$ на H_N, для которой

$$F(u_N) = \min F(v)\,, v \in H_N\ . \tag{2.9}$$

Но так как $v = \sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i$, то $F(u_N) = \min F(v)$,где

$$F(v) = F(b_1, \dots, b_N) = \sum_{i,j=1}^{N} b_i b_j \left(A\varphi_i, \varphi_j\right) - 2\sum_{i=1}^{N} b_i (f, \varphi_j).$$

Чтобы найти минимум функционала $F(v)$, вычисляем его производные по b_i, и приравниваем их к нулю. Приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial F(v)}{\partial b_i} = 0\,, \qquad i = 1, \dots, N\,,$$

которая, как легко заметить, эквивалентна (2.6). Таким образом, для рассматриваемого класса операторов метод Ритца в формулировке (2.6) и в формулировке минимизации *F(u)* на H_Nприводить к одной и той же системе уравнений для определения коэффициентов $a_i, i = 1, \dots, N$.

Теорема 2.2. Если для любой функции $u \in D(A)$ можно построить такую последовательность элементов $\tilde{u}_n \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \in H_N$, $N = 1,2, \dots$, что $\|A(u - \tilde{u}_i)\| \to 0$ при $N \to \infty$, то приближенные решения u_N сходятся к точному решению u_0 уравнения (2.4) при $N \to \infty$ и имеет место оценка

$$\|u_0 - u_N\| \le c\ \min_{c_i} \|u_0 - \tilde{u}_N\|\,,$$

где с – положительная постоянная, не зависящая от u_0 и u_N.

Доказательство. Воспользуемся соотношением, справедливым для u_0 и произвольной функции $v \in D(A)$:

$$
\begin{aligned}
&(A(u_0 - v), u_0 - v) = (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(Au_0, v) \\
&= (Au_0, u_0) + (Av, v) - 2(f, v) = \\
&= F(v) + (Au_0, u_0) - F(u_0) + F(u_0) \\
&= F(v) - F(u_0) + 2(Au_0, u_0) - 2(u_0, f) = F(v) - F(u_0)
\end{aligned}
$$

таким образом,

$$(A(u_0 - v), u_0 - v) = F(u) - F(u_0).$$

Поскольку u_0 доставляет функционалу $F(v)$ минимальное значение на $D(A)$, а приближенное решение u_N минимизирует $F(v)$ на H_N,то

$$
\begin{aligned}
(A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) = \ & F(u_N) - F(u_0) \leq F(u_N) - F(u_0) \\
& = (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N)
\end{aligned}
$$

при произвольной функции $u_N = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$из$H_N$. Следовательно,

$\gamma^2 \|u_0 - u_N\|^2 \leq (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq (A(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq$
$\|A^{-1}\| \|A(u_0 - u_N)\|^2$,

$$\|u_0 - u_N\|^2 \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\gamma^2} \|A(u_0 - u_N)\|^2.$$

В силу произвольности выбора коэффициентов c_i, $i = 1,2, \dots, N$, в разложении $v_N = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$ получаем утверждение теоремы, положив $v_N = \tilde{u}_N$.

Замечание. Если известна оценка

$$\min_{c_i} \left\| A \left(u_0 - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i \right) \right\| \leq \varepsilon(u_0, N) \to 0, \qquad N \to \infty,$$

где $\varepsilon(u_0, N) -$ заданная функция от N, то из теоремы 2 следует оценка погрешности $\|u_0 - u_N\| \leq c\varepsilon(u_0, N)$.

2.2 Метод Ритца в энергетических пространствах

Теорема 2.1 устанавливает эквивалентность задачи (2.4) и задачи (2.8), но в ней нет никаких утверждений о самом существовании решения $u_0 \in D(A)$ этих задач. В п. 2.1 рассматривалась классическая постановка задачи, когда решение уравнения $Au = f$ есть функция, принадлежащая области определения $D(A)$ оператора A и удовлетворяющая этому уравнению. Оказывается, что в такой постановке это решение может не существовать. Однако оно существует в несколько более широком (чем $D(A$)) пространстве. Поэтому необходимо изменить постановку

вариационной задачи о минимизации $F(u)$, чтобы можно было гарантировать существование ее решения.

Пусть при рассмотрении (2.4) $A-$ симметричный положительно определенный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H. Введем в $D(A)$скалярное произведение и норму:

$$[\varphi,\psi]=(A\varphi,\psi),[\phi]=[\varphi,\varphi]^{1/2}.$$

Пополняя $D(A)$ по введенной форме, приходим к полному гильбертову пространству H_A , которое называется энергетическим пространством, порождаемым оператором A. Каждая функция из $D(A)$ принадлежит пространству H_A , однако в результате пополнения в H_A могут появиться элементы , не входящие в $D(A)$ (поэтому представление скалярного произведения $[\varphi,\psi]$ при произвольных $\varphi,\psi\in H_A$ в виде $(A\varphi,\psi)$ уже не имеет места).

Пусть $u\in D(A)$;используя (2.10) представим$F(u)$в виде

$$F(u)=[u,u]-2(f,u). \tag{2.11}$$

Такая форма записи позволяет рассматривать *F(u)* не только на области определения оператора*A,* но и на всех элементах энергетического пространства H_A. Поэтому расширим функционал (2.11) (оставив за ним прежнее обозначение *F(u)*) на все пространство H_A и будем искать его минимум на этом пространстве. Легко показать, что в такой постановке вариационная задача имеет всегда единственное решение. Действительно, так как оператор предполагается положительно определенным, т.е. $(Au,u)=[u,u]\geq\gamma^2\|u\|^2$ останется справедливым для любого элемента $u\in H_A$.

Функционал (f,u) ограничена в H_A:

$$|(f,u)|\leq\|f\|\|u\|\leq\|f\|\frac{|u|}{\gamma}=c[u].$$

Следовательно, по теореме Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве существует элемент $u_0\in H_A$, однозначно определяемый элементом f и такой, что для любого $u\in H_A$ справедливо равенство $(f,u)=[u_0,u]$.

Но тогда *F(u)* можно представить в виде

$$F(u)=[u,u]-2(f,u)=[u,u]-2[u,u_0]=[u-u_0]^2-[u_0]^2. \tag{2.12}$$

Из (2.12) видно, что в пространстве H_A функционал $F(u)$ достигает минимума при $u=u_0$. Как уже отмечалось, u_0- единственный и принадлежит H_A. Может оказаться, что $u_0\in D(A)$; тогда u_0 будет также классическим решением рассматриваемой задачи, т.е. будет удовлетворять

(2.4). Если же $u_0 \in H_A$, но $u_0 \notin D(A)$, то назовем его обобщенным решением уравнения (2.4).

Итак, мы свели исходную задачу к задаче минимизации функционала (2.11) в энергетическом пространстве H_A . Рассмотрим теперь метод Ритца для приближенного решения последней вариационной задачи, который в данном случае назовем методом Ритца в энергетических пространствах.

Пусть заданы линейно-независимые функции $\{\varphi_i\} \subset H_A$, обозначим через H_N их линейную оболочку. Предположим, что последовательность подпространства $\{H_N\}, N = 1,2, \ldots$, предельно плотна в H_A т.е. для любой функции $u \in H_A$существуют такие элементы $\tilde{u}_N \in H_N$, N=1,2,…, что

$$[u - \tilde{u}_N] = \inf_\omega [u - \omega] \leq \varepsilon(u, N) \to 0,\ N \to \infty,\ \omega \in H_N, \qquad (2.13)$$

где $\varepsilon(u, N) -$ оценка погрешности аппроксимации. Теперь метод Ритца можно сформулировать следующим образом: требуется найти элемент $u_N \in H_N$, минимизирующий $F(u)$ на подпространстве H_N. Реализация этого алгоритма состоит в следующем:

1. Задаются конкретные N и $\{\varphi_i\}$,$\varphi_i \in H_A$.
2. Приближенное решение ищется в виде
$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \ . \qquad (2.14)$$
3. Коэффициенты a_i находятся из условий минимизации функционала $F(u_N)$, которые приводятся к системе уравнений
$$\frac{\partial F(u_N)}{\partial a_i} = 0, i = 1, \ldots, N.$$

Эту систему записать также в виде

$$\hat{A}a = f \text{ или } [u_N, \varphi_i] = (f, \varphi_i),\ i = 1, \ldots, N. \qquad (2.15)$$

где $a = (a_1, \ldots, a_N)^T$и $f = (f_1, \ldots, f_N)^T - N$-мерные векторы, причем

$$f_i = (f, \varphi_i), \qquad (2.16)$$

а $\hat{A} -$ матрица Грама системы $\{\varphi_i\}$ в скалярном произведении пространства H_A, с элементами

$$A_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j],\ 1 \leq i, j \leq N. \qquad (2.17)$$

Но $A_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]$=$[\varphi_j, \varphi_i] = A_{ji}$, так что $\hat{A}$ симметрична, а в силу неравенства

$$(\hat{A}b, b)_2 = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} b_i b_j = \left[\sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i\right]^2 \geq \gamma^2 \left\|\sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i\right\|^2 > 0$$

при $b = (b_1, \dots, b_N)^T \neq 0$ матрица $\hat{A}$ является также положительно определенной. Поэтому система (2.15) имеет единственное решение a, однозначно определяющее элемент u_N, для которого справедливо неравенство $[u_N] \leq \|f\|/\gamma^2$.

Замечание. Если $\varphi_i \in D(A)$, то A_{ij} можно представить также в виде $A_{ij} = (A\varphi_i, \varphi_j)$. Если же $\varphi_i \notin D(A)$, то данное представление, вообще говоря, не имеет места и выполняется (2.17). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. Если последовательность подпространств $\{H_N\}$ предельно плотна в H_A, приближенные решения u_N ,построенные методом Ритца, сходятся при $N \to \infty$ к обобщенному решению задачи u_0 в метрике пространства H_A.

Доказательство. Приведем два доказательства теоремы, часто используемые при изучении сходимости метода Ритца.

1. Каждое u_N доставляет на H_N минимум $F(u)$, поэтому с учетом (2.12) при произвольном $\omega \in H_N$ имеем

$$[u_0 - u_N]^2 = F(u_N) - F(u_0) \leq F(\omega) - F(u_0) = [u_0 - \omega]^2.$$

Поскольку ω произвольно, то, принимая во внимание (2.13), получаем

$$[u_0 - u_N]_A \leq \inf_\omega [u_0 - \omega] \leq \varepsilon(u_0, N), \omega \in H_N \quad , \tag{2.18}$$

где $\varepsilon(u_0, N) \to 0$ при $N \to \infty$.

1. Запишем для u_0 и u_N тождества:

$$[u_0, \varphi_i] = (f, \varphi_i), \ \ [u_N, \varphi_i] = (f, \varphi_i) i = 1, \dots, N.$$

Вычитая второе соотношение из первого, получаем $[u_0 - u_N, \varphi_i] = 0$, $i = 1, \dots, N$.

Следовательно, $[u_0 - u_N, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i] = 0$ при произвольных постоянных $c_1, \dots, c_N$или, что одно и тоже ($c_i = d_i - a_i$, d_i произвольны),

$$[u_0 - u_N, u_0 - u_N] = \left[u_0 - u_N, u_0 - \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i\right].$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского для оценки правой части последнего равенства, получаем соотношения

$$[u_0 - u_N]^2 \leq [u_0 - u_N] \left[u_0 - \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i\right],$$

$$[u_0 - u_N] \leq \left[u_0 - \sum_{i=1}^{N} d_i \varphi_i\right].$$

Но d_i произвольны, поэтому

$$[u_0 - u_N] \leq \inf_{d_i} \left[u_0 - \sum_{i=1}^{N} d_i \varphi_i\right] \leq \varepsilon(u_0, N),$$

где $\varepsilon(u_0, N) \to 0$ при $N \to \infty$. Теорема доказана.

2.3 Естественные и главные краевые условия

Рассмотрим один из вопросов, важных для практического использования метода Ритца, − проблему выделения главных и естественных краевых условий. Принадлежность элемента u_k области определения $D(A)$ оператора часто подразумевает, что u удовлетворяет тем или иным краевым условиям: $T_k u = 0, k = 1, \dots, K$ (здесь T_k − оператор, k-е краевое условие). В результате пополнения $D(A)$ по норме$[\cdot]$ в полученном энергетическом пространстве H_A могут появиться элементы, которые будут удовлетворять не всем условиям $T_k u = 0$. Если в H_A окажутся элементы, не удовлетворяющие некоторому условию $T_k u = 0$, то это краевое условие называется естественным для оператора A. Краевое условие, которому удовлетворяют как элементы из $D(A)$, так и элементы из H_A, называется главным.

Практическая важность умения отличать эти условия состоит в том, что базисные функции $\{\varphi_i\}$ не обязательно подчинять естественным краевым условиям, так как их достаточно брать лишь из энергетического пространства (и не обязательно из $D(A)$). Это обстоятельство в значительной степени облегчает выбор φ_i при решении многих практически важных задач, особенно в случае главных краевых условий проблема построения φ_i, удовлетворяющих этим условиям, остается.

Укажем подход, который позволяет для конкретной задачи установить, является ли то или иное краевое условие естественным. Рассмотрим задачу о минимизации функционала $F(u)$ и предположим, что существует функция u_0, реализующая минимум $F(u)$ в классе функций, вообще говоря, не удовлетворяющих данному условию. Используя средства вариационного исчисления, можно найти необходимые условия реализации минимума $F(u)$ функцией u_0. Если окажется, что к ним относится и рассматриваемое краевое условие, то оно естественное.

Наконец, приведем простой признак, позволяющий отличать естественные краевые условия от главных и применимый для ряда краевых задач. Пусть в (2.4) $A-$ дифференциальный оператор порядка $2m$, удовлетворяющий некоторому однородному краевому условию вида $T_k u = 0$. Тогда краевое

условие будет естественным, если выражение $T_k u$ содержит производные от u порядка m и выше (при этом в $T_k u$ могут входить производные порядков, меньших чем m, а также сама функция u с некоторыми весами). Если $T_k u$ не содержит производных от u порядка m и выше, то условие $T_k u = 0$ является главным.

2.4 Метод Бубнова-Галеркина

Основным недостатком метода Ритца является то, что он применим только для уравнений с симметричными положительно определенными операторами. От этого недостатка свободен другой алгоритм проекционного метода – метода Бубнова – Галеркина (иногда его называют просто методом Галеркина). Прежде чем дать его описание, сделаем следующее замечание. Следует различать случаи, когда базисные функции $\{\varphi_i\}$ не завися от N и когда эта зависимость имеет место. В первом случае для подпространств H_N, являющихся линейными оболочками φ_i, $N = 1,2, \dots$,имеет место включение $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \dots$ Во втором, как правило, $\varphi_i^{(N_1)} \neq \varphi_i^{(N_2)}$ при $N_1 \neq N_2$ и отмеченного включения может не быть.

Случай оператора с самосопряженной главной частью

Пусть в нашей основной схеме выполнены следующие предположения: $K = I$, $\varphi_i = \psi_i$,

L=A+B – линейный оператор, который может быть несимметричным, неограниченным и не быть положительно определенным. В этом случае уравнение имеет вид

$$Lu = Au + Bu = f, \ f \subset H \ . \tag{2.19}$$

Будет рассмотрен лишь случай, когда A (главная часть оператора L) – самосопряженный положительно определенный оператор. Введем энергетическое пространство H_A оператор A со скалярным произведением $[u, v]$ и нормой $[u] = [u, u]^{1/2}$. Умножим (2.19) скалярно в H на произвольную функцию $v \subset D(A)$. Тогда приходим к равенствам, которым удовлетворяет решение уравнения:

$$(Au, v) + (Bu, v) = (f, v) \ , \tag{2.20}$$

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v) \ . \tag{2.21}$$

Равенство (2.21) допускает уже обобщенную постановку задачу.

Определение 2.1. Назовем обобщенным решением уравнения (2.19) функцию $u \subset H_A$, удовлетворяющую соотношению (2.21) при любых $v \subset H_A$.

Предположим, что такое обобщенное решение существует. Если при этом окажется, что $u \subset D(A)$, то в силу соотношения $[u, v] = (Au, v)$ получим

$(Au + Bu - f, v) = 0$. Поскольку по предположению $D(A)$ плотно в H, то плотным в H будет и H_A . Поэтому из последнего соотношения делаем заключение, что u удовлетворяет также (2.19).

Сформулируем метод Бубнова-Галеркина для решения рассматриваемой здесь задачи:

1. В H_A выбираются базисные функции $\{\varphi_i\}$, т.е. здесь достаточно, чтобы φ_i принадлежали H_A, а не $D(A)$.

2. Приближенное решение u_Nищется в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i \ . \tag{2.22}$$

3. Коэффициенты a_iопределяются из системы уравнений вида

$$[u_N, \varphi_i] + (Bu_N, , \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N \ , \tag{2.23}$$

или в матричной форме,

$$\hat{L}a = f, \tag{2.24}$$

где $\hat{L} = (L_{ij}),\ L_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] + (B\varphi_j, \varphi_i),\ a = (a_1, \dots, a_N)^T, f = (f_1, \dots, f_N)^T$, $f_i = (f, \varphi_i)$. После определения a_i из (2.24) строим приближенное решение по формуле (2.22).

Теорема 2.4. Пусть (2.19) имеет единственное обобщенное решение и оператор $T = A^{-1}B$ вполне непрерывен в H_A . Предположим также, что последовательность подпространств H_N , являющихся линейными оболочками $\{\varphi_i\}$, предельно плотна в H_A. Тогда при достаточно больших N метод Бубнова-Галеркина дает единственное приближение u_N . Последовательность u_N сходится по норме H_Aк обобщенному решению u .

Доказательство. Предположим (2.21) в виде $[u, v] + (AA^{-1}Bu, v) = (f, v)$,

$$[u, v] + [A^{-1}Bu, v] = (f, v).$$

В силу положительной определенности оператора A имеем $[u]^2 \geq \gamma^2 \|u\|^2, u \subset H_A, \gamma > 0$; значит, при любом $v \subset H_A$

$$|(f, v)| \leq \|f\| \|v\| \leq \frac{\|f\|}{\gamma}[v] = c[v], c = \frac{\|f\|}{\gamma}.$$

Следовательно, из теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве вытекает существование такого единственного элемента $f' \subset H_A$(легко заметить, что$f' = A^{-1}f$), что$(f, v) = [f', v]$. Поэтому

$$[u, v] + [Tu, v] = [f', v], \tag{2.25}$$

где $T = A^{-1}B$, т.е. обобщенное решение рассматриваемой задачи является решением уравнения $u + Tu = f'$, рассматриваемого в H_A и имеющего вполне непрерывный оператор T. Заметим также, что равенство (2.23) можно представить в виде

$$[u_N, \varphi_i] + [Tu_N, \varphi_i] = [f', \varphi_i], i = 1, \dots, N. \qquad (2.26)$$

Если обозначить через $\{\tilde{\varphi}_i\}$ систему, полученную путем ортогонализации $\{\varphi_i\}$ в H_A − метрике при нормировке $[\tilde{\varphi}_i] = 1$, то u может быть представлена в виде $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \tilde{\varphi}_i$, $c_i = [u, \tilde{\varphi}_i]$, причем ряд сходится в H_A и коэффициенты c_i удовлетворяют уравнения

$$0 = [u = Tu, \tilde{\varphi}_i] - [f', \tilde{\varphi}_i] = c_i + \sum_{j=1}^{\infty} c_j [T\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_i] - [f', \tilde{\varphi}_i], \ \ i = 1,2, \dots ,$$

т.е. системе

$$c_i + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{ij} c_j = b_i \ , \ i = 1,2 \dots , \qquad (2.27)$$

где $$\gamma_{ij} = [T\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_i], \ b_i = [f', \tilde{\varphi}_i] = (f, \tilde{\varphi}_i) \ .$$

Одновременно с (2.27) рассмотрим урезанную систему

$$c_i^{(N)} + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} c_j^{(N)} = b_i, \ \ i = 1, \dots, N. \qquad (2.28)$$

Полная непрерывность T в H_A и однозначная разрешимость задачи (2.19) имеет единственное решение $c^{(N)} = (c_1^{(N)}, \dots, c_N^{(N)})^T$, при этом вектор $c^{(N)} = (c_1^{(N)}, \dots, c_N^{(N)}, 0, \dots, 0)^T$ сходится к решению систему (2.27) в метрике $\|c\|_{L2} = (\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2)^{1/2}$. Это в свою очередь означает, что функция $C^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(N)} \tilde{\varphi}_i$ сходится к решению задачи в метрике $[\cdot]$. Покажем, что $u^{(N)} = u_N$. Для этого отметим, что из процесса ортогонализации$\{\varphi_i\}$ имеем

$$\tilde{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{j} \beta_{ji} \varphi_i, \beta_u \neq 0, j = 1, \dots, N,$$

где коэффициенты β_{ji}образуют нижнюю треугольную матрицу $\hat{B} = (\beta_{ji})$, в которой $\beta_{ji} = 0$ при $i > j$, $i, j = 1, .., N$. Подействуем на обе части (2.24) матрицей $\hat{B}$ и запишем систему в виде

$$\left(\hat{B}\hat{L}\hat{B}^T\right)(\hat{B}^T)^{-1} a = \hat{B} f. \qquad (2.29)$$

В силу соотношений

$$\left(\hat{B}\hat{L}\hat{B}^T\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{N} \beta_{il} \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk}[\varphi_l, \varphi_k] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \beta_{il} \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk}[T\varphi_l, \varphi_k]$$

$$= \left[\sum_{l=1}^{N} \beta_{il}\varphi_l, \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk}\varphi_k\right] + \left[T\sum_{l=1}^{N} \beta_{il}\varphi_l, \sum_{k=1}^{N} \beta_{jk}\varphi_k\right]$$

$$= \left[\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j\right] + \left[T\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j\right] = \delta_{ij} + \left[T\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j\right],$$

$$(\hat{B}f)_i = \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}\left(f, \varphi_j\right) = \left(f, \tilde{\varphi}_j\right) = b_i$$

системы (2.28), (2.29) тождественны (т.е. матрицы и векторы правых частей совпадают). Отсюда заключаем, что (2.24), наряду с (2.28), однозначно разрешима, причем $(\hat{B}^T)^{-1}\ a = c^{(N)}$ и$a = \hat{B}^T c^{(N)}$.

Но тогда

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} \beta_{ji}c_j\right)\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{i=1}^{N} \beta_{ji}\,\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} c_j \sum_{i=1}^{j} \beta_{ji}\,\varphi_i$$

$$= \sum_{j=1}^{N} c_j\tilde{\varphi}_j = u^{(N)}.$$

А это сразу же доказывает утверждение теоремы о сходимости$u^{(N)} = c_N$в метрике $[\cdot]$ к точному решению задачи.

Замечания. 1) Если выполнены условия теоремы 1, то более тонкий анализ позволяет доказать также следующие оценки:

$$\min_{c_i}\left[u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right] \le [c_N - u] \le (1 + \varepsilon_N)\min_{c_i}\left[u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right], \qquad (2.30)$$

где $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$.

2) В рассмотренной конфигурации метода Бубнова-Галеркина базисные функции (также как и в методе Ритца) можно выбирать не удовлетворяющими краевым условиям, если они оказываются естественными.

Теорема 2.5. Пусть 1) уравнение (2.19) имеет единственное обобщенное решение $u \in H_A$;

2) форма $L(u, v) = [u, v] + (Bu, v)$ является H_A - определенной и H_A - ограниченной, т.е. для нее выполнены соотношения $L(u, v) \ge \gamma_0^2[u]^2$, $L(u, v) \le \gamma_1^2[u][v], \gamma_0\gamma_1 = const$;

3) последовательность подпространств $\{H_N\}$, где $H_N -$ линейная оболочка функций $\{\varphi_i\}, i = 1, \dots, N$, предельно плотна в H_A:

$$\min_{c_i}\left[u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right] \le \varepsilon(u, N) \to 0, N \to \infty,$$

где $\varepsilon(u, N) -$ оценка погрешности аппроксимации. Тогда при любом конечном N система (2.24) однозначно разрешима, приближенное решение u_N сходится к u при $N \to \infty$ в метрике [.], а также справедлива оценка погрешности

$$[u - u_N] \le c\varepsilon(u, N).$$

Доказательство. Учитывая $[u]^2 \ge \gamma_2^2\|u\|^2$, $u \in H_A$, легко доказать положительную определенность матрицы $\hat{L}$ системы (2.24). Действительно,

$$\sum_{i,j=1}^{N} L_{ij}c_ic_j = L\left(\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right) \ge \gamma_0^2\left[\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right]^2 \ge \gamma_0^2\gamma_2^2\left\|\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right\|^2 > 0$$

при $c = (c_1, \dots, c_N)^T \ne 0 = (0, \dots, 0)^T$. Следовательно, система (2.24) имеет единственное решение $a = (a_1, \dots, a_N)^T$, которое в свою очередь однозначно определяет приближенное решение $u_N = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i$. Для доказательства сходимости запишем тождества

$$L(u, \varphi_i) = (f, \varphi_i), L(u_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \qquad L(u - u_N, \varphi_i) = 0, i = 1, \dots, N,$$

$$L(u - u_N, u - u_N) = L\left(u - u_N, u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right),$$

где $c_i, i = 1, \dots, N -$ произвольные посточнные. Учитывая $H_A -$ ограниченность и $H_A -$ определенность формы $L(u, v)$, имеем

$$\gamma_0^2[u - u_N]^2 \le L\left(u - u_N, u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right) \le \gamma_1^2[u - u_N]\left[u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right],$$

$$[u - u_N] \le \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} min\left[u - \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right] \le \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2}\varepsilon(u, N) \to 0, N \to \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. В приведенной выше теореме не требуется включения подпространств $H_{N1} \subseteq H_{N2}$ при $N_1 \le N_2$, что расширяет область ее применения.

Общий случай алгоритма Бубнова-Галеркина

Пусть $K = 1, \varphi_i = \psi_i$, но линейный оператор А может не быть симметричным, ограниченным и положительно определенным. Алгоритм Бубнова-Галеркина построения приближенного решения уравнения (2.19) состоит в следующем:

1) Выбираются базисные функции $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $\varphi_i \in D(A)$.
2) Приближенное решение ищется в виде (2.22).
3) Коэффициенты a_i определяются из условия ортогональности невязки $Lu_N - f$ к $\varphi_1, \dots, \varphi_N$:

$$(Lu - f, \varphi_i) = 0, i = 1, \dots, N \tag{2.31}$$

или

$$(\varphi_i, L\varphi_k)a_k = (f, \varphi_i), \;\; i = 1, \dots, N. \tag{2.32}$$

Отметим, что уравнения (2.32) по форме совпадают с соответствующими уравнениями алгоритма Ритца (если $\varphi_i \in D(L)$). Таким образом, если $L -$ симметричный положительно определенный оператор, то методы Бубнова-Галеркина и Ритца совпадают.

Обозначим через H_N линейную оболочку системы $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, N$, а через $LH_N -$ линейную оболочку функции $\{L\varphi_i\}$. Заметим, что если однородное уравнение $Lu = 0$ имеет только нулевое решение, то функции $L\varphi_1, \dots, L\varphi_N$ линейно независимы. Действительно, в противном случае нашлись бы $c_1, \dots, c_N$, неравные одновременно нулю и такие, что $\sum_{i=1}^{N} c_i L\varphi_i = L\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i\right) = 0$. Но тогда $\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i = 0$ и $c_i = 0, i = 1, \dots, N$.

Таким образом, приходим к противоречию в силу линейной независимости функции $\{\varphi_i\}, i = 1, \dots, N$.

В дальнейшем нам потребуется понятие $L -$полноты системы $\{\varphi_i\}$.

Определение 2.2. Последовательность линейно независимых функций $\{\varphi_i\}$, $i = 1, \dots, N$, назовем $L -$полной, если, каковы бы ни были $u \in D(L)$ и число φ_i, можно найти и постоянные $c_1, \dots, c_N$ такие , что $\left\|L\left(u - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i\right)\right\| < \varepsilon$.

Для формулировки теоремы сходимости нам необходимы будут понятия оператора ортогонального проектирования и проектора. Пусть $M_1 -$замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства H, а $M_2 -$ортогональное дополнение подпространства M_1. Известно, что всякий элемент $u \in H$ может быть единственным образом представлен в виде $u = u_1 + u_2$, где $u \in M_1, u \in M_2$. Отнесем каждому элементу u его проекцию на M_1. Полученное соответствие есть оператор в H. Обозначим его через P_1 и по определению имеем $P_1 u = u_1$. Оператор P_1 называют оператором ортогонального проектирования или ортопроектором на подпространство M_1, а $u_1 -$ортогональной проекцией u на M_1. Отметим свойства ортопроектора P_1: 1) $P_1 -$линейный самосопряженный оператор; 2) $\|P_1\| = 1$; 3) $P_1^2 = P_1$.

Чтобы иметь представление о структуре ортопроектора на конечномерное подпространство, рассмотрим следующий пример.

Сформулируем теорему сходимости алгоритма (2.32). Пусть $P_N^{(1)}, P_N^{(2)} -$ операторы ортогонального проектирования на H_N, LH_N соответственно. Введем обозначение

$$\tau_N = min \frac{\left\| P_N^{(1)} v_N \right\|}{\|v_N\|}, \tag{2.33}$$

где $v_N \in LH_N, v_N \neq 0$.

Теорема 2.6. Пусть : 1) $\tau_N \geq \tau > 0$, где τ постоянная не зависит от N; 2) система $\{\varphi_i\}$ $L-$полна. Тогда последовательность $\{Lu_N\}$ сходится к Lu при любом $f \in H$; при этом имеет место оценка

$$\|Lu - Lu_N\| \leq \left(1 + \frac{1}{\tau_N}\right) \left\| f - P_N^{(2)} f \right\| \leq \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \left\| f - P_N^{(2)} f \right\|. \tag{2.34}$$

Следствие. Если существует ограниченный оператор L^{-1}, то имеет место сходимость u_N к u при $N \to \infty$ и справедлива оценка

$$\|u - u_N\| \leq \|L^{-1}\| \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \left\| f - P_N^{(2)} f \right\|. \tag{2.35}$$

Глава 3. Дробные интегралы и производные

3.1 Определение дробных интегралов и производных и простейшие свойства

Для n-кратного интеграла известна формула

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,\varphi(t)dt, \tag{3.1}$$

Доказательство которой легко осуществить методом математической индукции. Заметив, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что в правой части в (3.1) можно придать смысл и при нецелых значениях n. Поэтому естественно определять интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Определение 3.1. Пусть $\varphi(x) \in L_1(a,b)$. Интегралы

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a, \tag{3.2}$$

$$(I_{a-}^{\alpha}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad x < b, \tag{3.3}$$

Где $\alpha > 0$, называется интегралами дробного порядка α. Первый из них называют иногда левосторонним, а второй – правосторонним. Операторы $I_{a+}^{\alpha}, I_{a-}^{\alpha}$ называют операторами дроюного интегрирования. Таким образом, дробный интеграл – конструкция, уже знакомая нам по уравнению Абеля.

Интегралы (3.2), (3.3) принято называть также дробными интегралами Римана-Лиувилля.

Чаще всего нам придется иметь дело с левосторонним дробным интегрированием, для которого будем иногда использовать обозначение: $f_{\alpha}(x) = (I_{a+}^{\alpha}f)(x)$

Дробные интегралы (3.2), (3.3), очевидно, определены на функциях $\varphi(x)L_1(a,b)$, существуя почти всюду. Далее более подробно рассмотрим действие операторов $I_{a+}^{\alpha}, I_{a-}^{\alpha}$ в классах $L_p(a,b)$ суммируемых функций, а также гельдеровских функций.

Отметим простую связь между операторами I_{a+}^{α} и I_{a-}^{α} :

$$QI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha}Q, \quad QI_{b-}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha}Q, \tag{3.4}$$

где $Q -$ оператор «отражения»: $(Q\varphi)(x) = \varphi(a+b-x)$.

Справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^{\alpha}\psi)(x)dx = \int_a^b \psi(x)(I_{a-}^{\alpha}\varphi)(x)dx, \tag{3.5}$$

Называемая иногда формулой дробного интегрирования по частям. Она доказывается непосредственной перестановкой порядка интегрирования, например, в левой части по формулу Дирихле. Формула (3.5)справедлива, если

$$\varphi(x)L_p, \psi(x) \in L_q, \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \leq\ 1 + \alpha, p \geq 1, q \geq 1,$$

Но $p \neq 1, q \neq 1$в случае,$\frac{1}{q} + \frac{1}{q} \leq\ 1 + \alpha$.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi, I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} = I_{b-}^{\alpha+\beta}\varphi, \alpha > 0, \beta > 0. \tag{3.6}$$

Тождества (3.6) выполняются в каждой точке, если$\varphi(t) \in C([a, b])$, и почти всюду, если $\varphi(t) \in L_1(a, b)$(если $\alpha + \beta \geq 1$, то и для $\varepsilon \to 0$ они справедливы в каждой точке). Доказательство свойства (3.6) получаем непосредственной проверкой:

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \frac{1}{(\alpha)(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}};$$

Меняя порядок интегрирования и делая после этого во внутреннем интеграле замену $t = \tau + s(x - \tau)$, находим

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \frac{B(\alpha, \beta)}{(\alpha)(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}};$$

Что и доказывает (3.6). Перестановка порядка интегрирования здесь обосновывается с помощью теоремы Фубини.

Свойство (3.6) называется полугрупповым свойством дробного интегрирования. Оно также справедливо и для дробного дифференцирования.

Что касается дробного дифференцирования, то его естественно ввести как операцию, обратную дробному интегрированию. С учетом обращения уравнения Абеля приходим к следующему определению.

Определение 3.2 Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, каждое из выражений

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad , \tag{3.7}$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = -\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad , \tag{3.8}$$

Называется дробной производной порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, соответственно левосторонней и правосторонней.

Дробные производные (3.7), (3.8) называют обычно производными Римана-Лиувилля. Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\alpha > 0$, а дробные производные – пока только для порядка $0 < \alpha < 1$. Прежде чем перейти к случаю $\alpha \geq 1$, дадим достаточно простой достаточный признак существование дробных производных.

Лемма 3.1. Если $f(x) \in AC([a,b])$, то функция $f(x)$имеет почти всюду производные $D_{a+}^{\alpha}f$ и $D_{b-}^{\alpha}f, 0 < \alpha < 1$, причем $D_{a+}^{\alpha}f$, $D_{b-}^{\alpha}f \in L_r(a,b), 1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$,и их можно представить также в виде

$$D_{a+}^{\alpha}f = \frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \tag{3.9}$$

$$D_{b-}^{\alpha}f = \frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}\right], \tag{3.10}$$

Утверждение леммы вытекает из следствия леммы 2.1 (принадлежность $D_{a+}^{\alpha}f, D_{b-}^{\alpha}f$ классу L_r , $1 \leq r < 1/\alpha$, проверяется непосредственно).

Отметим пример функции $f(x) = (x-a)^{-\mu}, 0 < \mu < 1$, на которой $(D_{a+}^{\alpha}f)(x)$ определена. Непосредственное вычисление с учетом свойств бета- и гамма- функции приводит к формуле Эйлера

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{(1-\mu)}{(1-\mu-\alpha)}\frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}, \tag{3.11}$$

в частности

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) \equiv 0, f(x) = \frac{1}{(x-a)^{1-\alpha}} \ , \tag{3.12}$$

Дробная производная (3.11) будет интегрируемой функцией, если $\mu + \alpha < 1$. Эта ситуация будет характерной в том смысле, что функция $f(x)$ с интегрируемой особенностью будет иметь интегрируемую дробную производную $D_{a+}^{\alpha}f$, если порядок особенности у $f(x)$ меньше чем $1-\alpha$.

Замечание 2.1. Утверждение (3.12) означает, что функция $(\chi-\alpha)^{\alpha-1}$ играет для дробной производной $D_{a+}^{\alpha}f$ ту же роль, что и постоянная для обычного дифференцирования.

Перейдём, наконец, к дробным производным больших порядков $\alpha \geq 1$. Будем пользоваться стандартными обозначениями : $[\alpha]$ −целая часть числа α,$\{\alpha\}$ −дробная часть числа α,$0<\{\alpha\}<1$, так что

$$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}. \tag{3.13}$$

Если α −целое число, то под дробной производной порядка α будем понимать обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^{\alpha}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \alpha=1,2,3,\ldots. \tag{3.14}$$

Если же $\alpha-$ не целое число, то естественно ввести $D_{a+}^{\alpha}f, D_{b-}^{\alpha}f$ по формулам

$$D_{a+}^{\alpha}f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{a+}^{\{\alpha\}}f=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f, \tag{3.15}$$

$$D_{b-}^{\alpha}f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{b-}^{\{\alpha\}}f=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}}f\,. \tag{3.16}$$

Таким образом,

$$D_{a+}^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, n=[\alpha]+1, \tag{3.17}$$

$$D_{b-}^{\alpha}f=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, n=[\alpha]+1, \tag{3.18}$$

Будем пользоваться также обозначениями

$$D_{a+}^{\alpha}f=I_{a+}^{-\alpha}f=(I_{a+}^{\alpha})^{-1}f, \alpha>0 \tag{3.19}$$

Понимая под каждым из них производную (3.7), (3.17) (аналогично истолковываются и символы $D_{b-}^{\alpha}f=I_{b-}^{-\alpha}f$). Отметим, иногда вместо D_{0+}^{α} используется обозначение $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}f(x)=(D_{0+}^{\alpha}f)(x)$.

Достаточное условие существования производных (3.17), (3.18) состоит в том, чтобы

$$\int_{a}^{x}\frac{f(t)dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\in AC^{[\alpha]}([a,b]).$$

Для выполнения этого условия достаточно, чтобы $f(x)\in AC^{[\alpha]}([a,b])$.

Нетрудно проверить, что формула (3.11) имеет место при произвольных $\alpha > 0$ и аналогично (3.12)

$$(D_{a-1-}^{\alpha} f)(x) \equiv 0, f(x) = (x-a)^{\alpha-k}, k = 1,2,\dots,1+[\alpha]. \qquad (3.20)$$

3.2. Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции

Хорошо известно, что обычное дифференцирование d/dxи интегрирование $\int_a^x \dots dt$являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т.е. $(d/dx)\int_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x)$. Однако, вообще говоря,$\int_a^x \varphi'(t)dt \neq \varphi(x)$ (так как добавляется постоянная - $\varphi(a)$). Точно также $(d/dx)^n I_{a+}^n \varphi \equiv \varphi$, но $I_{a+}^n \varphi^n \neq \varphi$, отличаясь от φ многочленом порядка. Подобным же образом для дробного дифференцирования всегда будет $D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi \equiv \varphi$, но $D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi$ не всегда совпадает с $\varphi(x)$ (так как вмешиваются функции $(x-a)^{\alpha-k}, k = 1,2,\dots,[Re\alpha]-1$, играющие роль многочленов для дробного дифференцирования). Доказываемая ниже теорема 3.4. поясняет ситуацию.

Определение 3.3. Через $I_{a+}^{\alpha}(L_p)$, $Re\ \alpha > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α от суммируемой функции:

$$f = I_{a+}^{\alpha}\ \varphi, \varphi \in L_p(a,b), 1 \leq p < \infty.$$

Описание класса $I_{a+}^{\alpha}(L_1)$ дает следующая теорема.

Теорема 3.3. Для того чтобы $f(x) \epsilon I_{a+}^{\alpha}(L_1), Re\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{n-a}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f \epsilon AC^n([a,b]), \qquad (3.21)$$

где n = $[Re\ \alpha]$ +1, и чтобы

$$f_{n-a}^{(k)}(a) = 0, k = 0,1,2,\dots,n-1. \qquad (3.22)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi, \varphi \in L_1(a,b)$. Тогда в силу полугруппового свойства (3.6) $I_{a+}^{n-\alpha} f = I_{a+}^{n}\varphi, \varphi \in L_1(a,b)$.

Достаточность. При выполнении условий (3.21) , (3.22) можем представить $f_{n-a}(x)$ в виде $f_{n-a}(x) = I_{a+}^{n}\ \varphi$, где $\varphi \in L_1(a,b)$. Следовательно, $I_{a+}^{n-\alpha} f = I_{a+}^{n}\ \varphi = I_{a+}^{n-\alpha} I_{a+}^{n}\ \varphi$ в силу полугруппового свойства (3.6). Отсюда $I_{a+}^{n-\alpha}(f - I_{a+}^{\alpha}\ \varphi) = 0$. Поскольку Re$(n-\alpha) > 0$,

$f - I_{a+}^{\alpha}\ \varphi = 0$. Теорема доказана.

Подчеркнем, что представимость функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α и существование у $f(x)$ дробной производной этого порядка – не одно и тоже. Так, для знакомой нам функции $f(x) = (x-a)^{\alpha-1}, 0 < Re\,\alpha < 1$, дробная производная $D_{a+}^{\alpha} f$ существует и тождественна равна нулю, см. (3.20). Однако функция $(x-a)^{\alpha-1}$ не представима дробным интегралом порядка α ни от какой суммируемой функции (для нее $f_{1-a}(a) \neq 0$, так что нарушено условие (3.22)). Читателю , знакомому с теорией обобщенных функций, ясно, что функция $(x-a)^{\alpha-1}$ может рассматриваться лишь как интеграл порядка α от обобщенной функции, а именно от дельта – функции Дирака $\delta(x-a)$.

Далее подробнее остановимся на самом понятии существования дробной производной. Пусть для простоты 0< $Re\alpha$ < 1. Говоря, что $D_{a+}^{\alpha} f = (d/dx I_{a+}^{1-\alpha} f)$существует почти повсюду, мы должны учитывать следующее. Известно, что существование у функции $g(x)$ суммируемой производной $g'(x)$ почти для всех еще не обеспечивает восстановления $g(x)$ через первообразную, т.е $\int_a^x g'(t)dt \neq g(x) + C$. Более того , существует монотонная непрерывная функция $g(x) \neq const$, для которой $g'(x) = 0$ почти всюду. Эти «экзотические» явления сохраняются, если иметь дело с абсолютно непрерывными функциями.

Из сказанного ясно, что предположение «дробная производная $D_{a+}^{\alpha} f$ существует почти всюду и суммируема» недостаточно для построения удовлетворительной теории, т.е. недостаточно для представимости $f(x)$ в виде дробного интеграла порядка α. Нужно вложить в это предположение более сильный смысл. Для этого введем

Определение 3.4. Пусть $Re\ \alpha > 0$. Будем говорить, что функция $f(x) \in L_1(a,b)$ имеет суммируемую дробную производную $D_{a+}^{\alpha} f$, если $I_{a+}^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b]), n = [Re\ \alpha] + 1$.

Другими словами, этим определением введено понятие, использующее только первое из двух условий (3.21),(3.22), описывающих класс $I_{a+}^{\alpha}(L_1)$.

Замечание 3.2. Если $D_{a+}^{\alpha} f = (d/dx)^n I_{a+}^{n-\alpha} f$ существует в обычном смысле, т.е. $I_{a+}^{n-\alpha} f$дифференцируема до порядка n в каждой точке, то, очевидно, $f(x)$ имеет производлную $D_{a+}^{\alpha} f$ в смысле определения 3.4.

Теорема 3.4. Пусть $Re\ \alpha > 0$. Тогда равенство

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \varphi(x) \tag{3.23}$$

Выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, а равенство

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) \tag{3.24}$$

- для функции

$$f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_1). \tag{3.25}$$

Если вместо (3.25) предположить, что функция $f(x) \in L_1(a,b)$ имеет суммируемую производную

$D_{a+}^{\alpha} f$ (в смысле определения 3.4), то (3.24), вообще говоря, неверно и заменяется формулой

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{(\alpha)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a), \tag{3.26}$$

где $n = [Re\alpha] + 1$ и $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f$. В частности, при $0 < Re\alpha < 1$

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}. \tag{3.27}$$

Доказательство. Имеем

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{(\alpha)(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{\varphi(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Меняя порядок интегрирования, после вычисления внутреннего интеграла получаем

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \varphi(s)(x-s)^{n-1} ds \tag{3.28}$$

и тогда из (3.28) в виду (3.1) следует (3.23).

Далее, (3.24) при условии (3.25) вытекает незамедлительно из (3.23) (отметим также, что (3.24) фактически было получено при доказательстве достаточной части теоремы 3.3). Остается доказать (3.26). Для этого нужно произвести те же рассуждения, что и при доказательстве достаточности в теореме 2.3, только на этот раз внеинтегральные слагаемые не будут исчезать и дадут дополнительную сумму в (3.26).

Следствие 1. Справедлив следующий аналог формулы Тейлора:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(D_{a+}^{\alpha+j} f\right)(a)}{(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j} + R_n(x), \qquad Re\alpha > 0\,, \tag{3.29}$$

Где $R_n(x) = (I_{a+}^{\alpha+n} D_{a+}^{\alpha+n} f)(x)$, в предположении, что $f(x)$ имеет суммируемую производную $D_{a+}^{\alpha+n} f$.

Действительно, формула (3.29) есть очевидная перефразировка свойства (3.26).

Следствие 2. Справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,(D_{a+}^{\alpha}g)(x)dx = \int_a^b g(x)\,(D_{b-}^{\alpha}f)(x)dx, 0 < Re\alpha < 1, \tag{3.30}$$

называемая, как и (3.5), формулой дробного интегрирования по частям. Предполагается, что $f(x) \in I_{b-}^{\alpha}(L_p), g(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_q), p^{-1} + q^{-1} \leq 1 + \alpha$.

Действительно, (3.30) следует из (3.5), если положить $D_{b-}^{\alpha}f = \varphi(x), D_{a+}^{\alpha}g = \psi(x)$и учесть (3.24).

Простое достаточное условие на функции $f(x), g(x)$для выполнимости (3.30) состоит в том, чтобы $f(x), g(x) \in ([a,b])$ а $(D_{a+}^{\alpha}g)(x)$, $(D_{b-}^{\alpha}f)(x)$существовали в каждой точке $x \in [a,b]$и были непрерывны.

3.3. Формулы композиции. Связь с полугруппами операторов.

В следующей теореме нам удобно воспользоваться единообразным обозначением (3.19) и для дробных интегралов, и для дробных производных, считая, что $I_{a+}^{\alpha} = D_{a+}^{-\alpha}$ при $Re\alpha < 0$.

Теорема 3.5. Равенство

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi \tag{3.31}$$

выполняется в каждом из следующих случаев:

1) $Re\beta > 0, Re(\alpha+\beta) > 0, \varphi(x) \in L_1(a,b)$,
2) $Re\beta < 0, Re\alpha > 0, \varphi(x) \in I_{a+}^{-\beta}(L_1)$,
3) $Re\alpha < 0, Re(\alpha+\beta) < 0, \varphi(x) \in I_{a+}^{-\alpha-\beta}(L_1)$,

(допустимы также случаи $\alpha = 0, \beta = 0$ и $\alpha + \beta = 0$ при вещественных α и β).

Доказательство. 1) В случае $Re\alpha > 0, Re\beta > 0$ полугрупповое свойство (3.31) уже установлено в (3.6). Рассмотрим случай $Re\alpha = 0, Re\beta > 0$, положив $\alpha = i\theta$. Тогда

$$\begin{aligned} I_{a+}^{i\theta}I_{a+}^{\beta}\varphi &= \frac{1}{(\beta)(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(s)ds\int_s^x (x-t)^{i\theta}\,(t-s)^{\beta-1}dt \\ &= \frac{B(1+i\theta,\beta)}{(\beta)(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(s)\,(x-s)^{i\theta+\beta}ds = \frac{d}{dx}I_{a+}^{i\theta+\beta+1}\varphi. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Так как $Re(i\theta+\beta+1)=1+Re\beta>1$, а равенство (3.31) уже доказано при $Re\alpha>0, Re\beta>0$, то $I_{a+}^{i\theta+\beta+1}\varphi=I_{a+}^{1}I_{a+}^{i\theta+\beta}\varphi=\int_a^x\left(I_{a+}^{i\theta+\beta}\varphi\right)(t)dt$, и поэтому из (3.32) следует (3.31), когда $\alpha=i\theta$.

Теперь в случае 1) осталось рассмотреть возможность $Re\alpha<0$. Имеем

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi=D_{a+}^{-\alpha}I_{a+}^{-\alpha+\beta+\alpha}\varphi=D_{a+}^{-\alpha}I_{a+}^{-\alpha}I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{3.33}$$

Последний переход справедлив ввиду (3.31), поскольку $Re(-\alpha)>0$ и $Re(\alpha+\beta)>0$, применив далее (3.23),из (3.33) получаем (3.31) и в случае $Re\alpha<0$.

2) В случае $Re\beta<0, Re\alpha>0$ по предположению имеем: $\varphi=I_{a+}^{-\beta}\psi$, где $\psi\in L_1$, поэтому $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha+\beta}I_{a+}^{-\beta}\psi$. Так как $Re(\alpha+\beta+(-\beta))>0$, то согласно случаю 1) отсюда следует, что $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha}\psi=I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{-\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi$.

3) В оставшемся случае по предположению $\varphi=I_{a+}^{-\alpha-\beta}\psi, \psi\in L_1$, и тогда $I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi=I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}I_{a+}^{-\alpha-\beta}\psi=I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{-\alpha}\psi$ согласно случаю 1). Таким образом, $I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi=D_{a+}^{-\alpha}I_{a+}^{-\alpha}\psi$, откуда в силу (3.23) и следует (3.31).

Остается заметить, что случаи $\alpha=0, \beta=0$ тривиальны, а случай $\alpha+\beta=0$ совпадает с (3.23) или (3.24). Теорема доказана.

Замечание 3.3. В теореме 3.5. остались неохваченными случаи: 1) $Re\beta=0, Re\alpha>0$; 2) $Re(\alpha+\beta)=0$, $Re\beta>0$ (но случаи $\alpha+\beta=0, Re\beta>0$ содержатся в теореме 3.4); 3) $Re\alpha=0, Re\beta<0$. Можно показать, что утверждения теоремы 3.5 выполняются и в этих случаях, если сузить класс допускаемых функций соответственно условиями: 1) существует суммируемая производная мнимого порядка $D_{a+}^{-\beta}\varphi$; 2) существует суммируемая производная мнимого порядка $D_{a+}^{-\alpha-\beta}\varphi$; 3) существуют суммируемые производные $D_{a+}^{-\beta}\varphi$ и $D_{a+}^{-\alpha-\beta}\varphi$. Все эти условия и условия теоремы 3.5 после объединения приводят к следующему утверждению: пусть $\varphi\in L_1(a,b)$, причем существуют и суммируемы $I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi$ и при $Re\beta\geq 0$ выполняется равенство (3.31).

Замечание 3.4. В случае 2) теоремы 3.5 при нарушении условия $\varphi\in I_{a+}^{-\beta}(L_1)$ равенство (3.31) не выполняется. Если вместо этого условия потребовать лишь, что функция $\varphi(x)$имеет суммируемую дробную производную $D_{a+}^{-\beta}\varphi$ (в смысле определения 3.4), то равенство (3.31) заменится на соотношение

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{n+\beta}^{(n-k-1)}(a)}{(\alpha - k)} (x-a)^{\alpha-k-1}, \qquad (3.34)$$

Где $n = [-Re\beta] + 1$ и $\varphi_{n+\beta}(x) = I_{a+}^{n+\beta} \varphi$, которое выводится из (3.26) с помощью свойства (3.31).

Доказанное свойство (3.31) дробных интегралов и производных называется полугрупповым свойством. Этот термин связан с понятием полугруппы операторов. Приведем соответствующее определение, считая для простоты параметр α вещественным.

Определение 3.5. Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $T_\alpha, \alpha \geq 0$, в банаховом пространстве X образует полугруппу, если

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

$$T_0 \varphi = \varphi, \varphi \in \mathrm{X}.$$

Полугруппа операторов называется сильно непрерывной, если

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \|T_\alpha \varphi - T_{\alpha 0} \varphi\|_{\mathrm{X}} = 0, 0 \leq \alpha_0 < \infty, \qquad (3.36)$$

для каждого $\varphi \in \mathrm{X}$. Полугруппа называется непрерывной в равномерной (операторной) топологии, если предел (3.36) существует в операторной топологии, т.е. $\lim \|T_\alpha - T_{\alpha 0}\| = 0$ при $\alpha \to \alpha_0$.

Теорема 3.6. Операторы дробного интегрирования образуют в $L_p(a,b), p \geq 1$, полугруппу, непрерывную в равномерной топологии для всех $\alpha \geq 0$.

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что операторы дробного интегрирования ограничены в $L_p(a,b)$, т.е. имеют место следующие оценки:

$$\|I_{a+}^{\alpha} \varphi\|_{L_p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{Re\alpha}}{Re\alpha |T(\alpha)|} \|\varphi\|_{L_p(a,b)}, \qquad Re\alpha > 0, \qquad (3.37)$$

$$\|I_{b-}^{\alpha} \varphi\|_{L_p(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{Re\alpha}}{Re\alpha |T(\alpha)|} \|\varphi\|_{L_p(a,b)}, \qquad Re\alpha > 0. \qquad (3.38)$$

Это проверяется несложными преобразованиями с помощью обобщенного неравенства Минковского. Свойство (3.35), т.е. равенство (3.31), доказано в теореме 2.5. Остается выяснить характер непрерывности полугруппы. Пусть $\alpha_0 \geq 0$. Имеем

$$I_{a+}^{\alpha_0} \varphi - I_{a+}^{\alpha} \varphi = \left[\frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{(\alpha)}\right] \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha_0}} + \frac{1}{(\alpha)} \int_a^x [(x-t)^{\alpha_0 - 1} - (x - t)^{\alpha-1}] \varphi(t)dt = A\varphi + B\varphi .$$

Оценим $\|A\varphi\|_{L_p}$,$\|B\varphi\|_{L_p}$. В силу (3.37)

$$\|A\varphi\|_{L_p} \leq \left|1 - \frac{(\alpha_0)}{(\alpha)}\right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{(1+\alpha_0)} \|\varphi\|_{L_p} . \tag{3.39}$$

Продолжая$\varphi(x)$нулем за пределы $[a, b]$, получим

$$|B\varphi| \leq \frac{1}{(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} |\varphi(x-t)| dt \ .$$

Следовательно, в силу неравенства Минковского

$$\|B\varphi\| \leq \frac{1}{(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} dt \left(\int_a^b |\varphi(x-t)|^p \, dx \right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{1}{(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} dt \|\varphi\|_{L_p} . \tag{3.40}$$

Собирая оценки (3.39), (3.40), получаем

$$\frac{\left\|(I_{a+}^{\alpha} - I_{a+}^{\alpha_0})\varphi\right\|}{\|\varphi\|} \leq \left|1 - \frac{(\alpha_0)}{(\alpha)}\right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{(1+\alpha_0)} + \frac{1}{(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} dt \ .$$

Замечая, что в интервале справа можно перейти к пределу при $\alpha \to \alpha_0$ и что функция (α) непрерывна при $\alpha > 0$ и $(\alpha) \neq 0$, приходим к равенству $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \left\|I_{a+}^{\alpha} - I_{a+}^{\alpha_0}\right\| = 0$.

$$(D^{\alpha} - f) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{3.41}$$

Связь между$I_+^{\alpha}\varphi$ и $I_-^{\alpha}\varphi$, аналогичная (3.4), имеет вид

$$QI_{\pm}^{\alpha}\varphi = I_{\mp}^{\alpha}Q\varphi, \qquad (Q\varphi)(x) = \varphi(-x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.42}$$

Операторы $I_{\pm}^{\alpha}$ подчиняются простым правилам перестановочности с операторами сдвига и растяжения. Введем для последних обозначения

$$(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x-h), x, h \in R^1 \tag{3.43}$$

$$(\Pi_{\delta}\varphi)(x) = \varphi(\delta x), x \in R^1, \delta > 0 \ . \tag{3.44}$$

Легко проверяется, что

$$\tau_h I_{\pm}^{\alpha}\varphi = I_{\pm}^{\alpha}\tau_h\varphi \ , \tag{3.45}$$

$$\Pi_{\delta} I_{\pm}^{\alpha}\varphi = \delta^{\alpha} I^{\alpha} \Pi_{\delta}\varphi \tag{3.46}$$

Свойство (3.46) справедливо и на полуоси для дробного интеграла $I_{0+}^{\alpha}\varphi$:

$$\Pi_\delta I_{0+}^\alpha \varphi = \delta^\alpha I_{0+}^\alpha \Pi_\delta \varphi \tag{3.47}$$

Подобно случаю конечного интервала выполняется полугрупповое свойство

$$I_+^\alpha I_+^\beta \varphi = I_+^{\alpha+\beta}\varphi, \qquad I_-^\alpha I_-^\beta \varphi = I_-^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{3.48}$$

Если функция φ «достаточно хороша», то равенства (3.48) выполняются при всех $\alpha > 0,\ \beta > 0$, что проверяется, как в случае (3.6). В рамках же пространства $L_p(R^1)$ равенства (3.48) выполняются для тех $\alpha > 0,\ \beta > 0$, при которых $\alpha + \beta < 1/p$.

Справедливы формулы «дробного интегрирования по частям»:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_+^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx, \tag{3.49}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(g)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,(f)(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(g)(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,(f)(x)dx. \tag{3.50}$$

Формула (3.49) получается, как и аналогичная ей формула (3.5), перестановкой порядка интегрирования. Формула (3.50) вытекает из (3.49) после переобозначения $I_+^\alpha \psi = g,\ I_-^\alpha \varphi = f$. Таким путем доказываются эти формулы на «достаточно хороших» функциях. Формулу (3.49) нетрудно обосновать для $\varphi(x)L_p,\ \psi(x)L_r, p > 1, r > 1, 1/p + 1/r = 1 + \alpha$.

Это делается аналогично обоснованию формулы (3.5).

Формулы (3.49), (3.50) имеют место также и на полуоси.

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)(I_0^\alpha \psi)(x)dx = \int_0^{\infty} \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx, \tag{3.49$'$}$$

Интегралы чисто мнимого порядка $\alpha = i\theta$определяются как

$$\left(I_+^{i\theta}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty} t^{i\theta}\,\varphi(x-t)dt \tag{3.51}$$

(на «достаточно хороших» функциях).

Укажем ряд элементарных функций $\varphi(x)$, для которых $I_\pm^\alpha \varphi$ вычисляются также в терминалах элементарных функций.

1. Для $\varphi(t) = e^{\pm t}$ имеем
$$(I_\pm^\alpha \varphi)(x) = e^{\pm x}, Re\alpha > 0, \tag{3.52}$$

при одинаковом выборе знаков.

Действительно, $I_+^\alpha(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int e^{x-t}t^{\alpha-1}dt = e^x$более обще:

$$I_\pm^\alpha(e^{\pm ax}) = a^{-a}e^{\pm ax}, \qquad Rea > 0, Re\alpha > 0, \tag{3.53}$$

что обосновывается аналогично.

2. Из (3.53) следуют формулы

$$I_\pm^\alpha(e^{\pm ax}sinbx) = \frac{e^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\sin(bx \mp \alpha\varphi), \tag{3.54}$$

$$I_\pm^\alpha(e^{\pm ax}cosbx) = \frac{e^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\cos(bx \mp \alpha\varphi), \tag{3.55}$$

где $\alpha \geq 0, b \geq 0,\ a^2+b^2 > 0, \varphi = \arg(a+bi) \in [0,\pi/2]$ и $Re\alpha > 0$, кроме случая $a = 0$, когда $a = 0$, когда $0 < Re\alpha < 1$. В последнем случае

$$I_\pm^\alpha(sinbx) = b^{-\alpha}\sin\left(bx \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right),\ \ I_\pm^\alpha(cosbx) = b^{-\alpha}\cos\left(bx \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right), \tag{3.56}$$

3. Для $\varphi(x) = \begin{cases}(x-a)^{\beta-1}, x > a,\\ 0, x \leq a,\end{cases}$ $Re\beta > 0$, из (2.44) имеем

$$(I_+^\alpha\varphi)(x) = \begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, x > a,\\ 0, x \leq a.\end{cases}$$

4. При $0 < Re\alpha < \mu$ справедливы формулы

$$I_+^\alpha\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(1 \pm ix)^\mu}\right] = e^{\pm\frac{\alpha\pi i}{2}}\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(1 \pm ix)^{\mu-\alpha}}, \tag{3.57}$$

$$I_-^\alpha\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(x \pm i)^\mu}\right] = \frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(x \pm i)^{\mu-\alpha}}, \tag{3.58}$$

где степенные функции $(1 \pm ix)^\mu$, $(x \pm i)^\mu$ поднимаются, как обычно, как соответствующие значения главной ветви аналитической функции z^μ в плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси:

$$z^\mu = |z|^\mu e^{i\mu\arg z}, \lim_{\varepsilon\to 0}\arg z|_{z=t+i\varepsilon, t>0} = 0 \tag{3.59}$$

В соответствии с выбором (3.59) можно записать

$$(\pm ix + 1)^\mu = (1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}e^{\pm i\mu\,\mathrm{arctg}\,x}, x \in R^1 \tag{3.60}$$

$$(x \pm i)^\mu = (1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}e^{\pm i\mu\,\mathrm{arcctg}\,x}, x \in R^1$$

Формулу (3.57) можно переписать также в виде

$$I_{+}^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^{\mu}}\right]=e^{\pm\alpha\pi i}\,\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(1\pm ix)^{\mu-\alpha}}\,, \tag{3.61}$$

Заметим, что формулы (3.57), (3.58) выводятся одна из другой на основании свойства (3.42), если учесть, что $(1\pm ix)^{\mu}|_{x=-\xi}=e^{\mp\mu\frac{\pi}{2}}(\xi\pm i)^{\mu}$ в соответствии с (3.60). Поэтому достаточно будет доказать одну из формул (3.57),(3.58).

3.4. Дробные интегралы и производные Вейля периодических функций

Обычная форма I_{a+}^{α} и I_{b-}^{α} дробного интегрирования по Риману-Лиувиллю оказывается неудобной в теории тригонометрических рядов, имеющий дело с периодическими функциями. Естественно, что для периодических функций операция дробного интегродифференцирования должна быть введена так, чтобы она переводила их в периодические (с тем же периодом). Дробное интегродифференцирование по Риману-Лиувиллю этим свойством не обладает. В теории тригонометрических рядов пользуются другим определением дробного интегродифференцирования, предложенным Г.Вейлем.

Определения. Связь с рядами Фурье.

Пусть $\varphi(x)$ есть 2π −периодическая функция на R^1 и пусть

$$\varphi(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k e^{ikx},\;\;\varphi_k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ikx}\,\varphi(x)dx, \tag{3.62}$$

- ее ряд Фурье. Всюду будут рассматриваться функции с нулевым средним значением по периоду:

$$\varphi_0=\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx=0, \tag{3.63}$$

т.е. мы «отсеиваем» постоянные, рассматривая дробные интегралы периодических функций. Напомним, что свертка

$$(A\varphi)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}a(t)\,\varphi(x-t)dt \tag{3.64}$$

Двух периодических функций имеет своим рядом Фурье

$$(A\varphi)(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\varphi_k\,e^{ikx} \tag{3.65}$$

где $a_k, \varphi_k -$ коэффициенты Фурье функций $a(x)$, $\varphi(x)$. Последовательность $\{\alpha_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется иногда мультипликатором Фурье оператора свертки А.

Так как $\varphi^{(n)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^n \varphi_k\, e^{ikx}$, то определим, следуя Г.Вейлю, дробное интегрирование так, чтобы

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{(\pm ik)^{\alpha}} e^{ikx} \tag{3.66}$$

(с учетом (3.63)) и аналогично чтобы для дробного дифференцирования

$$D_{\pm}^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm ik)^{\alpha}\, \varphi_k e^{ikx}\,. \tag{3.67}$$

Тем самым будет соблюдено требование, чтобы дробный интеграл или производная $2\pi -$ периодической функции были также $2\pi -$ периодическими функциями. Здесь $(\pm ik)^{\alpha} = |k|^{\alpha} e^{\pm\frac{\alpha\pi i}{2} signk}$. Согласно (3.64), (3.65), определение (3.66) можно истолковать в виде

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\, \psi_{\pm}^{\alpha}(t)dt, \qquad \alpha > 0, \tag{3.67}$$

где

$$\psi_{\pm}^{\alpha}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^{\alpha}}\,. \tag{3.68}$$

Штрих обозначает пропуск слагаемого с номером $k = 0$. Конструкцию (3.67) и будем называть дробным интегралом Вейля.

Ввиду (3.66) ясно , что $I_{\pm}^{(\alpha)} I_{\pm}^{(\beta)} = I_{\pm}^{(\alpha+\beta)}$ при одинаковом выборе знаков. Заметим, что случаи целых $\alpha = 1,2,3\ldots$ отвечают обычному интегрированию (при котором из всех первообразных выбирается та, у которой среднее значение по периоду равно нулю). В дальнейшем рассматривается случай $0 < \alpha < 1$.

Дробную производную по Вейлю естественно определить при $0 < \alpha < 1$ равенством

$$D_{\pm}^{(\alpha)} f = \pm \frac{d}{dx} I_{\pm}^{(1-\alpha)} f \tag{3.69}$$

Лемма 3.2. На 2π −периодических функциях $\varphi(t) \in L_1(0,2\pi)$ с нулевым средним значением дробный интеграл Вейля совпадает с дробным интегралом Римана-Лиувилля по всей прямой:

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = I_+^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, 0 < \alpha < 1 \tag{3.70}$$

Где интеграл в правой части понимается как условно сходящийся:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x-2n\pi}^{x} \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{3.71}$$

Введем сингулярный оператор с ядром Гильберта

$$H\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} 2\pi\varphi(t)ctg\frac{x-t}{2}dt, \tag{3.72}$$

связывающий сопряженные тригонометрические ряды:

$$\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}, \qquad H\varphi \sim -i\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \, signk\varphi_k e^{ikx}. \tag{3.73}$$

Теорема 3.7. Для $\varphi(t) \in L_p(0,2\pi), 1 < p < \infty$, выполняются следующие соотношения:

$$I_-^{(\alpha)} = cos\alpha\pi I_+^{(\alpha)}\varphi + sin\alpha\pi H I_+^{(\alpha)}\varphi, \tag{3.74}$$

$$I_+^{(\alpha)} = cos\alpha\pi I_-^{(\alpha)}\varphi - sin\alpha\pi H I_-^{(\alpha)}\varphi. \tag{3.75}$$

Глава 4. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для дробно-интегральных и дробно-дифференциальных уравнений

4.1.Случай $A = I^{(\alpha)}$

Рассматривается уравнение

$$I^{(\alpha)}u + Tu = f, \qquad u, f \in L_2[0,2\pi] \tag{4.1}$$

Где $I^{(\alpha)} = (I_+^{(\alpha)} + I_-^{(\alpha)})/2\cos(\alpha\pi/2)$. $I_\pm^{(\alpha)}$ − дробные интегралы Вейля, u − неизвестная, f − заданная функция, а T − некоторый оператор. Оператор $(I^{(\alpha)} + T)$ линейный, и, вообще говоря, в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

Оператор$I^{(\alpha)}$действует по правилу

$$I^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{u_k}{|k|^\alpha} e^{ikx}. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. $I^{(\alpha)}$ − положительно определенный оператор.

Доказательство. $I^{(\alpha)}$ будет положительно определенным, если $(I^{(\alpha)}u, u) > 0$.

Т.к. система e^{ikx} полна в $L_2(0,2\pi)$, то

$$(I^{(\alpha)}u, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(I^{(\alpha)}u, e^{ikx}\right)\left(u, e^{ikx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{u_k^2}{|k|^\alpha} > 0.$$

Лемма 4.2. $I^{(\alpha)}$ − симметричный оператор.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $I_+^{(\alpha)}u$и vдля любых $u, v \in L_2(0,2\pi)$

$$\begin{aligned}(I_+^{(\alpha)}u, v) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x-t) \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ikt}}{(ik)^\alpha} dt v(x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ik(x-t)}}{(ik)^\alpha} dt v(x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x) \frac{e^{ikx}}{(-ik)^\alpha} dx u(t) dt = \left(u, I_-^{(\alpha)}v\right).\end{aligned}$$

Аналогично для $I_-^{(\alpha)}$:

$$\left(I_{-}^{(\alpha)}u, v\right) = \left(u, I_{+}^{(\alpha)}v\right).$$

Значит $I^{(\alpha)}$будет симметричным оператором, т.к. он является суммой $I_{+}^{(\alpha)}$ и $I_{-}^{(\alpha)}$. Учитывая это, введем скалярное произведение и норму

$$[u, v] = \left(I^{(\alpha)}u, v\right), \qquad [u] = [u, u]^{1/2}.$$

Скалярное произведение будет иметь вид

$$[u, v] = \left(I^{(\alpha)}u, v\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{u_k e^{ikx}}{|k|^{\alpha}} v(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{u_k v_k}{|k|^{\alpha}}.$$

Пополняя $D(I^{(\alpha)})$ по введенной норме получим $H_I -$ энергетическое пространство. Умножая исходное уравнение на произвольную функцию $v \in D(I^{(\alpha)})$, получаем равенство, которому удовлетворяет решение исходного уравнения

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) допускает обобщенную постановку задачи. Обобщенным решением уравнения (4.1) назовем функцию $u \in H_I$, удовлетворяющую соотношению (4.3) для любой $v \in H_I$.

4.2. Метод Бубнова-Галеркина для случая $A = I^{(\alpha)}$

Сформулируем метод Бубнова-Галеркина для решения этой задачи.

1) В H_I выбираются базисные функции φ_j.

2) Приближенное решение ищется в виде

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j. \tag{4.4}$$

3) Коэффициенты a_j определяются из системы уравнений вида

$$[u_N, \varphi_k] + (Tu_N, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \qquad k = 1 \dots N. \tag{4.5}$$

Учитывая (4.4) и линейность введенного и обыкновенного скалярных произведений, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} a_j[\varphi_j, \varphi_k] + \sum_{j=1}^{N} a_j[T\varphi_j, \varphi_k] = (f, \varphi_k), \;\; k = 1 \dots N. \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. Пусть 1) уравнение (4.1) имеет единственное решение при данной правой части.

2) Форма $L(u,v) = [u,v] + (Tu,v)$ является $H_I -$ определенной и H_I −ограниченной, т.е. $L(u,u) \geq \gamma_0^2[u]^2$ и $L(u,v) \leq \gamma_1^2[u][v]$, $\gamma_0, \gamma_1 = const$.

3) Последовательность подпространств $H_N -$ линейных оболочек функции $\varphi_j, j = 1, \dots, N -$ является предельно плотной в H_I.

Тогда при любом конечном N система (4.5) однозначно разрешима, приближенное решение u_N сходится к точному при $N \to \infty$ по метрике [.] и справедлива оценка погрешности

$$[u - u_N] \leq c\varepsilon(u,N),$$

где $\varepsilon(u,N) -$ заданная функция от N (оценка погрешности аппроксимации), удовлетворяющая неравенству

$$\min_{c_j} \left\| I^{(\alpha)} \left(u - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \right) \right\| \leq \varepsilon(u,N) \, .$$

4.3 Частный случай

Рассмотрим частный случай уравнения (4.1). В качестве оператора T возьмем следующий

$$(Tu)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t,x)\, u(t) dt \, .$$

Будем считать, что он обладает всеми нужными свойствами.

В качестве базисных функций выберем e^{ikx} . В формуле (4.4) возьмем $j = -N, \dots, N$:

$$u_N = \sum_{j=-N}^{N} a_j \, e^{ijx} \, .$$

Тогда первое слагаемое из уравнения (4.6) будет

$$\sum_{j=-N}^{N} {}' a_j \left[\varphi_j, \varphi_k\right] = \frac{a_k}{|k|^\alpha} \, ,$$

второе

$$\sum_{j=-N}^{N} {}' a_j \left(T\varphi_j, \varphi_k\right) = \sum_{j=-N}^{N} {}' a_j \left(h_j, \varphi_k\right) = \sum_{j=-N}^{N} {}' a_j \, h_{-j,k}.$$

Значит система примет вид

$$\frac{a_k}{|k|^\alpha} + \sum_{j=-N}^{N}{}' a_j\, h_{-j,k} = f_k\,.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{|N|^\alpha} + h_{N,-N} & \dots & h_{j,-N} & \dots & h_{-N,-N} \\ h_{k,-N} & \dots & \frac{1}{|k|^\alpha} + h_{k,-N} & \dots & h_{k,N} \\ h_{N,N} & \dots & h_{j,N} & \dots & \frac{1}{|N|^\alpha} + h_{-N,N} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{-N} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{-N} \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

А оценка, которой будет удовлетворять погрешность, примет вид

$$\min_{c_j} \left\| I^{(\alpha)} \left(u - \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx} \right) \right\| \le \varepsilon(u, N)\,.$$

4.4. Случай $A = D^\alpha$

Теперь рассмотрим уравнение

$$D^{(\alpha)} u + Tu = f, \qquad u, f \in L_2[0,2\pi] \tag{4.7}$$

где $D^{(\alpha)} = \frac{D_+^{(\alpha)} D_-^{(\alpha)}}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$. $D_\pm^{(\alpha)}$ – дробные производные Вейля, u – неизвестная, f – заданная функция, а T – некоторый оператор. Оператор $(D^{(\alpha)} + T)$ линейный, и, вообще говоря, в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

Оператор $D^{(\alpha)}$ действует по правилу

$$D^{(\alpha)} u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' |k|^\alpha\, u_k e^{ikx}\,. \tag{4.8}$$

Лемма 4.3. $D^{(\alpha)}$ – положительно определенный оператор.

Доказательство. $D^{(\alpha)}$ будет положительно определенным, если

$$(D^{(\alpha)} u, u) > 0.$$

Т.к. система e^{ikx} полна в $L_2[0,2\pi]$, то

$$(D^{(\alpha)} u, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (D^{(\alpha)} u, e^{ikx})\left(u, e^{ikx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\alpha u_k^2 > 0\,.$$

Лемма 4.4. $D^{(\alpha)}$ – симметричный оператор.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $D_{+}^{(\alpha)}u$ и v для любых $u, v \in L_2[0,2\pi]$

$$\left(D_{+}^{(\alpha)}u, v\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x-t) \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(ik)^{\alpha}\, e^{ikt} dt\, v(x)dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(ik)^{\alpha}\, e^{ik(x-t)} dt\, v(x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'(-ik)^{\alpha}\, e^{ikx}\, dx\, u(t)dt = \left(u, D_{-}^{(\alpha)}v\right).$$

Аналогично для $D_{-}^{(\alpha)}$:

$$(D_{-}^{(\alpha)}u, v) = \left(u, D_{+}^{(\alpha)}v\right).$$

Значит $D^{(\alpha)}$ будет симметричным оператором, т.к. он является суммой $D_{+}^{(\alpha)}$ и $D_{-}^{(\alpha)}$. Учитывая это введем скалярное произведение и норму

$$[u, v] = \left(D^{(\alpha)}\, u, v\right), \qquad [u] = [u, u]^{1/2}.$$

Пополняя $D(D^{(\alpha)})$ по введенной норме получим H_D – энергетическое пространство. Умножая исходное уравнение на произвольную функцию $v \in D(D^{(\alpha)})$, получаем равенство, которому удовлетворяет решение исходного уравнения

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \tag{4.9}$$

Равенство (4.9) допускает обобщенную постановку задачи. Обобщенным решение уравнения (4.7) назовем функцию $u \in H_D$, удовлетворяющую соотношению (4.9) для любой $v \in H_D$.

4.5. Метод Бубнова-Галеркина для случая $A = D^{(\alpha)}$

Сформулируем метод Бубнова-Галеркина для решения задачи в случае $A = D^{(\alpha)}$.

1) В H_D выбираются базисные функции φ_j.
2) Приближенное решение ищется в виде
$$u_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j.$$
3) Коэффициенты a_j определяются из системы уравнений вида
$$[u_N, \varphi_j] + (Tu_N, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \;\; j = 1 \dots N. \tag{4.10}$$

Теорема 4.2. Пусть 1) уравнение (4.7) имеет единственное решение при данной правой части.

2) Форма $L(u,v) = [u,v] + (Tu,v)$ является $H_D -$ определенной и H_D $-$ограниченной, т.е. $L(u,u) \geq \gamma_0^2 [u]^2$ и $L(u,v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \gamma_0, \gamma_1 = const.$

3) Последовательность подпространств $H_N -$линейных оболочек функции $\varphi_j, j = 1 \dots N -$ является предельно плотной в H_D.

Тогда при любом конечном N система (4.10) однозначно разрешима, приближенное решение u_N сходится к точному при $N \to \infty$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности
$$[u - u_N] \leq c\varepsilon(u, N),$$
где $\varepsilon(u, N) -$ заданная функция от N (оценка погрешности аппроксимации), удовлетворяющая неравенству
$$\min_{c_j} \left\| D^{(\alpha)} \left(u - \sum_{j=1}^{N} c_j \, \varphi_j \right) \right\|.$$

Глава 5. Прямые методы решения дробно-дифференциальных уравнений механики сплошных сред

Значительное количество реальных процессов не укладываются в представления механики сплошной среды и требуют привлечения представлений о фрактальности среды, в которой эти процессы происходят. К таким процессам, например, относятся диффузия примесей в грунте, распространение тепла в аэрогелях. Для их описания используется модифицированный соответствующим образом закон Фика (Фурье) [1], что требует привлечения математического аппарата дробного интегро-дифференциального исчисления [2]. Так в [3] Ю.Н. Работнов ввел обобщение реологического уравнения, построенного им для описания поведения наследственных сред, на случай производных дробного порядка. Обоснование применения производных дробного порядка в моделях вязкоупругости дано в [4,5]. Физическая интерпретация дробного интеграла дана в [6].

5.1 Определения дробной производной.

Одна из проблем, возникающих при использовании дробных производных, заключается в том, что не существует их однозначного определения. Численные методы решения задач для уравнений с дробными производными привязаны к виду выбранной производной, поэтому возникает необходимость анализа и сравнения результатов, полученных при использовании разных определений и численных методов. Такое сравнение проводилось в [7,8] на примере задачи о распространении теплового импульса.

Использовались следующие определения дробных производных [2]:

1. Определение Римана-Лиувилля

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}}, \qquad x > a, \qquad 0 \le m-1 < \alpha \le m$$

2. Определение Капуто

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{u^{(m)}(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-m+1}}, \qquad x > a, \qquad 0 \le m-1 < \alpha \le m$$

3. Определение Грюнвальда-Летникова

$$D_x^\alpha u(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^\alpha u(x)}{h^\alpha}, \qquad \Delta_h^\alpha u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(x-(k-1)h)$$

5.2 Постановка начально-краевой задачи на примере уравнения теплопроводности.

Сравнения методов, основанных на разных определениях дробных производных, проводились на тестовых задачах теплопроводности, затем проверялись на более сложных задачах с известными решениями.

Рассмотрим постановку задачи в простейшем случае:

$$D_t^{\gamma} u(x,t) = C D_x^{\alpha} u(x,t), \qquad 0 < \gamma \le 2, \qquad 1 \le \alpha \le 2$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \text{при } 0 < \gamma \le 1, \qquad 1 \le \alpha \le 2$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,1) = u_1(x), \qquad \text{при } 1 < \gamma \le 2, \qquad 1 \le \alpha \le 2$$

В зависимости от величины параметров дробных производных, решения сформулированной задачи описывают различные физические процессы.

При фиксированном α: 0<γ<1 – наблюдаем субдиффузию, γ=1 – обычная, классическая диффузия, 1<γ<2 – выраженная супердиффузия, при γ=2 – получаем классическое волновое уравнение.

При фиксированном γ: наблюдается классическая диффузия при α=2, эффекты супердиффузии при 1<α<2 и классический перенос при α=1.

На основании проведенных сравнений полученных решений с известными, были выбраны следующие численные методы для основных определений дробных производных:

- метод, описанный в статье [9], основанный на определениях Римана-Лиувилля и Капуто,
- конечно-разностные аппроксимации, основанные на определении в смысле Грюнвальда-Летникова.

В последнем случае наиболее удобной в использовании является модификация разностной схемы, известная как метод Эйлера [10], т.к. данная схема является безусловно устойчивой при любых параметрах дробных производных.

5.3 Общее дифференциальное уравнение вязкоупругого тела.

Общее уравнение вязкоупругих сред имеет вид:

$$\left[1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right] \varepsilon(t), \quad \beta_k = k + \beta - 1,$$

$$0 \le \beta \le 1$$

Данное уравнение при соответствующем выборе параметров описывает различные варианты моделей. Так при p=q=1 имеем:

при a=b=0 уравнение выражает закон Гука; a=m=0 - вязкая жидкость; a=0 - среда Фойгта; m=0 - среда Максвелла.

Подробнее рассмотрим основное уравнение модели Максвелла:

$$\left[1 + b\frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right]\sigma(t) = E\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\varepsilon(t), \qquad 0 < \alpha \leq 1, \qquad 0 < \beta \leq 1$$

где b – неотрицательный параметр релаксации, а используемые дробные производные рассматриваются в смысле Римана - Лиувилля. Результатом расчета являются диаграммы деформирования фрактальной среды, причем показатели дробных производных напрямую зависят от фрактальной размерности среды.

5.4 Задача о деформировании тонкого стержня.

Система уравнений, описывающих одноосное деформирование тонкого стержня, сформулирована как обобщение системы из [11], и имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^{\gamma_1}h_1}{dt^{\gamma_1}} = \dot{\varepsilon} - \dfrac{2}{3}\dfrac{h_1 - h_2}{\tau}, \\ \dfrac{d^{\gamma_2}S}{dt^{\gamma_2}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{h_1 - h_2}{\tau}\dfrac{\sigma_1}{\rho_0\delta T}, \\ \sigma_2 = 0. \end{cases} \qquad 0 < \gamma_1, \gamma_2 < 2$$

Здесь $\boldsymbol{h_1}$ $\boldsymbol{h_2}$ - главные удлинения, $\boldsymbol{\sigma_1}$ $\boldsymbol{\sigma_2}$ - главные напряжения, $\boldsymbol{\dot{\varepsilon}}$ - скорость деформации, $\boldsymbol{\tau}$ - время релаксации касательных напряжений, $\boldsymbol{\delta}$ – степень сжатия, $\boldsymbol{S}$ – энтропия, $\boldsymbol{T}$ – температура.

Результаты решения в форме диаграмм деформирования для различных значений степеней дробных производных показаны на рисунках 1,2. Полученные результаты демонстрируют влияние значений порядка производных на вид диаграмм деформирования.

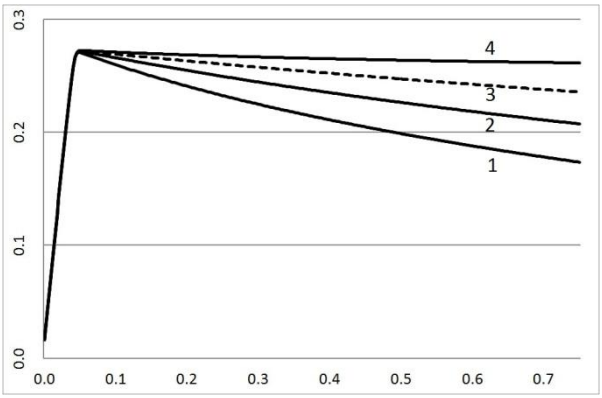

Рис 1. Диаграммы деформирования при фиксированном значении параметра γ_1=1 и различных значениях параметра γ_2.
1: γ_2 =0.4,
2: γ_2 =0.8,
3: γ_2 =1,
4: γ_2 =1.1,

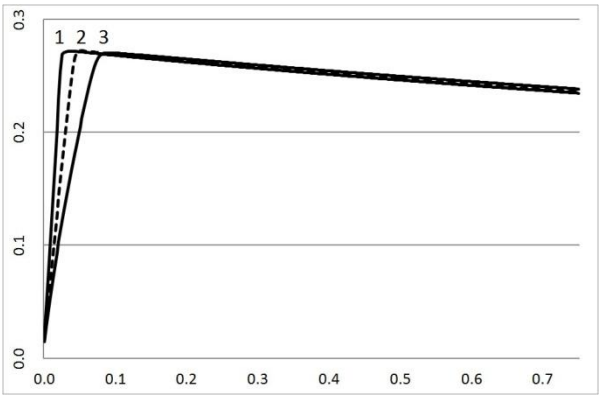

Рис 2. Диаграммы деформирования при фиксированном значении параметра γ_2=1 и различных значениях параметра γ_1.
1: γ_1 =0.8,
2: γ1 =1,
3: γ1 =1.1.

Заключение

При постановке конкретных задач механики сплошных сред зачастую возникают начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными. Аппарат дробно-дифференциального исчисления все чаще используется для учета наследственных свойств и фрактальности строения реальных материалов. Развиваются аналитические методы решения задач, однако наибольшее распространение получили численные методы. В данной работе рассмотрены численные методы, основанные на разных определениях дробных производных, и их применение к решению конкретных задач теплопроводности (диффузии). Проведенный анализ результатов позволил выделить определения и методы, наиболее перспективные с точки зрения адекватности описания реальных процессов диффузии во фрактальных средах. Проведен анализ ряда определяющих соотношений с производными дробного порядка. В модели вязкоупругого тела максвелловского типа с дробными производными решена задача о квазистатическом и динамическом растяжении тонкого стержня.

Список литературы

1. Paradisi P., Cesari R., Mainardi F., Tampieri F. The fractional Fick's law for non-local transport processes. // Physica A, 2001, 293, p.130-142.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. // Минск: Наука и техника, 1987.
3. Работнов Ю.Н., Равновесие упругой среды с последствием. // Прикладная математика и механика, 1948, Т.12., с.53–62.
4. Bagley R.L., Torvik P.J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. // J. Rheol., 1983, v.27, p.201-210.
5. Bagley R.L., Torvik P.J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. // J. Rheol., 1986, v.30, p.133-155.
6. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. // Теоретическая и математическая физика, 1992, Т.90, № 3, с.354-368.
7. Мержиевский Л.А., Корчагина А.Н. Сравнение методов численного решения задач для уравнения теплопроводности дробного порядка. // X Международный семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 2008, с.85-86.
8. Мержиевский Л.А., Корчагина А.Н. Моделирование распространения теплового импульса во фрактальной среде. // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны. Труды международной конференции «XI Харитоновские тематические научные чтения», Саров, 2009, с.250-254.
9. Головизнин В.М., Киселев В.П., Короткин И.А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии в одномерном случае. // М., 2003 (Препринт / ИБРАЭ РАН: IBRAE-2003-12).
10. Meerschaert M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. // Journ. of Comp. and Appl. Mathem., 2004, v. 172, p.65 - 77.
11. Мержиевский Л.А., Шамонин С.А. Построение зависимости времени релаксации касательных напряжений от параметров состояния среды. // ПМТФ, 1980, № 5, с.170 - 179.
12. Березин И.С. Методы вычислений. Т.2:учебное пособие для высших уч.зав./ И.С. Березин, Н.П. Жидков.-Изд.2-е, перераб..-Москва:Физматлит,1962.-640с.
13. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.:Физматлит, 2003.-207 с.