Известия вузов. Математика
2015, №8, с. 14–24

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.В. ДЕРУНОВА, Ю.И. САПРОНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛИЗОВАННЫХ КЛЮЧЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О ВЕТВЛЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Аннотация. В статье изложена допускающая алгоритмизацию методика приближенного вычисления и использования нормализованных ключевых функций в задаче о ветвлении периодических экстремалей гладкого функционала. Основная цель работы — изучение бифуркации циклов динамических систем в случаях двойных резонансов $1:2:3$, $1:2:4$, $p:q:p+q$ и др. В качестве общего модельного уравнения рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) шестого порядка. Использован метод Ляпунова–Шмидта и переход к краевой или угловой особенностям ключевой функции, что позволяет упростить описание ветвей экстремалей и каустик. Приведены списки систем образующих алгебраических инвариантов относительно ортогонального полусвободного действия окружности на $\mathbb{R}^6$ и перечислены нормальные формы главных частей ключевых функций.

Ключевые слова: гладкий функционал, экстремаль, круговая симметрия, резонанс, бифуркация, метод Ляпунова–Шмидта.

УДК: 517.958

Введение и постановка задачи. В данной работе рассмотрена задача о трехмодовых бифуркациях периодических решений ОДУ шестого порядка

$$\frac{d^6w}{dt^6} + a_3\frac{d^4w}{dt^4} + a_2\frac{d^2w}{dt^2} + a_1w + U\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \dots, \frac{d^6w}{dt^6}\right) = 0, \tag{1}$$

$U(w, w_1, w_2, \dots, w_6) = O(w^2 + w_1^2 + \dots + w_6^2)$, в условиях двойного резонанса. Под двойным резонансом (типа $p_1 : p_2 : p_3$) уравнения (1) подразумевается случай одновременного существования (для соответствующего линеаризованного ОДУ) трех периодических решений $\exp(\frac{2\pi\, i\, p_k}{T}\, t)$, $T > 0$, $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, 3$, $1 \le p_1 \le p_2 \le p_3$, НОД$(p_1, p_2, p_3) = 1$. При этом резонанс $p_1 : p_2 : p_3$ называется сильным, если существует такой ненулевой набор целых чисел n_1, n_2, n_3, что $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0$ и $|n_1| + |n_2| + |n_3| \le 4$. Число $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ называется порядком резонансного соотношения $n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 = 0$. Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется порядком данного резонанса. Резонансные соотношения порядка ≥ 5 называются слабыми. Резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется сильным, и слабым — в противном случае.

Напомним, что под простым резонансом (типа $p_1 : p_2$) уравнения (1) подразумевается случай одновременного существования (для линеаризованного ОДУ) двух периодических решений $\exp(\frac{2\pi\, i\, p_k}{T}\, t)$, $T > 0$, $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2$, $1 \le p_1 \le p_2$, НОД$(p_1, p_2) = 1$. При этом резонанс $p_1 : p_2$ называется сильным, если существует такая пара ненулевых целых чисел n_1, n_2, что $n_1p_1 + n_2p_2 = 0$ и $|n_1| + |n_2| \le 4$. Число $|n_1| + |n_2|$ называется порядком резонансного соотношения $n_1p_1 + n_2p_2 = 0$.

Поступила 22.02.2014

Ниже предполагается, что $T = 2\pi$ и $1 \le p_1 < p_2 < p_3$. Базовое предположение — условие потенциальности: уравнение (1) служит уравнением Эйлера–Пуассона экстремалей функционала

$$V(w,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d^3w}{dt^3}\right)^2 - a_3\left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)^2 + a_2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - a_1\,w^2\right) + \mathcal{U}\right)dt, \tag{2}$$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}\big(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \frac{d^3w}{dt^3}\big)$, при этом $\mathcal{U}(w, w_1, w_2, w_3) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)$. Функционал V рассмотрен на пространстве E — 2π-периодических функций класса C^6 со значениями в области вещественных чисел.

Центральная конструктивная идея статьи — сведéние (редукция) задачи об изучении бифурцирующих критических орбит к задаче о бифуркации критических точек полинома от шести переменных, обладающего круговой симметрией [1]–[3]. Основная цель — разработка и апробация общей методики изучения бифурцирующих решений в случаях двойных резонансов $1:2:3$, $1:2:4$, $p:q:p+q$ и др. [1], [4]–[6]. Предложенная в статье исследовательская схема позволяет сводить анализ бифуркационных эффектов к анализу ключевой функции

$$W(\xi,a) = \operatorname*{extr}_{w:\langle w,e_k\rangle=\xi_k} V(w,a) = V\left(\sum_{i=1}^{6}\xi_i\,e_i + \Phi(\xi,a), a\right) \tag{3}$$

от шести ключевых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6$ ($e_1, e_2, \ldots, e_6$ — моды бифуркации), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[0,2\pi]$ (см. раздел 1).

В данной статье приведены списки систем образующих алгебраических инвариантов для ортогонального действия окружности на $\mathbb{R}^6$ и нормальные формы главных частей ключевых функций. Указаны также нормальные формы огрубленных вторично редуцированных ключевых функций $W(r)$, $r \in \mathbb{R}^3$, в случаях двойных резонансов (функция $W(r)$ — результат применения вариационного метода Ляпунова–Шмидта с последующей вторичной редукцией по угловым переменным [1]).

1. Ключевые функции и их вычисление посредством ритцевской аппроксимации. Топологические и аналитические понятия, характеризующие тип стационарной точки функционала (2) (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т. д. [7]), можно вводить через ключевую функцию (3) и ее нормальную форму [1]. Итогом построения нормальной формы ключевой функции является возможность детального описания качественной картины поведения ветвей бифурцирующих критических точек, в частности, отыскание их точного количества и асимптотик по закритическим приращениям параметров.

Опишем одну практическую схему (локальной) редукции к функции (3). Как предполагалось выше, будем рассматривать 2π-периодические экстремали. Пусть $f(x,a)$ — левая часть уравнения (1), рассмотренная как отображение банаховых пространств $E \longrightarrow F$, $E := \Pi^6_{2\pi}$, $F := \Pi^0_{2\pi}$ — пространства 2π-периодических функций классов C^6 и C^0 соответственно. Пусть $H := L_2[0,2\pi]$ — (гильбертово) пространство функций на отрезке $[0,2\pi]$ с суммируемым квадратом $\Big($со скалярным произведением $\langle u,v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} uv\,dt\Big)$. Очевидно, E непрерывно вложено в F, F непрерывно и плотно вложено в H и E плотно в H (плотность перечисленных вложений пространств необходима для того, чтобы правильно заработала вариационная схема Ляпунова–Шмидта [1]). В приложениях достаточно вычислить лишь несколько первых членов разложения W в ряд Тейлора. Для этого используется ритцевская аппроксимация функционала V по модам $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — функция

$W_R(\xi,a) = V\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i, a\Big)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$. Критическим точкам $\overline{\xi} = (\overline{\xi_1},\dots,\overline{\xi_n})$ функции W соответствуют точки $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\xi_i}e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V. Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть "нелинейные" аппроксимации вида $W(\xi,a) = V\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j e_j + \Phi(\xi,a), a\Big)$, где Φ — гладкое отображение из $N := \mathrm{span}\,(e_1,\dots,e_n)$ в $N^{\perp}$ (ортогональное дополнение к N в H), то можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы [1].

Далее рассмотрен случай указанных выше шести мод и локализация параметров $a_k = \overline{a}_k + \delta_k$, $k = 1,2,3$, где $(\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3) = (p_1^2p_2^2p_3^2,\ p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_2^2p_3^2,\ p_1^2+p_2^2+p_3^2)$, δ_1, δ_2, δ_3 — малые параметры. После пересечения точкой (a_1,a_2,a_3) характеристической плоскости (в пространстве параметров $\mathbb{R}^3$) происходит смена значения индекса Морса в нулевой экстремали. Характеристические плоскости задаются посредством линеаризованного уравнения

$$\frac{d^6h}{dx^6} + a_3\frac{d^4h}{dx^4} + a_2\frac{d^2h}{dx^2} + a_1 h = 0 \tag{4}$$

и состоят из тех и только тех точек $a = (a_1,a_2,a_3)$, для которых уравнение (4) имеет ненулевое 2π-периодическое решение. Поиск таких случаев приводит к характеристическому уравнению $-\lambda^6 + a_3\lambda^4 - a_2\lambda^2 + a_1 = 0$. Если имеется три линейно независимых 2π-периодических решения линеаризованного уравнения, то следствием последнего уравнения являются соотношения $\lambda^2 = n^2$, $n \in \{p_1,p_2,p_3\}$, $p_j \in \mathbb{N}$, $p_1 < p_2 < p_3$. Каждое соотношение $a_0 = a_2n^2 - a_1n^4 + n^6$ задает характеристическую плоскость L_n. При пересечении точкой $a = (a_1,a_2,a_3)$ поверхности L_n происходит бифуркация рождения (уничтожения) экстремалей в нуле.

Нетрудно убедиться, что характеристические плоскости L_m, L_n, L_l, отвечающие произвольной тройке попарно различных натуральных чисел m, n, l, пересекаются по единственной точке $(a_1,a_2,a_3) = (n^2+m^2+l^2,\ n^2m^2+m^2l^2+n^2l^2,\ n^2m^2l^2)$. Переход параметра через характеристическую точку, являющуюся точкой пересечения плоскостей L_n, L_m, L_l, приводит к бифуркации с модами e_{2n-1}, e_{2n}, e_{2m-1}, e_{2m}, e_{2l-1}, e_{2l}, где $e_{2n-1} = \sqrt{2}\cos(nt)$, $e_{2n} = \sqrt{2}\sin(nt)$ — пара двойственных мод.

Для иллюстрации рассмотрим один частный, но важный для приложений случай.

Пример. Пусть $\mathcal{U}\big(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \frac{d^3w}{dt^3}\big) = \frac{w^4}{4}$, $m = 1$, $n = 2$, $l = 3$. После подстановки функции $u = \sum\limits_{k=1}^{6}\xi_k e_k$ в интеграл $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\Big(\big(\frac{d^3w}{dx^3}\big)^2 - a_3\big(\frac{d^2w}{dx^2}\big)^2 + a_2\big(\frac{dw}{dx}\big)^2 - a_1 w^2\Big) + \frac{w^4}{4}\right)dt$ получим, с точностью до постоянного множителя, следующее выражение для квадратичной части ключевой функции:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}^{(4)} = (\xi_1^2+\xi_2^2)^2 + (\xi_3^2+\xi_4^2)^2 + (\xi_5^2+\xi_6^2)^2 + \\ + 4(\xi_1^2\xi_4^2 + \xi_1^2\xi_5^2 + \xi_1^2\xi_6^2 + \xi_2^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_4^2 + \xi_2^2\xi_5^2 + \xi_2^2\xi_6^2 + \xi_3^2\xi_5^2 + \xi_3^2\xi_6^2 + \xi_4^2\xi_5^2 + \xi_4^2\xi_6^2) + \\ +4(-\xi_1\xi_2^2\xi_5 + \xi_1^2\xi_2\xi_6 - \xi_3^2\xi_5\xi_1 - \xi_2\xi_3^2\xi_6 + \xi_1\xi_4^2\xi_5 + \xi_2\xi_4^2\xi_6) + 8\,(\xi_1\xi_3\xi_4\xi_6 + \xi_2\xi_3\xi_4\xi_5) + \tfrac{4}{3}(\xi_1^3\xi_5 + \xi_2^3\xi_6)\,.\end{aligned}$$

Для ключевой функции (3) имеет место асимптотическое представление

$$W = \widetilde{W}^{(4)} + \frac{1}{2}\left(\lambda_1(\xi_1^2+\xi_2^2) + \lambda_2\,(\xi_3^2+\xi_4^2) + \lambda_3\,(\xi_5^2+\xi_6^2)\right) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $\lambda_1 = c\,(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)$, $\lambda_2 = c\,(\delta_1 - 16\delta_2 + 4\delta_3)$, $\lambda_3 = c\,(\delta_1 - 81\delta_2 + 9\delta_3)$, c — const. Проверка основана на прямом вычислении главной части ключевой функции[1]. Обоснование последнего утверждения почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в [8], [9] в доказательстве теоремы о нормальной форме для уравнения (1) при краевых условиях Дирихле. Если в трех плоскостях $\{\xi_1,\xi_2\}$, $\{\xi_3,\xi_4\}$ и $\{\xi_5,\xi_6\}$ ввести полярные координаты: $\xi_{2k-1} = r_k\cos\varphi_k$, $\xi_{2k} = r_k\sin\varphi_k$, $k = 1,2,3$, и провести редукцию по угловым переменным φ_k: $\widehat{W}(r) := \operatorname*{extr}_{\varphi} W(\xi)$, $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, то получим редуцированную ключевую функцию

$$\widehat{W}(r) = \sum_{j=1}^{3} r_j^4 + 4\left(r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2r_3^2\right) - \frac{4}{3}\,r_1^3r_3 + 4\,r_1r_2^2r_3 + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\,r_j^2\right) + o(|r|^4) + O(|r|^4)O(\delta).$$

Мономиальное слагаемое $\frac{4}{3}\,r_1^3r_3$ в этом полиноме можно уничтожить нормализующей линейной заменой координат [7], [10].

2. Двухмодовая ключевая функция в случае простого резонанса.

2.1. Случай резонанса $1:2$. Более подробная информация о двухмодовых бифуркациях в случае круговой симметрии имеется в [4].

Пусть задан гомоморфизм (не гладкий) $T : G \longrightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H, определяемый ортогональным действием (вообще говоря, не непрерывным) $G \times H \longrightarrow H, (g,w) \longmapsto y = T_g(w) \quad \forall (g,w) \in G \times H$, где $g = \exp(i\,\tau)$, $T_g(w)(t) := w(t+\tau)$ ($\exp(i\,\tau)$ — комплексная форма двумерной ортогональной матрицы положительной ориентации). Будем предполагать, что пространства E, F и функционал V инвариантны относительно данного действия: $T_g(E) \subset E$, $T_g(F) \subset F$, $V(T_g(\cdot)) = V(\cdot)$, наряду с эквивариантностью редуцирующей субмерсии $\mathbf{p} : x \longmapsto \xi$, $x \in E$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$, $\xi_j = \langle x, e_j\rangle$. Действие окружности в $\mathbb{R}^4$ состоит из вращений в координатных плоскостях переменных ξ_1, ξ_2 и ξ_3, ξ_4 (см. ниже (5)). Ключевая функция W, заданная формулой (3), также будет инвариантной [3].

Важное условие, используемое в работе, состоит в требовании гладкости действия группы $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров. В рассмотренной модельной задаче последнее выполняется автоматически, так как индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ является гладким. Индуцированное действие $SO(2)$ на пространстве ключевых параметров $\mathbb{R}^4$ является полусвободным (начало координат — единственная неподвижная точка). Если при этом отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}$, то условие инвариантности W можно записать в виде соотношения $W(\widetilde{z}) = W(z)$, $\widetilde{z} = (\exp(i\,p_1\varphi)z_1, \exp(i\,p_2\varphi)z_2)$, $p_k \in \mathbb{Z}$ (инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i\;p_1\varphi)z_1,\ \exp(i\;p_2\varphi)z_2) \tag{5}$$

группы $SO(2)$).

Множество ненулевых критических точек ключевой функции W и их образов относительно редуцирующего отображения $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $\varphi(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{6} \xi_j e_j + \Phi(\xi)$, представляет собой набор одномерных подмногообразий (критических орбит действия (5)), диффеоморфных окружности.

Теорема 1. *В случае четырехмерного вырождения с резонансом* $1:2$ *ключевая функция* W *допускает представление в виде* $-\frac{1}{2}\left(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2\right) + \frac{1}{3}\left(C_3 I_3 + C_4 I_4\right) + \frac{1}{4}\left(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2BI_1I_2\right) +$

[1] Вычисление многочлена $\widetilde{W}^{(4)}$ проведено в среде Maple.

$o(\|\xi\|^4)+O(\delta)O(\|\xi\|^4)$, где $I_1=\xi_1^2+\xi_2^2$, $I_2=\xi_3^2+\xi_4^2$, $I_3=(\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_3+2\xi_1\xi_2\xi_4$, $I_4=2\xi_1\xi_2\xi_3-(\xi_1^2-\xi_2^2)\xi_4$ — полная система образующих инвариантов действия (5) *группы $SO(2)$ на $\mathbb{R}^4$, A_1, A_2, B, C_1, C_2 — константы, α_1, α_2 — зависящие от δ малые параметры.*

Доказательство основано на асимптотическом представлении $W=U(\xi)+o(I_1^2,I_2^2,I_3^2,I_3I_4)$, где $U(\xi)=V\Big(\xi_1e_1+\xi_2e_2+\xi_3e_3+\xi_4e_4+\sum\limits_{j:|j|=2}^{3}a_j\xi^j\Big)$ — нелинейная ритцевская аппроксимация V по модам бифуркации e_1, e_2, e_3, e_4, $a_j=a_j(\delta)$ — вычисляемые элементы пространства E, $\langle a_j,e_k\rangle=0\quad\forall j,k$. Утверждение, близкое к теореме 1, приведено в [1], [4].

После масштабирования и деления W на подходящий множитель получим функцию $\widetilde{W}=\widetilde{U}(\xi)+o(\|\xi\|^4)$, где $\widetilde{U}(\xi)=-\frac{1}{2}\left(\beta_1I_1+\beta_2I_2\right)+\frac{1}{3}\left(C_1I_3+C_4I_4\right)+\frac{1}{4}\left(I_1^2+I_2^2+2aI_1I_2\right)$. В результате получается [1], [4]

Теорема 2. *В случае четырехмерного вырождения с резонансом $1:2$ ключевая функция W допускает в полярных координатах $\xi_1=r_1\cos\varphi_1$, $\xi_2=r_1\sin\varphi_1$, $\xi_3=r_2\cos\varphi_2$, $\xi_4=r_2\sin\varphi_2$ представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде $\widetilde{W}=-\frac{1}{2}(\beta_1r_1^2+\beta_2r_2^2)+cr_1^2r_2\cos\psi+\frac{1}{4}(r_1^4+r_2^4+2ar_1^2r_2^2)+\vartheta(r_1^2,r_2^2)+r_1^2r_2\varrho(r_1^2,r_2,\psi)$, $a>-1$, где $a=a(\delta)$, $c=c(\delta)$ — вычисляемые константы, $\psi=\varphi_2-2\varphi_1+\mathrm{const}$, ϑ, ϱ — некоторые гладкие функции двух и трех переменных соответственно, для которых*

$$\vartheta(r_1^2,r_2^2)=O(|\xi|^6),\quad \varrho(r_1^2,r_2,\psi)=O(|\xi|^2).$$

Условие стационарности орбиты по фазе $\psi=2\varphi_1-\varphi_2$ приводит к следующим критическим значениям фазы: $\psi=0+O(|\xi|^2)$, $\psi=\pi+O(|\xi|^2)$. Дальнейшее изучение условий стационарности по амплитудам r_1, r_2 приводит к задаче о бифуркации критических точек из критической точки с омбилической особенностью параболического типа [11]. В этом случае локальной нормальной формой ключевой функции (при нулевых значениях возмущающих параметров) является полином $\widetilde{W}_0=r_2^4\pm r_1^2r_2$. (Из теории особенностей гладких функций известно [7], [11], что для критической точки с особенностью параболической омбилики кратность в нуле $\mu=5$.) Функция $r_2^4\pm r_1^2r_2$ симметрична относительно следующей пары преобразований: $I_1:(r_1,r_2)\longrightarrow(-r_1,r_2)$, $I_2:(0,r_2)\longrightarrow(0,-r_2)$. Так как и функция $\widetilde{W}$ инвариантна относительно преобразований I_1, I_2 (вследствие $SO(2)$-эквивариантности ключевой функции), то ключевая функция эквивалентна в классе деформаций особенностей с симметрией относительно преобразований I_1, I_2 следующей миниверсальной развертке ростка функции $\widetilde{W}_0$ в нуле: $W(r_1,r_2)=r_2^4\pm r_1^2r_2+\delta_1r_1^2+\delta_2r_2^2$. Стандартная замена $r_1^2=u$, $u\geq0$, приводит к эквивалентной задаче о бифуркациях экстремалей из краевой особой точки [7] для следующей развертки (ниже введено обозначение $v=r_2$): $\widehat{W}(u,v)=v^4\pm uv+\delta_1u+\delta_2v^2$, $u\geq0$. Полином $v^4\pm uv$ можно заменить полиномом v^4+uv, отбросив ограничение $v\geq0$ (критические точки с отрицательными значениями v переходят в критические точки с положительными значениями v после смены знака во втором слагаемом полинома v^4+uv). Переход от функции $\widetilde{W}$ к краевой особенности функции $v^4+uv, u\geq0$, и к ее деформации не отражается на каустике[2], которая представляет собой росток в нуле следующего объединения множеств: $\Sigma=\Sigma_1^{\mathrm{int}}\cup\Sigma_1^{\mathrm{ext}}\cup\Sigma_0$, где Σ_1^{int}, Σ_1^{ext} — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края и соответственно по нормали, а Σ_0 — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек. Нетрудно проверить, что в рассмотренной задаче компонента Σ_0 является пустой.

[2]Каустика Σ для функционала $V(\cdot,\lambda)$ — это совокупность тех значений (векторного) параметра λ, при которых $V(\cdot,\lambda)$ имеет в рассмотренной области определения V вырожденную критическую точку.

Следовательно, построение параметризации каустики сводится к параметризации лишь ее “краевых” компонент.

2.2. Вырождение вдоль края (внутреннее вырождение). Для краевых критических точек функции $\widehat{W}(u,v) = v^4 + uv + \delta_1 u + \delta_2 v^2$ вторая частная производная по v обращается в нуль: $\frac{\partial \widehat{W}}{\partial v}(0,v) = \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial v^2}(0,v) = 0 \Rightarrow 4v^3 + 2\delta_2 v = 12v^2 + 2\delta_2 = 0$. На основе этих соотношений легко увидеть, что множество Σ_1^{int} задается уравнением $\delta_2 = 0$. Переход параметра δ_2 сверху вниз через нуль приводит к рождению пары симметрично расположенных точек минимума (относительно края). Нуль становится при этом точкой максимума. Индекс Морса всех краевых критических точек изменяется на единицу при смене знака производной W в нуле по нормали к краю (по переменной u).

2.3. Вырождение вдоль нормали (внешнее вырождение). Рассмотрим краевые критические точки функции $\widehat{W}$, в которых частная производная по u обращается в нуль (внешнее вырождение): $\frac{\partial \widehat{W}}{\partial u}(0,v) = 4v^3 + 2\delta_2 v = 0$. После сопоставления последнего соотношения с уравнением критических краевых точек нетрудно заметить, что множество Σ_1^{ext} задается уравнением $(\delta_2 + 2\delta_1^2)\delta_1 = 0$. Таким образом, каустика функции $\widehat{W}(u,v)$ получается объединением координатного креста $\delta_1\delta_2 = 0$ с параболой $\delta_2 + 2\delta_1^2 = 0$.

3. Трехмодовые ключевые функции. На формирование главной части ключевой функции в случае, рассмотренном в примере из п. 1, важнейшее влияние оказала симметрия четности функционала. Если данная симметрия отсутствует, то главная часть ключевой функции в условиях резонанса 1 : 2 : 3 выглядит несколько иначе. В общем случае ключевая функция имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\delta_k I_k + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{3} A_k I_k^2 + 2\sum_{k,j=1}^{3} B_{k,j} I_k^2 I_j^2\right) + J + o(\|\xi\|^4),$$

где $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$ — стандартные инварианты, а J — линейная комбинация всех дополнительных (кроме стандартных I_k) образующих инвариантов степени ≤ 4 для рассматриваемого действия окружности на $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$:

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(ip_1\varphi)z_1, \exp(i\,p_2\varphi)z_2, exp(ip_3\varphi)z_3)^\top \quad (\top \text{ — знак транспонирования}). \quad (6)$$

3.1. Образующие инварианты. Вновь обратимся к комплексной форме многочленов от переменных $z_k := \xi_{2k-1} + \xi_{2k} i$. Во всех случаях инвариантами действия окружности являются многочлены $I_k = |z_k|^2$, $k = 1,2,3,$ — стандартные инварианты степени 2. Кроме того, имеются следующие инварианты степеней 3 и 4, присущие отдельным случаям (в левой колонке табл. 1 указаны типы резонансов).

В случае $p:q:r$, $p+q \ge 5$, $p+r \ge 5$, $q+r \ge 5$, дополнительных инвариантов третьей и четвертой степеней нет.

Если перейти к полярным координатам $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, то получим ключевую функцию в виде $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P} + o(\|r\|^4)$, где $\mathcal{W}_0 = \sum\limits_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum\limits_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$, $\{a_{j,k}\}$ — структурные параметры, $\mathcal{P}$ — полином от r с коэффициентами, зависящими от φ, δ_j — малый параметр. Полином $\mathcal{P}$ задан в табл. 2.

Таблица 1.

$1:2:3$	$\overline{z}_1^2 z_2,\ \overline{z}_1\overline{z}_2 z_3,\ \overline{z}_1\overline{z}_3 z_2^2,\ \overline{z}_1^3 z_3$
$1:2:4$	$\overline{z}_1^2 z_2,\ \overline{z}_2^2 z_3,\ \overline{z}_1^2\overline{z}_2 z_3$
$1:2:5$	$\overline{z}_1^2 z_2,\ \overline{z}_1\overline{z}_2^2 z_3$
$1:2:6$	$\overline{z}_1^2 z_2,\ \overline{z}_2^3 z_3$
$1:3:4$	$\overline{z}_1^3 z_2,\ \overline{z}_1\overline{z}_2 z_3$
$1:3:5$	$\overline{z}_1^3 z_2,\ \overline{z}_1^2\overline{z}_2 z_3$
$1:3:6$	$\overline{z}_1^3 z_2,\ \overline{z}_2^2 z_3$
$1:3:7$	$\overline{z}_1^3 z_2,\ \overline{z}_1\overline{z}_2^2 z_3$
$1:3:9$	$\overline{z}_1^3 z_2,\ \overline{z}_2^3 z_3$
$p:q:p+q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_1\overline{z}_2 z_3$
$p:q:2p+q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_1^2\overline{z}_2 z_3$
$p:q:p+2q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_1\overline{z}_2^2 z_3$
$p:2p:q,\ p+q\geq 8,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_1^2 z_2$
$p:q:2q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_2^2 z_3$
$p:3p:q,\ p+q\geq 9,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_1^3 z_2$
$p:q:3q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$\overline{z}_2^3 z_3$

Таблица 2.

$1:2:3$	$b_1 r_1 r_2 r_3 + b_2 r_1^2 r_2 + b_3 r_1 r_2^2 r_3 + b_4 r_1^3 r_3$
$1:2:4$	$b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_2^2 r_3 + b_3 r_1^2 r_2 r_3$
$1:2:5$	$b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_1 r_2^2 r_3$
$1:2:6$	$b_1 r_1^2 r_2 + b_2 r_2^3 r_3$
$1:3:4$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_1 r_2 r_3$
$1:3:5$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_1^2 r_2 r_3$
$1:3:6$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_2^2 r_3$
$1:3:7$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_1 r_2^2 r_3$
$1:3:9$	$b_1 r_1^3 r_2 + b_2 r_2^3 r_3$
$p:q:p+q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$b r_1 r_2 r_3$
$p:q:2p+q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$b r_1^2 r_2 r_3$
$p:q:p+2q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$b r_1 r_2^2 r_3$
$p:2p:q,\ p+q\geq 8,\ \ p,q\geq 1$	$b r_1^2 r_2$
$p:q:2q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$b r_2^2 r_3$
$p:3p:q,\ p+q\geq 9,\ \ p,q\geq 1$	$b r_1^3 r_2$
$p:q:3q,\ p+q\geq 5,\ \ p,q\geq 1$	$b r_2^3 r_3$

Коэффициенты b, b_j являются функциями от угловых переменных φ_k. Нетрудно проверить, что стационарные по угловым переменным точки регулярны по этим переменным. От угловых переменных можно избавиться посредством вторичной редукции к функции $\mathcal{U}(r)$ (исключением угловых переменных):

$$\mathcal{U}(r) := \operatorname*{extr}_{\varphi} \mathcal{W}(r,\varphi) = \mathcal{W}_0 + \mathcal{P}_0 + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4). \tag{7}$$

Важная информация о бифуркациях в порождающей критической точке исходного функционала “спрятана” в функции $\mathcal{U}(r)$. Каждому из перечисленных выше случаев двойного резонанса соответствует определенный тип min-особенности ключевой функции.

После исключения угловых переменных φ_k получается функция $\mathcal{U}(r)$, инвариантная относительно действия в $\mathbb{R}^3$ группы "остаточной" симметрии G, порожденной исходным действием окружности в $\mathbb{C}^3$. Точнее, группа G порождена теми действиями (6), которые переводят стационарные (по φ) подмногообразия (для $\mathcal{W}(r,\varphi)$) в точно такие же подмногообразия. Ниже будет приведен пример группы G "остаточной" симметрии.

Теорема 3 (о частично нормализованной ключевой функции)**.** *Если полученная вторичным редуцированием* (7) *по угловым переменным* φ_k *функция* $\mathcal{U}(r)$ (*в точке минимума с двойным сильным резонансом*) *конечнократна* (*условие конечнократности означает, что* $\dim\left(\mathbb{R}\left[[x_1,x_2,x_3]\right]/\left\langle\frac{\partial W}{\partial x_1},\frac{\partial W}{\partial x_2},\frac{\partial W}{\partial x_3}\right\rangle\right) < \infty$ ([1], c. 8; [7])), *то она приводится посредством G-эквивариантной параметрической замены координат и переопределения параметров к следующей нормальной до четвертого порядка форме*:

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4 + \sum_{j<k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + \mathcal{P}_0 + \frac{1}{2}\left(\delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2\right) + O(\|r\|^4)O(\delta) + o(\|r\|^4),$$

в которой слагаемое $\mathcal{P}_0$ *представлено в табл.* 3 (*параметры* ε_j *являются малыми*), G — *группа остаточной симметрии.*

Таблица 3.

$p_1 : p_2 : p_3$	$\mathcal{P}_0$
$1:2:3$	$br_1r_2^2r_3 + \varepsilon_1 r_1r_2r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2$
$1:2:4$	$br_1^2r_2r_3 + \varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_2^2 r_3$
$1:2:5$	$\varepsilon_1 r_1^2 r_2 + \varepsilon_2 r_1 r_2^2 r_3$
$1:2:6$	$\varepsilon r_1^2 r_2$
$1:3:4$	$\varepsilon r_1 r_2 r_3$
$1:3:5$	$\varepsilon r_1^2 r_2 r_3$
$1:3:6$	$\varepsilon r_2^2 r_3$
$1:3:7$	$br_1 r_2^2 r_3$
$1:3:9$	0
$p:q:p+q,\ p+q\ge 5,\ \ p,q\ge 1$	$\varepsilon r_1 r_2 r_3$
$p:q:2p+q,\ p+q\ge 5,\ \ p,q\ge 1$	$\varepsilon r_1^2 r_2 r_3$
$p:q:p+2q,\ p+q\ge 5,\ \ p,q\ge 1$	$\varepsilon r_1 r_2^2 r_3$
$p:2p:q,\ p+q\ge 8,\ \ p,q\ge 1$	$\varepsilon r_1^2 r_2$
$p:q:2q,\ p+q\ge 5,\ \ p,q\ge 1$	$\varepsilon r_2^2 r_3$
$p:3p:q,\ p+q\ge 9,\ \ p,q\ge 1$	0
$p:q:3q,\ p+q\ge 5,\ \ p,q\ge 1$	0

Замечание. В теореме 3 учтено, что каждый моном $r_j^3 r_k$, $j\ne k$, после проецирования в фактор $\mathbb{R}\left[[x_1,x_2,x_3]\right]/\left\langle\frac{\partial W}{\partial x_1},\frac{\partial W}{\partial x_2},\frac{\partial W}{\partial x_3}\right\rangle$ (локальное кольцо min-особенности ([1], c. 8; [7], [11], [12])) попадает в линейную оболочку мономов $r_j^2 r_k^2$, $j\ne k$, и $r_j^2 r_k r_l$, $j\ne k\ne l\ne j$.

3.2. Пример частично нормальной ключевой функции (случай резонанса $1:2:4$**).** Ключевая функция, редуцированная по угловым переменным в критической точке с резонансом $1:2:4$, приводится к следующей частично нормализованной форме:

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4+\sum_{j<k} a_{j,k}r_j^2r_k^2+b\,r_1^2r_2r_3+\varepsilon_1\,r_1^2r_2+\varepsilon_2\,r_2^2r_3+\delta_1r_1^2+\delta_2r_2^2+\delta_3r_3^2+o(|\xi|^4)+O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (8)$$

c — параметр. Вычисление коэффициентов проводится стандартным образом. Сначала вычисляется тейлоровское приближение $\widetilde{W}$ к ключевой функции до четвертого порядка (на пространстве ключевых переменных $\mathbb{R}^6$). Затем в трех плоскостях парных мод бифуркации вводятся полярные координаты. У записанной в этих координатах тейлоровской аппроксимации $\widetilde{W}$ ключевой функции определяются критические значения (трех) угловых переменных. После подстановки этих значений вместо угловых переменных получаем редуцированную главную часть в виде полинома $\mathcal{W}$ четвертой степени от трех радиальных переменных. Дальнейший процесс нормализации полученной функции $\mathcal{W}$ опирается на теорему Дж. Мазера ([12], с. 124–125) о конечной определенности функции своей главной частью (с учетом остаточной симметрии).

Группа обобщенной остаточной симметрии G порождена элементарными действиями

$$\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} -r_1\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ \varepsilon_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} r_1\\ -r_2\\ r_3\\ -\varepsilon_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ -r_3\\ -\varepsilon_2\end{pmatrix}.$$

Данная симметрия является следствием круговой симметрии и наличием резонанса $1:2:4$.

Для получения первых асимптотик (по δ) ветвей бифурцирующих экстремалей достаточно огрубленной ключевой функции ([1], с. 30–31)

$$\sum_{j=1}^{3} r_k^4+\sum_{j<k} a_{j,k}r_j^2r_k^2+b\,r_1^2r_2r_3+\varepsilon_1\,r_1^2r_2+\varepsilon_2\,r_2^2r_3+\delta_1r_1^2+\delta_2r_2^2+\delta_3r_3^2.$$

3.3. Случай резонанса $1:2:3$. Аналогичные рассуждения можно провести и для других случаев. Для резонанса $1:2:3$ ключевая функция (огрубленная) $\mathcal{W}$ приводится к форме $\sum\limits_{j=1}^{3} r_k^4+\sum\limits_{j<k} a_{j,k}r_j^2r_k^2+b\,r_1^2r_2r_3+\varepsilon_1r_1r_2r_3+\varepsilon_2r_1^2r_2+\delta_1r_1^2+\delta_2r_2^2+\delta_3r_3^2$.

3.4. Случай $\min$**-особенности с резонансом** $p:2p:q$**,** $p+q\geq 8$ ([13], [14]). После замены $r_1^2=y_1$, $r_2=y_2$, $r_3^2=y_3$ (для редуцированной и нормализованной ключевой функции) получим функцию с угловой особенностью [15] $\widetilde{U}=y_1^2+y_2^4+y_3^2+a_{1,2}y_1y_2^2+a_{1,3}y_1y_3+a_{2,3}y_2^2y_3+\varepsilon y_1y_2+\delta_1y_1+\delta_2y_2^2+\delta_3y_3$. Анализ таких функций представлен в [1].

3.5. Случай $\min$**-особенности со слабым резонансом** $p:q:r$**,** $|p|+|q|+|r|\geq 5$**.** В этом случае после замены $r_1^2=y_1$, $r_2^2=y_2$, $r_3^2=y_3$ (для редуцированной и нормализованной ключевой функции) получим функцию с главной частью (после отбрасывания "наддиагональных" мономов [7]) $\widehat{U}(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+ay_1y_2+by_1y_3+cy_2y_3+\delta_1y_1+\delta_2y_2+\delta_3y_3$ в положительном октанте $\{y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ y_3\geq 0\}$ (функцию с угловой особенностью [15], [1]). Анализ этой функции проведен в [16].

4. Пример бифуркационного анализа огрубленной нормальной формы ключевой функции, редукция к краевой особенности. Обратимся к случаю резонанса $1:2:4$. После замены $r_1^2=y_1$, $r_2=y_2$, $r_3=y_3$ в (8) получим функцию $\overline{U}$ с краевой особенностью [1], [7]

$$y_1^2+y_2^4+y_3^4+a_{1,2}y_1y_2^2+a_{1,3}y_1y_3^2+a_{2,3}y_2^2y_3^2+b\,y_1y_2y_3+\varepsilon_1y_1y_2+\varepsilon_2\,y_1y_3+\varepsilon_3y_2^2y_3+\delta_1y_1+\delta_2y_2^2+\delta_3y_3^2,$$

определенную на полупространстве $y_1 \geq 0$.

Каустику можно представить в виде $\Sigma = \Sigma^{\rm int}_{0,1,1} \cup \Sigma^{\rm ext}_{0,1,1} \cup \Sigma_{1,1,1}$, где $\Sigma^{\rm int}_{0,1,1}$ и $\Sigma^{\rm ext}_{0,1,1}$ — подмножества (компоненты) каустики, отвечающие за вырождение краевых особенностей вдоль края $y_1 = 0$ и по нормали, а $\Sigma_{1,1,1}$ — компонента, отвечающая за вырождение внутренних (некраевых) критических точек. Описание компоненты $\Sigma^{\rm int}_{0,1,1}$, следящей за внутренним вырождением (вырождением вдоль края), сводится к изучению функции $\overline{U}(0, y_2, y_3) = y_2^4 + y_3^4 + a_{2,3}y_2^2y_3^2 + \varepsilon_3 y_2^2 y_3 + \delta_2 y_2^2 + \delta_3 y_3^2$. Компонента $\Sigma^{\rm ext}_{0,1,1}$, следящая за внешним вырождением (вырождением вдоль нормали), определяется рассмотрением краевых критических точек функции $\overline{U}$, в которых производная по y_1 обращается в нуль (внешнее вырождение): $\frac{\partial \overline{U}}{\partial y_1}(0, y_2, y_3) = 0$. Компонента $\Sigma^{\rm ext}_{1,1,1}$, следящая за вырождением вне края, описывается посредством редукции к одномерной особенности. Действительно, функция $\overline{U}$ имеет одномерное вырождение в начале координат (по переменным y_1, y_2 эта функция регулярна) и поэтому можно сделать редуцирующий переход к функции одной переменной $R(y_3) := \operatorname*{extr}_{y_1, y_2} \overline{U}_\delta(y)$.

Литература

[1] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. *Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов*, Современ. матем. Фундамент. направления **12**, 3–140 (МАИ, М., 2004).

[2] Сапронов Ю.И., Царев С.Л. *Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах*, Матем. заметки **58** (5), 745–754 (2000).

[3] Царев С.Л. *Сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах с симметрией*, Современ. матем. и ее прилож. **7**, 87–91 (Тбилиси, 2003).

[4] Карпова А.П., Ладыкина У.В., Сапронов Ю.И. *Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения*, Матем. модели и операторные уравнения **5**, ч. 1, 45–90 (“Созвездие”, Воронеж, ВГУ, 2008).

[5] Даринский Б.М., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И. *Ветвление фаз кристалла, определяемых термодинамическим потенциалом шестого порядка*, Системы управления и информац. технологии, № 1 (35), 72–76 (2009).

[6] Даринский Б.М., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И. *Ветвление сегнетоэлектрических фаз неоднородного кристалла вблизи критической фазы с трехмерной особенностью шестого порядка*, Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем., № 1, 101–107 (Изд. ВГУ, Воронеж, 2009).

[7] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек каустик и волновых фронтов* (Наука, М., 1982).

[8] Зачепа А.В. *Трехмодовые вырождения в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка*, Сб. тр. молодых ученых матем. ф-та ВГУ, с. 52–58 (Изд. ВГУ, Воронеж, 2003).

[9] Зачепа А.В., Сапронов Ю.И. *О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью* 3*-мерной сборки*, Тр. матем. ф-та, вып. 9 (новая серия), с. 57–71 (Изд. ВГУ, Воронеж, 2005).

[10] Колесникова И.В., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. *К бифуркационному анализу 2-точечных краевых задач классической механики*, Тр. Воронежск. зимней матем. школы С.Г. Крейна, с. 63–78 (Изд. ВГУ, Воронеж, 2006).

[11] Постон Т., Стюарт И. *Теория катастроф и ее приложения* (Мир, М., 1980).

[12] Брекер Т., Ландер Л. *Дифференцируемые ростки и катастрофы* (Мир, М., 1977)

[13] Дерунова Е.В., Сапронов Ю.И. *Ключевые функции, определяющие ветвление периодических экстремалей в стационарных точках с двойными резонансами порядка три*, Матем. модели и операторные уравнения **7**, 34–47 (Изд. ВГУ, Воронеж, 2011).

[14] Sapronov Yu.I., Derunova E.V. *Bifurcations of critical orbits of* $SO(2)$*-invariant Fredholm functionals at critical points with double resonances*, Global and Stochastic Anal. **2** (1), 133–148 (2012).

[15] Siersma D. *Singularities of functions on boundaries, corners, etc.*, Quart. J. Oxford Ser. **32** (125), 119–127 (1981).

[16] Гнездилов А.В. *Бифуркации критических торов для функционалов с* 3*-круговой симметрией*, Функц. анализ **34** (1), 83–86 (2000).

Е.В. Дерунова

аспирант, кафедра математического моделирования,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: derunova-el@mail.ru

Ю.И. Сапронов

профессор, кафедра математического моделирования,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: yusapr@mail.ru

E.V. Derunova and Yu.I. Sapronov

Application of normalized key functions in a problem of branching of periodic extremals

Abstract. In this paper we construct a procedure of approximate calculation and analysis of branches of bifurcating solutions to a periodic variational problem. The goal of the work is a study of bifurcation of cycles in dynamic systems in cases of double resonances $1:2:3$, $1:2:4$, $p:q:p+q$ and others. An ordinary differential equation (ODE) of the sixth order is considered as a general model equation. Application of the Lyapunov–Schmidt method and transition to boundary and angular singularities allow to simplify a description of branches of extremals and caustics. Also we list systems of generators of algebraic invariants under an orthogonal semi-free action of the circle on $\mathbb{R}^6$ and normal forms of the main part of the key functions.

Keywords: Fredholm functionals, extremals, circular symmetry, resonance, bifurcation, Lyapunov–Schmidt method.

E.V. Derunova

Postgraduate, Chair of Mathematical Modeling,
Voronezh State University,
1 University sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: derunova-el@mail.ru

Yu.I. Sapronov

Professor, Chair of Mathematical Modeling,
Voronezh State University,
1 University sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: yusapr@mail.ru